

3. SYSTÉMY DIFERENCIÁLNÝCH ROVNÍC

Jednoduchý model rastu a klesania jedného druhu populácie je vyjadrený obyčajnou diferenciálnou rovnicou

$$x' = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

Pri štúdiu úloh z populačnej dynamiky sa často stretávame s problematikou časovej závislosti dvoch navzájom interagujúcich druhov populácie. Typickým príkladom je vzťah dravec - korisť. Nech $x_1(t)$ je množstvo koristi (napr. zajacov) a $x_2(t)$ je množstvo dravcov (napr. líšok) v čase t a v určitom ohraničenom priestore. Derivácie x'_1, x'_2 vyjadrujú funkcie ich prírastku vzhľadom na čas. Vzťah medzi prírastkom koristi a množstvami koristi a dravcov môžeme vyjadriť rovnicou

$$x'_1 = a_1 x_1 - a_2 x_2$$

Konštanta $a_1 > 0$ vyjadruje rozdiel medzi pomermi prírastkov a poklesov a množstvom populácie spôsobený narodeniami a úmrtiami koristi. Konštanta a_2 je kladná, pretože množstvo $x_2(t)$ dravcov v čase t spôsobuje pokles počtu koristi. Podobne môžeme vyjadriť aj vzťah medzi prírastkom počtu dravcov a množstvami koristi a dravcov, ktorý je

$$x'_2 = a_3 x_1 - a_4 x_2$$

kde $a_3 > 0, a_4 > 0$. Posledná konštanta je kladná, pretože v prípade chýbajúcej koristi ako zdroja potravy by nastal pokles počtu dravcov.

Vyššie odvodené rovnice spolu vyjadrujú *systém diferenciálnych rovníc*. Ďalšie modely matematicky vyjadrené systémami diferenciálnych rovníc možno nájsť v mechanike, v teórii elektrických obvodov, v ekonomických a sociálnych vedách, v teórii riadenia.

3.1. ZÁKLADNÉ POJMY

Budeme sa zaoberať systémami diferenciálnych rovníc - SDR pre neznáme funkcie x_1, \dots, x_n časovej premennej t :

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Riešením systému diferenciálnych rovníc (1.1) je každá n -tica spojitých diferenciálnych funkcií

$$(x_1, \dots, x_n)^T, \quad x_i: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

spĺňajúca identity

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x'_2(t) &= f_2(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\dots \\ x'_n(t) &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

pre všetky $t \in (a, b), -\infty \leq a < t < b \leq \infty$.

Podobne ako tomu bolo v prípade jednej diferenciálnej rovnice, aj v prípade systému diferenciálnych rovníc uvažujeme riešenie

$$(x_1, \dots, x_n)^T: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

na maximálne veľkom intervale.

Príklad 3.1

Riešme systém diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_2 \\ x'_2 &= x_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Riešenie. Systém budeme riešiť jeho nahradením obyčajnou diferenciálnou rovnicou druhého rádu. Derivovaním prvej rovnice dostaneme vzťah

$$x''_1 = -x'_2 = -x_1$$

Teda sme dostali obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre neznámu funkciu x_1 :

$$x''_1 + x_1 = 0$$

ktorej všeobecné riešenie je

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Z druhej rovnice systému dostaneme funkciu x_2 v tvare

$$x_2(t) = x'_1(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

Teda množina všetkých riešení systému rovníc (1.3) má tvar

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

kde c_1, c_2 sú ľubovoľné konštanty.

Definícia 3.1

Množina všetkých riešení $(x_1, \dots, x_n)^T$ systému diferenciálnych rovníc (1.1) sa nazýva *všeobecné riešenie*.

Všeobecné riešenie SDR (1.1) môže byť často vyjadrené v tvare

$$x_i(t) = \varphi_i(t, c_1, \dots, c_n), \quad i = 1, \dots, n$$

ako to vidieť aj z predchádzajúceho príkladu.

Dalej zavedieme začiatočnú úlohu pre SDR rovnakým spôsobom ako v prípade obyčajných diferenciálnych rovníc.

Definícia 3.2.

