

§2. ELIPTICKÉ ROVNICE

V tomto paragrafe zavedieme pojem eliptického operátora a eliptickej rovnice, ktorá zhrňuje aj parciálne diferenciálne rovnice odvodené v §1.

2.1 Definícia eliptickej rovnice

Ako sme už v úvode spomínali, budeme sa zaoberať len parciálnymi diferenciálnymi rovnicami druhého rádu.

Vo všeobecnosti má parciálna diferenciálna rovnica druhého rádu tvar

$$F(x_1, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}) = 0$$

kde F je funkcia $\frac{m^2 + 5m + 2}{2}$ premenných a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, neznáma funkcia.

Riešením parciálnej diferenciálnej rovnice 2. rádu je každá funkcia $u \in C^2(\Omega)$, ktorá po dosadení do rovnice spolu so svojimi parciálnymi deriváciami spĺňa túto rovnicu v každom bode oblasti Ω . Takto definované riešenie sa nazýva aj klasické.

Ďalej sa budeme zaoberať len rovnicami špeciálneho typu, pre ktoré je vypracovaná dostatočne bohatá teória ich riešenia.

Zobrazenie z jednej triedy funkcií do druhej triedy funkcií budeme nazývať operátor.

Definícia 2.1. Nech $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a $a_{ij} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, m$; sú spojitě diferencovateľné funkcie na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ spĺňajúce vzťahy

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \text{pre každé } x \in \Omega, i, j = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \tau_i \tau_j \geq \alpha |\tau|^2, \quad \alpha > 0 \quad (2.2)$$

pre všetky $x \in \Omega$ a všetky $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m$

Potom operátor $L : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ tvaru

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + q(x)u, \quad u \in C^2(\Omega) \quad (2.3)$$

sa nazýva eliptický operátor na oblasti Ω .

Poznámka 2.1. Eliptický operátor (2.3) je v tzv. divergentnom tvare. V odbornej literatúre sa často vyskytuje v tvare

$$L(u) = - \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + q(x)u \quad (2.3')$$

Tvar (2.3) je výhodnejší z hľadiska ďalšieho použitia a viac zodpovedá fyzikálnym modelom.

Príklad 2.1. $L = -\Delta$, kde $\Delta = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ je Laplaceov¹⁷⁾ operátor. Vidíme,

že $q(x) = 0$, $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, m$; a $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \tau_i \tau_j = \sum_{i=1}^m \tau_i^2 = |\tau|^2$.

Teda $-\Delta$ je eliptický operátor s konštantou $\alpha = 1$.

Príklad 2.2. $L(x) = -\operatorname{div} [k(x) \operatorname{grad} u] + q(x)u$, kde $k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) \geq k_0 > 0$ na Ω , $q \in C(\Omega)$. V tomto prípade $a_{ij}(x) = \delta_{ij} k(x)$, $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \tau_i \tau_j = k(x) |\tau|^2 \geq k_0 |\tau|^2$ a operátor L je eliptický s konštantou $\alpha = k_0$.

Definícia 2.2. Parciálna diferenciálna rovnica tvaru

$$(Lu)(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.4)$$

kde L je eliptický operátor definovaný v (2.3) a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je daná funkcia, sa nazýva eliptická rovnica, alebo parciálna diferenciálna rovnica eliptického typu.

Poznámka 2.2. V dvojrozmernom prípade je eliptická rovnica definovaná aj ako rovnica tvaru

$$a(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0$$

kde koeficienty - funkcie vystupujúce v rovnici spĺňajú nerovnosť

¹⁷⁾ LAPLACE Pierre Simon (1749-1827), francúzsky matematik, fyzik a astronóm. Najvýznamnejšie práce má v diferenciálnych rovniciach a v teórii pravdepodobnosti. Zavedol integrálnu transformáciu nesúcu jeho meno. Rozpracoval metódu chýb a metódu najmenších štvorcov. V algebre dokázal významnú vetu o výpočte determinantov.

$$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0 \text{ pre všetky } (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Ak Ω je ohraničená oblasť, funkcie a, b, c sú diferencovateľné na Ω a spojité na $\bar{\Omega}$, $F(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = (\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}) \frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}) \frac{\partial u}{\partial y} - q(x)u + f(x)$,

potom môže byť uvedená rovnica vyjadrená v tvare

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[a(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[b(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + q(x)u(x) = f(x), x \in \Omega$$

Ak funkcie a (a teda aj c) je kladná, potom je rovnica eliptická aj v zmysle definície 2.2.