Nech $f_i: (a,b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$; sú spojité funkcie. *Začiatočnou úlohou* pre SDR je úloha nájsť riešenie $(x_1, \dots, x_n)^T$ systému diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

spĺňajúce *začiatočné podmienky*

$$x_i(\tau) = \xi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

kde

$$\tau \in (a,b), \quad (\xi_1, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

Príklad 3.2

Riešme začiatočnú úlohu

$$x_1' = -x_2, \quad x_2' = x_1 \quad (1.6)$$

$$x_1(0) = -1, \quad x_2(0) = 2 \quad (1.7)$$

Riešenie. Všeobecné riešenie systému (1.6) sme našli v príklade 3.1 v tvare

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

$$x_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Vzhľadom na začiatočné podmienky (1.6) dostaneme vzťahy:

$$x_1(0) = c_1 = -1, \quad x_2(0) = c_2 = 2$$

a teda riešenie začiatočnej úlohy (1.6), (1.7) má tvar

$$x_1(t) = -\cos t + 2 \sin t$$

$$x_2(t) = -\sin t + 2 \cos t.$$

Platí nasledujúca veta o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatočnej úlohy (1.4), (1.5), ktorá je analógiou podobného výsledku v prípade obyčajnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu. Dôkaz vety presahuje rámec tohto textu a možno ho nájsť za všeobecnejších predpokladov v učebniciach [BH], [MMS].

Veta 3.1

Nech $\tau \in (a,b)$, $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Ak funkcie $f_i: (a,b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ sú spojité a majú ohraničené parciálne derivácie $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ na každej množine $\langle \alpha, \beta \rangle \times \mathbb{R}^n$, $a < \alpha < \beta < b$, tak existuje jediné riešenie $(x_1, \dots, x_n)^T: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ začiatočnej úlohy (1.4), (1.5).

Poznámka 3.1

Veta o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatočnej úlohy pre systém diferenciálnych rovníc je analógiou vety 2.1. o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatočnej úlohy pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu n -tého rádu. Začiatočná úloha

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

$$x(\tau) = \xi_0, \quad x'(\tau) = \xi_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1}$$

môže byť vyjadrená ako začiatočná úloha pre systém n obyčajných diferenciálnych rovníc 1. rádu tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) ; \\ x_i(\tau) &= \xi_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Veta 2.1. je potom dôsledkom vety 3.1.

3.2 LINEÁRNE HOMOGÉNNE SYSTÉMY DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

V tejto časti budeme používať podobné metódy ako v časti 2.2, v ktorej sme sa zaoberali lineárnymi homogénnymi diferenciálnymi rovnicami n -teho rádu. Nech je daný systém diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ \dot{x}'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde $a_{ij}:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie. Daný systém nazývame *lineárnym homogénnym systémom diferenciálnych rovníc* - LHSDR.

System (2.1) môže byť vyjadrený vo vektorovom tvare

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (2.2)$$

kde

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$$

Je (stĺpcový) vektor neznámych funkcií x_1, \dots, x_n .

$$\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$$

je vektor ich derivácií a

$$\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$$

Je pre každé $t \in (a,b)$ štvorcová matica koeficientov systému.

Odvodíme podobnú štruktúru všeobecného riešenia systému (2.1) alebo (2.2) ako v prípade lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc n -tého rádu. Systém (2.1) alebo rovnica (2.2) môžu byť zapísané v operátorovom tvare

$$Lx = 0, \quad x \in X \quad (2.3)$$

kde $X = [C^1(a,b)]^n$ je lineárny priestor všetkých n -tíc spojitely diferencovateľných reálnych funkcií na intervale (a,b) a $L: X \rightarrow Y$ je lineárny operátor zobrazujúci priestor X do priestoru $Y = [C(a,b)]^n$ všetkých n -tíc spojitých reálnych funkcií definovaných na (a,b) . Operátor L má tvar

$$(Lx)(t) = x'(t) - (A(t)x(t)), \quad t \in (a, b) \quad (2.4)$$

Nasledujúca veta opisuje všeobecné riešenie LHSDR ako podpriestor lineárneho priestoru X .

Veta 3.2

Množina X_0 všetkých riešení LHSDR (2.1) je n -rozmerný podpriestor lineárneho priestoru $X = [C^1(a, b)]^n$.

D ô k a z. Systém (2.1) je ekvivalentný s operátorovou rovnicou

3.2 LINEÁRNE HOMOGÉNNE SYSTÉMY DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

V tejto časti budeme používať podobné metódy ako v časti 2.2, v ktorej sme sa zaoberali lineárnymi homogénnymi diferenciálnymi rovnicami n -teho rádu. Nech je daný systém diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ \dot{x}_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde $a_{ij} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité funkcie. Daný systém nazývame *lineárnym homogénnym systémom diferenciálnych rovníc* - LHSDR.

Systém (2.1) môže byť vyjadrený vo vektorovom tvare

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (2.2)$$

kde

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$$

je (stĺpcový) vektor neznámych funkcií x_1, \dots, x_n ,

$$\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_p)^T$$

je vektor ich derivácií a

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$$

je pre každé $t \in (a,b)$ štvorcová matica koeficientov systému.

Odvodíme podobnú štruktúru všeobecného riešenia systému (2.1) alebo (2.2) ako v prípade lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc n -tého rádu. Systém (2.1) alebo rovnica (2.2) môžu byť zapísané v operátorovom tvare

$$Lx = 0, \quad x \in X \quad (2.3)$$

kde $X = [C^1(a,b)]^n$ je lineárny priestor všetkých n -tíc spojitých diferencovateľných reálnych funkcií na intervale (a,b) a $L: X \rightarrow Y$ je lineárny operátor zobrazujúci priestor X do priestoru $Y = [C(a,b)]^n$ všetkých n -tíc spojitých reálnych funkcií definovaných na (a,b) . Operátor L má tvar

$$(Lx)(t) = x'(t) - (A(t)x(t)), \quad t \in (a, b) \quad (2.4)$$

Nasledujúca veta opisuje všeobecné riešenie LHSDR ako podpriestor lineárneho priestoru X .

Veta 3.2

Množina X_0 všetkých riešení LHSDR (2.1) je n -rozmerný podpriestor lineárneho priestoru $X = [C^1(a,b)]^n$.

D ô k a z. Systém (2.1) je ekvivalentný s operátorovou rovnicou

$Lx = 0$, a teda množinu X_0 môžeme vyjadriť ako jadro lineárneho operátora L , t.j.

$$X_0 = \ker L$$

a podľa známej vlastnosti z lineárnej algebry ([6]) je X_0 lineárny podpriestor priestoru X . Aby sme mohli určiť dimenziu priestoru X_0 nájdeme jeho bázu.

Definujme vektorové funkcie $\mathbf{x}_i \in X_0$, $i = 1, \dots, n$; ako jednoznačne na základe vety 3.1) určené riešenia začiatočných úloh

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{e}_i \quad (2.6)$$

kde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

sú jednotkové bázové vektory lineárneho priestoru \mathbb{R}^n .

Na základe vety 3.1 o existencii a jednoznačnosti riešenia začiatočnej úlohy pre systém diferenciálnych rovníc môže byť rovnakým spôsobom ako vo vete 2.2 dokázané, že funkcie x_1, \dots, x_n sú lineárne nezávislé a tvoria bázu priestoru X_0 . Všeobecné riešenie systému (2.5) môže byť vyjadrené v tvare

$$x(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t), \quad t \in (a, b) \quad (2.7)$$

Podobne ako v prípade lineárnych diferenciálnych rovníc n -tého rádu, aj v prípade lineárnych homogénnych systémov je možné explicitne určiť bázu len v prípade systémov s konštantnými koeficientami

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.8)$$

System (2.8) môže byť vyjadrený vo vektorovom tvare

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.9)$$

kde

[illegible]

V prípade $n = 1$, dostaneme lineárnu homogénnu diferenciálnu rovnicu

$$x' = ax$$

ktorej všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c e^{at}, c, t \in \mathbb{R}$$

Riešenie systému (2.8), alebo (2.9) hľadáme v tvare

$$x(t) = b e^{\lambda t}$$

kde $b \in \mathbb{C}^n$ je neznáma n -tica komplexných čísel a λ je neznámy komplexný exponent.

Príklad 3.3

Nájdime všeobecné riešenie systému

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 4x_1 + 3x_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Riešenie. Z Vety 3.2 vyplýva, že stačí nájsť dve lineárne nezávislé riešenia LHSDR (2.11). Hľadáme ich v tvare

$$x(t) = b e^{\lambda t}$$

alebo

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

Dosadením do (2.11) dostaneme rovnice

$$b_1 \lambda e^{\lambda t} = (b_1 + 2b_2) e^{\lambda t}$$

$$b_2 \lambda e^{\lambda t} = (4b_1 + 3b_2) e^{\lambda t}$$

Po úprave máme systém lineárnych homogénnych algebrických rovníc s neznámym parametrom λ na výpočet vektora b :

$$\begin{aligned} (1-\lambda)b_1 + 2b_2 &= 0 \\ 4b_1 + (3-\lambda)b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Vektor $b = 0$ je riešením tohto systému pri ľubovoľnej hodnote parametra λ . Aby mal systém aj nenulové riešenie, musí byť jeho determinant nulový. Teda riešime rovnicu pre neznámy parameter λ :

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 2 \\ 4 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

ktorá má dve riešenia $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. K týmto dvom číslam nájdeme príslušné nenulové riešenia systému (2.12).