Príklad 2.3. Rovnica $\Delta u = 0$ sa nazýva Laplaceova rovnica a jej riešenia sa nazývajú harmonické funkcie. Môžu vyjadrovať rozdelenie teploty v homogénnom telese v prípade stacionárneho vedenia tepla za neprítomnosti tepelných žriediel v telese. Vyjadrujú aj potenciál rýchlosti prúdenia kvapaliny bez žriediel, alebo potenciál elektrostatičného poľa stacionárneho prúdu za neprítomnosti náboja.

Príklad 2.4. Rovnica $-\Delta u = f(x)$, $f \neq 0$, sa nazýva Poissonova¹⁸⁾ rovnica. Jej riešenie u vyjadruje napríklad rozdelenie teploty v homogénnom telese pri stacionárnom vedení tepla, pričom $f = \frac{F}{k}$, kde F je hustota tepelných žriediel a k koeficient tepelnej vodivosti. V dvojrozmernom prípade môže riešenie vyjadrovať veľkosť ohybu membrány pod vplyvom sily a hustotou $F = fT$, kde T je tuhosť membrány. Ak $f = -4\pi\rho$, kde ρ je funkcia objemovej hustoty náboja, potom funkcia u vyjadruje veľkosť elektrostatičného potenciálu.

Príklad 2.5. Rovnica $-\Delta u - k^2u = f(x)$ sa nazýva Helmholtzova¹⁹⁾ rovnica.

Ak $k = \frac{\omega}{a}$, potom jej riešenie vyjadruje amplitúdu $u(x)$ periodického pohybu $u(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$ vzbudeného vonkajšou silou tvaru $f(x,t) = e^{i\omega t}f(x)$.

Príklad 2.6. Rovnica $-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\psi + V(x)\psi = E\psi$ sa nazýva (stacionárna) Schrödingerova²⁰⁾ rovnica. Jej riešenie vyjadruje amplitúdu $\psi(x)$ vlnovej

¹⁸⁾ POISSON Simeon Denis (1781-1840), francúzsky matematik a fyzik, jeden zo zakladateľov matematickej fyziky. Rozpracoval teóriu Fourierových radov, neurčitých integrálov. Sformuloval mnohé základné pojmy a vety teórie pravdepodobnosti, predložil jedno z najdôležitejších rozdelení náhodných premenných. Rozpracoval matematickú teóriu elektrostatiky.

¹⁹⁾ HELMHOLTZ Hermann Ludwig Ferdinand (1821-1894), nemecký matematik a fyzik, fyziológ. Základné práce venoval mechanike, termodynamike a geometrii. Dokázal použitie princípu najmenšieho účinku v tepelných, optických a elektromagnetických javoch. Skúmanie procesov kmitania ho priviedlo k odvodeniu Helmholtzovej rovnice.

funkcie $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$, pričom m_0 je hmotnosť kvantovej častice pohybujúcej sa v silovom poli potenciálu $V(x)$, E je energia častice a $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ je Planckova²¹⁾ konštanta.

2.2 Laplaceov operátor po transformácii súradníc

Videli sme, že dôležitú triedu tvoria eliptické rovnice a Laplaceovým operátorom. Pri riešení uvedených rovníc je často výhodnejšie používať iné súradnice ako karteziánske. Voľba týchto súradníc pritom závisí od tvaru oblasti Ω .

Nech je daná regulárna transformácia súradníc

$$\xi_i = \xi_i(x_1, \dots, x_m), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.5)$$

Predpokladáme, že funkcie ξ_i , $i = 1, \dots, m$ sú dvakrát spojitely diferencovateľné na oblasti Ω a vzhľadom na regulárnosť transformácie je

$$\det \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^m \neq 0 \text{ takmer všade na } \Omega.$$

Označme $\hat{u}(\xi) = u(x(\xi))$, $\xi \in \hat{\Omega}$, kde $\hat{\Omega}$ je obraz oblasti Ω pri transformácii (2.5). Na základe vzťahu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i^2}, \quad i=1, \dots, m \quad (2.6)$$

dostaneme transformáciu Laplaceovho operátora v tvare

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{j,k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi_j \partial \xi_k} + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_j} = \hat{\Delta} \hat{u}$$

Dôležité sú najmä transformácie Laplaceovho operátora pomocou polárnych, cylindrických a sférických súradníc.

²⁰⁾ SCHRÖDINGER Erwin (1887-1961), rakusky teoretický fyzik. Rozvinul vlnovú koncepciu mechaniky, základom ktorej je po ňom pomenovaná rovnica. Dokázal ekvivalenciu vlnovej a kvantovej mechaniky. Ukázal, že vlnová mechanika je zovšeobecnením klasickej mechaniky.

²¹⁾ PLANCK Max Ernst Ludwig (1858-1947), nemecký fyzik. Najvýznamnejšie výsledky dosiahol vo výskume tepelného žiarenia, kde ako prvý objavil jeho kvantový charakter a stál tak pri zdroje kvantovej fyziky. V roku 1918 dostal Nobelovu cenu.

a) Polárne súradnice (r, φ) , $0 < r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}, & \text{ak } y > 0 \\ \operatorname{arccotg} \frac{x}{y} + \pi, & \text{ak } y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi$$

$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \varphi}{r}, \quad \Delta \varphi = 0$$

$$\hat{\Delta} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Delta r \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \Delta \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

a teda

$$\hat{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2.8)$$

b) Cylindrické súradnice (r, φ, z)

$$0 < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}, & \text{ak } y > 0 \\ \operatorname{arccotg} \frac{x}{y} + \pi, & \text{ak } y < 0 \end{cases}$$

Podobne ako predtým dostaneme vyjadrenie

$$\hat{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.9)$$

c) Sférické súradnice (r, φ, ϑ)

$$0 < r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \vartheta < \pi$$

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}, & \text{ak } y > 0 \\ \operatorname{arccotg} \frac{x}{y} + \pi, & \text{ak } y < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

V ďalšom texte budeme aj pre transformovaný Laplaceov operátor používať označenie Δ .

2.4 Okrajové úlohy

Podobne ako v prípade obyčajných diferenciálnych rovníc aj perciálna rovnica môže mať nekonečne veľa riešení. Napríklad ľubovoľný polynóm P prvého stupňa

$$P(x) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_m x_m, \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \dots, m;$$

je riešením rovnice

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad x \in \Omega$$

Jednoznačnosť môže byť zabezpečená, ak od riešenia žiadame, aby plnilo určité podmienky na hranici oblasti Ω . Tieto podmienky majú v konkrétnych úlohách aj príslušné fyzikálne interpretácie.

Definícia 2.3. Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ je lipschitzovská oblasť, $\bar{n} = \bar{n}(s) = (n_1(s), \dots, n_m(s))$, $s \in \partial\Omega$; je jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici $\partial\Omega$, $\alpha, \beta: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sú nezáporné funkcie s také, že $\alpha(s) + \beta(s) > 0$ pre všetky $s \in \partial\Omega$.

Okrajovú úlohu nazývame úlohu nájsť funkciu $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá je riešením eliptickej rovnice

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.11)$$

a spĺňa okrajovú podmienku

$$\alpha(s) \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(s) \frac{\partial u}{\partial x_i}(s) n_j(s) + \beta(s) u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \quad (2.12)$$

na hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω .

Okrajovú podmienku na hranici $\partial\Omega$ môžeme skráteno vyjadriť v tvare

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s) u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega, \quad (2.12')$$

keď sme označili

$$\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(s) \frac{\partial u}{\partial x_i}(s) n_j(s), \quad s \in \partial\Omega \quad (2.13)$$

tzv. deriváciu podľa zovšeobecnenej normály n_A patriacej k eliptickému operátoru

$$A = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}), \quad x \in \Omega \quad (2.14)$$

ktorý sa nazýva aj hlavná časť eliptického operátora L .