Pre $\lambda_1 = -1$ máme systém

$$2b_1 + 2b_2 = 0$$

$$4b_1 + 4b_2 = 0$$

ktorého nenulovým riešením je vektor $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nenulové riešenie LHSDR (2.11) má potom tvar

$$x_1(t) = b_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Ďalšie lineárne nezávislé riešenie odpovedá exponentu $\lambda_2 = 5$. Dosadením tejto hodnoty za λ do systému (2.12) dostaneme systém

$$-4b_1 + 2b_2 = 0$$

$$4b_1 - 2b_2 = 0$$

ktorého nenulovým riešením je vektor $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Príslušným riešením LHSDR (2.11) je potom vektorová funkcia

$$x_2(t) = b_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Ako vyplynie z textu nasledujúceho za týmto príkladom, sú vypočítané funkcie x_1 , x_2 lineárne nezávislé a tvoria bázu priestoru všetkých riešení LHSDR (2.12). Všeobecné riešenie má potom tvar

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix}$$

alebo jednotlivých funkciách

$$x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$$

$$x_2(t) = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t}$$

Metódu z predchádzajúceho príkladu môžeme použiť aj na všeobecný prípad lineárneho homogénneho systému n rovníc. Zavedieme si najprv niektoré dôležité pojmy z lineárnej algebry.

Definícia 3.1

Ak A je štvorcová matica rádu n , I je jednotková matica, $\lambda \in \mathbb{C}$, tak tak determinant $\det(A - \lambda I)$ sa nazýva *charakteristický determinant* a algebrická rovnica

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

charakteristická rovnica matice A .

Korene $\lambda \in \mathbb{C}$ charakteristickej rovnice matice A sa nazývajú *vlastné hodnoty* matice A .

Ak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastná hodnota matice A , tak nenulové riešenie $b \in \mathbb{C}^n$ rovnice (systému)

$$(A - \lambda I)b = 0$$

sa nazýva *vlastný vektor* matice A patriaci k číslu λ .

Charakteristický determinant matice rádu n je polynóm n -tého stupňa, ktorý má najviac n (komplexných) koreňov - vlastných hodnôt. Nasledujúca veta zovšeobecňuje metódu použitú pri riešení LHSDR z príkladu 3.3 na prípad systému n rovníc, ktorého matica má n rôznych vlastných hodnôt.

Veta 3.3

Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ je n vzájomne rôznych vlastných hodnôt matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ a b_1, \dots, b_n sú im zodpovedajúce vlastné vektory. Potom

$$\mathfrak{B} = \{b_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, b_n e^{\lambda_n t}\} \quad (2.13)$$

tvoria bázu priestoru X_0 všetkých riešení LHSDR

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.14)$$

a jeho všeobecné riešenie má tvar

$$x(t) = c_1 b_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n b_n e^{\lambda_n t} \quad (2.15)$$

D ô k a z. Podľa známych výsledkov z lineárnej algebry ([6]) zodpovedá v tomto prípade každej vlastnej hodnote λ_i práve jeden lineárne nezávislý vlastný vektor b_i , $i = 1, \dots, n$, pričom vlastné vektory b_1, \dots, b_n sú lineárne nezávislé. Potom aj vektory $b_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, b_n e^{\lambda_n t}$ sú lineárne nezávislé pre každé $t \in \mathbb{R}$ a teda aj funkcie $x_i(t) = b_i e^{\lambda_i t}$, $t \in \mathbb{R}$ sú lineárne nezávislé. Každá funkcia x_i je riešením LHS DR vo vektorovom tvare

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

čo vyplýva zo vzťahov

$$x'_i(t) = b_i \lambda_i e^{\lambda_i t} = I b_i \lambda_i e^{\lambda_i t} = A b_i e^{\lambda_i t} = A x(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Pretože funkcie x_1, \dots, x_n sú lineárne nezávislé, tvoria podľa vety 3.2 bázu priestoru X_0 všetkých riešení systému (2.14), čím je dôkaz vety 3.3 skončený.

Poznámka 3.2

Ak sú všetky vlastné hodnoty z predchádzajúcej vety reálne, tak aj im prislúchajúce vlastné vektory majú reálne zložky a bázové funkcie $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ tvoria bázu priestoru reálnych riešení HLSDR (2.14). Ak sú niektoré vlastné hodnoty komplexné, tak uvedené funkcie tvoria bázu priestoru komplexných riešení systému (2.14).

Príklad 3.4

Nájďme všeobecné riešenie systému lineárnych diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Veta 3.3
Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ je n vzájomne rôznych vlastných hodnôt matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ a b_1, \dots, b_n sú ľub. zodpovedajúce vlastné vektory. Potom

$$\mathfrak{B} = \{b_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, b_n e^{\lambda_n t}\} \quad (2.13)$$

tvoria bázu priestoru X_0 všetkých riešení LHSDR

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (2.14)$$

a jeho všeobecné riešenie má tvar

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{b}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \mathbf{b}_n e^{\lambda_n t} \quad (2.15)$$

D ô k a z. Podľa známych výsledkov z lineárnej algebry ([6]) zodpovedá v tomto prípade každej vlastnej hodnote λ_i práve jeden lineárne nezávislý vlastný vektor b_i , $i = 1, \dots, n$, pričom vlastné vektory b_1, \dots, b_n sú lineárne nezávislé. Potom aj vektory $b_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, b_n e^{\lambda_n t}$ sú lineárne nezávislé pre každé $t \in \mathbb{R}$ a teda aj funkcie $x_i(t) = b_i e^{\lambda_i t}$, $t \in \mathbb{R}$ sú lineárne nezávislé. Každá funkcia x_i je riešením LHSDR vo vektorovom tvare

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

čo vyplýva zo vzťahov

$$\mathbf{x}'_1(t) = \mathbf{b}_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = \mathbf{I} \mathbf{b}_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} = \mathbf{A} \mathbf{b}_1 e^{\lambda_1 t} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Pretože funkcie x_1, \dots, x_n sú lineárne nezávislé, tvoria podľa vety 3.2 bázu priestoru X_0 všetkých riešení systému (2.14), čím je dôkaz vety 3.3 skončený.

Poznámka 3.2

Ak sú všetky vlastné hodnoty z predchádzajúcej vety reálne, tak aj im prislúchajúce vlastné vektory majú reálne zložky a bázové funkcie x_1, \dots, x_n tvoria bázu priestoru reálnych riešení HLSDR (2.14). Ak sú niektoré vlastné hodnoty komplexné, tak uvedené funkcie tvoria bázu priestoru komplexných riešení systému (2.14).

Príklad 3.4

Nájďme všeobecné riešenie systému lineárnych diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2' &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' &= x_1 - x_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

R i e š e n í e. Charakteristická rovnica matice systému má tvar

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

Jej koreňmi sú vlastné hodnoty $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$.

Vlastnej hodnote λ_1 zodpovedá vlastný vektor b_1 , ktorý určíme po vyriešení systému algebrických rovníc

$$\begin{array}{rcl} 2b_1 - 2b_2 - b_3 & = & 0 \\ -b_1 + 2b_2 + b_3 & = & 0 \\ & b_1 & = 0 \end{array}$$

Prvé dve rovnice systému sú lineárne závislé. Ak zvolíme hodnotu $b_2 = 1$, tak dostaneme $b_3 = -2$ a vlastný vektor

$$\mathbf{b}_1 = (0, 1, -2)^T$$

Rovnakým spôsobom nájdeme vlastné vektory $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ zodpovedajúce vlastným hodnotám $\lambda_2 = 0$, resp. $\lambda_3 = 2$. Sú to vektory

$$\mathbf{b}_2 = (1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{b}_3 = (3, -2, 1)^T$$

Báza priestoru X_0 všetkých riešení LHSDR (2.16) je potom tvorená vektorovými funkciami

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{b}_1 e^{-t} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}_2 e^{0t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3(t) = \mathbf{b}_3 e^{2t} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Všeobecné riešenie systému (2.16) má potom tvar

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) + c_3 \mathbf{x}_3(t)$$

alebo

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_2 + 3c_3 e^{2t} \\x_2(t) &= c_1 e^{-t} - 2c_3 e^{2t} \\x_3(t) &= -2c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 e^{2t}, t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Doteraz sme riešili LHS DR za predpokladu jednoduchých koreňov charakteristickej rovnice, ku ktorým sme našli práve n lineárne nezávislých vlastných vektorov a bázu priestoru X_0 riešení príslušného LHS DR. V prípade viacnásobných vlastných koreňov môžeme dostať menej ako n vlastných vektorov a teda aj menej ako n lineárne nezávislých riešení. Teraz si ukážeme akým spôsobom dostaneme ostatné lineárne nezávislé riešenia, ktoré spolu s predchádzajúcimi vytvoria bázu priestoru X_0 .

Predpokladajme, že číslo λ_1 je dvojnásobným koreňom charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$ t.j. dvojnásobnou vlastnou hodnotou matice A systému diferenciálnych rovníc

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.17)$$

Môžu nastať dva prípady v závislosti od hodnoty matice $\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}$.

Ak $\text{hod}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = n-2$, tak $\dim \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 2$, a teda existujú dva lineárne nezávislé vlastné vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ patriace k vlastnej hodnote λ_1 , ku ktorým priradíme dve lineárne nezávislé riešenia

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{b}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}_2 e^{\lambda_1 t}$$

systému diferenciálnych rovníc (2.17).

Ak $\text{hod}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = n-1$, tak $\dim \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 1$, a teda k vlastnej hodnote λ_1 existuje práve jeden lineárne nezávislý vlastný vektor \mathbf{b}_1 . Rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch, dostaneme jedno riešenie systému (2.17) v tvare

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{b}_1 e^{\lambda_1 t}$$

Na získanie ďalšieho lineárne nezávislého riešenia určíme tzv. *zovšeobecnený vlastný vektor* \mathbf{b}_2 , ktorý je riešením systému algebrických rovníc (v maticovom tvare)

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1$$

Hľadané riešenie má tvar

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2) e^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Príklad 3.5

Riešme začiatočnú úlohu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1 &= -4\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1(0) = 1 \\ \mathbf{x}'_2 &= \mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Riešenie. Najprv nájdeme všeobecné riešenie LHSR z úlohy (2.18). Charakteristická rovnica systému má tvar

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0$$

Teda $\lambda_1 = -3$ je dvojnásobná vlastná hodnota. Príslušný vlastný vektor $\mathbf{b}_1 = (1, -1)^T$ je riešením systému rovníc

$$\begin{aligned} -b_1 - b_2 &= 0 \\ b_1 + b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Príslušné riešenie LHSR má potom tvar

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{b}_1 e^{-3t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Vzhľadom na to, že k vlastnej hodnote λ_1 neexistuje ďalší vlastný vektor lineárne nezávislý s vektorom \mathbf{b}_1 , nájdeme zovšeobecnený vlastný vektor \mathbf{b}_2 lineárne nezávislý s \mathbf{b}_1 . Riešme nehomogénny lineárny algebrický

systém

$$\begin{aligned} -b_1 - b_2 &= 1 \\ b_1 + b_2 &= -1 \end{aligned}$$

Na pravej strane tohto systému vystupuje vlastný vektor \mathbf{b}_1 . Jedno z riešení systému je zovšeobecnený vlastný vektor

$$\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Druhá bazová funkcia má potom tvar

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2) e^{-3t} = \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} t e^{-3t} \\ -(t+1) e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Všeobecné riešenie daného LHSR je

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t)$$

a po zložkách

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (c_1 + c_2 t) e^{-3t} \\ x_2(t) &= (-c_1 - c_2 - c_2 t) e^{-3t} \end{aligned}$$

Aby boli splnené začiatkové podmienky, riešime systém rovníc

$$\begin{aligned} x_1(0) &= c_1 = 1 \\ x_2(0) &= -c_1 - c_2 = 0 \end{aligned}$$

Dostávame $c_1 = 1, c_2 = -1$. Riešením začiatkovej úlohy (2.18) je potom dvojica funkcií

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (1-t) e^{-3t} \\ x_2(t) &= t e^{-3t} \end{aligned}$$

Ak vlastná hodnota λ matice \mathbf{A} má násobnosť k , pričom $\text{hod}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = n-j, 1 \leq j \leq n$ tak existuje j reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov patriacich k λ . Vektory $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ tvoria reťazec práve vtedy, ak platia vzťahy

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{b}_1 &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_1 \neq \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_1 \\ &\dots \dots \dots \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{b}_m &= \mathbf{b}_{m-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Vidíme, že prvý člen reťazca je vlastný vektor patriaci k vlastnej hodnote λ . Počet reťazcov je totožný s maximálnym počtom lineárne nezávislých vlastných vektorov patriacich k λ .

Pomocou reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov určujeme bázu priestoru všetkých riešení LHSR s konštantnými koeficientmi v prípade

viacnásobných vlastných hodnôt.

Veta 3.4.

Nech b_1, \dots, b_m je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov patriacich k vlastnej hodnote λ matice A . Potom vektorové funkcie

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b_1 e^{\lambda t} \\ x_2(t) &= (b_1 t + b_2) e^{\lambda t} \\ &\dots \\ x_m(t) &= \left(b_1 \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + \dots + b_{m-1} t + b_m \right) e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.20)$$

sú lineárne nezávislé riešenia LHSR $x' = Ax$.

Dôkaz vety je náročnejší a čitateľ ho môže nájsť v knihe [16].

Poznámka 3.3.

Ak λ je k -násobná vlastná hodnota matice A a

$$\text{hod}(A - \lambda I) = n - s$$

t.j. $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = s$, $1 \leq s \leq k$, tak existuje s reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov patriacich k λ (vlastný vektor považujeme pritom aj za zovšeobecnený). Príslušné zovšeobecnené vlastné vektory nemôžeme voliť ľubovoľne, ale tak aby nehomogénne systémy lineárnych algebrických rovníc v (2.19) mali riešenie. Podľa Frobeniovej vety z lineárnej algebry ([6]) to nastáva práve vtedy keď hodnota matice $A - \lambda I$ je rovná hodnosti matice rozšírenej o zovšeobecnený vlastný vektor b_i , $i = 1, \dots, m-1$. Funkcie tvaru (2.20) vytvorené pomocou reťazcov maximálne možných dĺžok ku všetkým vlastným hodnotám tvoria bázu priestoru X_0 všetkých riešení LHSR s konštantnými koeficientmi.

Príklad 3.6

Nájdime všeobecné riešenie HSLDR

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' &= 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_3' &= -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Riešenie. Charakteristická rovnica matice A systému (2.21) má tvar

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^3 = 0$$

a teda má jeden trojnásobný koreň - vlastnú hodnotu $\lambda_1 = 1$. Vlastné vektory určíme zo systému rovníc $(A - \lambda I)b = 0$, t.j.

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 - b_3 &= 0 \\ 2b_1 - 2b_2 - 2b_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$-b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

Matrica tohto systému má hodnotu rovnú jednej, a teda priestor vlastných vektorov je dvojrozmerný, pričom každý vlastný vektor má tvar

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_1 - \beta_2)^T \quad (2.22)$$

Aby sme mohli určiť bázu množiny všetkých riešení LHSR (2.20), musíme nájsť dva lineárne nezávislé vlastné vektory b_1, b_2 a jeden zovšeobecnený vlastný vektor b_3 lineárne nezávislý s vektormi b_1, b_2 . Súradnice vektora b_3 určíme po vyriešení nehomogénneho systému lineárnych algebrických rovníc

$$(A - \lambda I)b_3 = b_2$$

príčom vektor b_2 vyjadríme v tvare (2.22). Dostávame tak systém rovníc

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 - b_3 &= \beta_1 \\ 2b_1 - 2b_2 - 2b_3 &= \beta_2 \\ -b_1 + b_2 + b_3 &= \beta_1 - \beta_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Daný systém má riešenie, ak $\beta_2 = 2\beta_1$, pretože v tom prípade je hodnota matice systému rovná hodnosti matice rozšírenej. Ak položíme $\beta_1 = 1$, dostaneme $\beta_2 = 2$, $\beta_1 - \beta_2 = -1$ a teda vlastný vektor

$$b_2 = (1, 2, -1)^T$$

Súradnice zovšeobecneného vlastného vektora b_3 dostaneme zo systému (2.23) po dosadení vektora b_2 do pravej strany. Riešením systému je potom napr. vektor

$$b_3 = (1, 0, 0)^T$$

Vlastný vektor b_1 lineárne nezávislý s b_2, b_3 je podľa (2.22) napríklad

$$b_1 = (1, 0, 1)^T$$

K vlastným vektorom b_1 dostaneme bazové funkcie

$$x_1(t) = b_1 e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

resp.

$$x_2(t) = b_2 e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \\ -e^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

K vlastnému vektoru b_2 a zovšeobecnenému vlastnému vektoru b_3 priradíme bazovú funkciu

$$x_3(t) = (b_2 t + b_3) e^t = \begin{pmatrix} (t+1)e^t \\ 2t e^t \\ -t e^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Všeobecné riešenie LHSR (3.23) má tvar

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

V prípade komplexných vlastných hodnôt matice A by sme predchádzajúcimi postupmi získali komplexné riešenia LHS DR $x' = Ax$. Reálne bázové riešenia získame podobným spôsobom ako v prípade lineárnej diferenciálnej rovnice n -tého rádu s konštantnými koeficientmi. Hovorí o tom nasledujúca veta, v ktorej predpokladáme jednoduché vlastné hodnoty. V prípade viacnásobných vlastných hodnôt postupujeme analogicky.

Veta 3.5

Nech matica A má jednoduché vlastné hodnoty

$$\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \dots, \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k - i\beta_k, \lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n,$$

kde

$$\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k, \lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}; \beta_1, \dots, \beta_k \neq 0.$$

Ak $b_1, \dots, b_k, b_{2k+1}, \dots, b_n$ sú vlastné vektory patriace k vlastným hodnotám $\alpha_1 + i\beta_1, \dots, \alpha_k + i\beta_k, \lambda_{2k+1}, \dots, \lambda_n$, tak vektorové funkcie

$$\mathfrak{B} = \{ \operatorname{Re}[b_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t}], \operatorname{Im}[b_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t}], \dots, \\ \operatorname{Re}[b_k e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}], \operatorname{Im}[b_k e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}], \dots, b_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1}t}, \dots, b_n e^{\lambda_n t} \}$$

tvoria bázu priestoru všetkých reálnych riešení LHS DR $x' = Ax$.

Dôkaz. Pretože matica A je reálna, existujú vlastné vektory b_1^*, \dots, b_k^* patriace k vlastným hodnotám $\alpha_1 - i\beta_1, \dots, \alpha_k - i\beta_k$, ktoré sú komplexne združené k vlastným vektorom b_1, \dots, b_k . Podľa vety 3.4. tvoria vektorové funkcie

$$\{ y_1(t) = b_1 e^{(\alpha_1 + i\beta_1)t}, y_2(t) = b_1^* e^{(\alpha_1 - i\beta_1)t}, \dots \\ y_{2k-1}(t) = b_k e^{(\alpha_k + i\beta_k)t}, y_{2k}(t) = b_k^* e^{(\alpha_k - i\beta_k)t}, \dots \\ x_{2k+1}(t) = b_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1}t}, \dots, x_n(t) = b_n e^{\lambda_n t} \}$$

bázu priestoru X_0 všetkých riešení LHS DR $x' = Ax$. Funkcie

$$x_{2j-1}(t) = \operatorname{Re} y_{2j-1}(t) = \frac{1}{2} [y_{2j-1}(t) + y_{2j}(t)], \\ x_{2j}(t) = \operatorname{Im} y_{2j-1}(t) = \frac{1}{2i} [y_{2j-1}(t) - y_{2j}(t)], j = 1, \dots, k;$$

sú lineárnymi kombináciami funkcií y_1, \dots, y_{2k} , a teda spolu s funkciami $x_{2k+1}(t), \dots, x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$; tvoria bázu priestoru X_0 , a teda aj priestoru všetkých reálnych riešení LHS DR $x' = Ax$.

Príklad 3.7

Nájďme všeobecné riešenie LHS DR

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2' &= -x_1 \\ x_3' &= x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Riešenie. Charakteristická rovnica matice systému má tvar

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(1 - \lambda) = 0$$

Vlastné hodnoty potom sú

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$$

Vlastnej hodnote λ_1 zodpovedá vlastný vektor b_1 , ktorého súradnice sú riešením systému

$$\begin{aligned} (2-1)b_1 + b_2 - 2b_3 &= 0 \\ -b_1 - 1b_2 &= 0 \\ b_1 + b_2 - (1+i)b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ak položíme $b_1 = 1$, dostaneme z druhej rovnice $b_2 = 1$ a z ďalšej rovnice $b_3 = 1$. Komplexná vektorová bázová funkcia má tvar

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix}$$

Z funkcie y získame dve reálne bázové funkcie

$$x_1(t) = \operatorname{Re} y(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

a

$$x_2(t) = \operatorname{Im} y(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

K reálnej vlastnej hodnote $\lambda_3 = 1$ dostaneme vlastný vektor

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a bázovú funkciu

$$x_3(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poznámka 3.4

V prípade viacnásobných komplexných koreňov získame komplexné bázové funkcie pomocou reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov a reálnu bázu získame ako reálne a imaginárne časti komplexných riešení zodpovedajúcich jednej z dvojice komplexne združených vlastných hodnôt.

Ďalej sa budeme zaoberať riešením začiatkovej úlohy