V aplikáciách vystupujú najčastejšie eliptické operátory s hlavnou časťou

$$A = -\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}), \quad k(x) \geq k_0 > 0, \quad x \in \Omega$$

V takých prípadoch $a_{ij}(x) = k(x) \delta_{ij}$ a teda

$$\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) = k(s) \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(s) n_i(s) = k(s) \frac{\partial u}{\partial n}(s)$$

čo vedie k okrajovej podmienke tvaru

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n}(s) + \beta(s) u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \quad (2.15)$$

Spomedzi okrajových podmienok rozlišujeme tri základné v závislosti od funkcií α, β :

a) Ak $\alpha(s) = 0, \beta(s) = 1, s \in \partial\Omega$; potom podmienka

$$u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \quad (2.16)$$

sa nazýva Dirichletova²²⁾ okrajová podmienka

b) Ak $\alpha(s) = 1, \beta(s) = 0, s \in \partial\Omega$; potom podmienka

$$\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \quad (2.17)$$

sa nazýva Neumannova okrajová podmienka.

c) Ak $\alpha(s) = 1, \beta(s) > 0, s \in \partial\Omega$; potom podmienka

$$\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s) u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \quad (2.18)$$

sa nazýva Newtonova²³⁾ okrajová podmienka.

Príslušné okrajové úlohy sa nazývajú Dirichletova, Neumannova a Newtonova okrajová úloha.

Ak hranica $\partial\Omega$ oblasti Ω je rozdelená na dve, alebo tri časti, ktoré sa nanejdvých dotýkajú a riešenie má spĺňať na každej z nich inú z predchádzajúcich okrajových podmienok, hovoríme o zmiešanej okrajovej úlohe.

V prípade rovnice pre stacionárne vedenie tepla v telese znamená Dirichletova okrajová podmienka predpísanú teplotu na jeho povrchu, Neumannova podmienka predpísaný tok tepla cez povrch a Newtonova podmienka vyjadruje predpísanú výmenu tepla s okolitým prostredím danej teploty.

Ak riešenie eliptickej rovnice vyjadruje veľkosť ohybu membrány, potom Dirichletova podmienka vyjadruje predpísané správanie okraja membrány, Neumannova podmienka predpisuje napätie na okraji a Newtonova podmienka vyjadruje pružné upevnenie okraja membrány.

Oblasti Ω v predchádzajúcich fyzikálnych modeloch boli ohraničené. Okrajové úlohy pre také oblasti sa nazývajú vnútorné.

Ak Ω je oblasť, ktorú môžeme vyjadriť v tvare

$$\Omega = R^m - \bar{G}$$

kde G je ohraničená oblasť, potom okrajovú úlohu pre oblasť Ω nazývame vonkajšou okrajovou úlohou.

²²⁾ DIRICHLET Lejeune Peter Gustav (1805-1859), nemecký matematik. Pracoval v teórii čísel, matematickej analýze, matematickej fyzike. Významné výsledky dosiahol v teórii prvočísel. V matematickej analýze ako prvý zaviedol pojem relatívnej konvergencie radov, sformuloval podmienky konvergencie Fourierových radov, rozpracoval úlohu hľadania harmonického funkcie rovnajúcej danej funkcii na hranici oblasti (Dirichletova úloha).

²³⁾ NEWTON Isaac (1643-1727), anglický matematik, fyzik. Položil základy klasickej mechaniky a matematickej analýzy. Odhalil zákon zemskej príťažlivosti, rozpracoval diferenciálny a integrálny počet. Základom jeho metódy boli fluxie (derivácie) a fluenty (neurčité integrály). Riešil diferenciálne rovnice pomocou mocninových radov, ako prvý interpoloval funkcie.

V nasledujúcich úvahách o jednoznačnosti riešenia okrajových úloh budeme potrebovať niektoré integrálne identity zviazané s eliptickými operátormi.

Nech L je eliptický operátor na ohraničenej lipschitzovskej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^m$:

$$(Lu)(x) = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + q(x)u(x), \quad x \in \Omega$$

Ak u, v sú ľubovoľné funkcie z množiny $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, potom na základe formuly (I.1.8) integrovania per partes dostaneme vzťahy - Greenove formuly pre operátor L :

$$\int_{\Omega} (Lu)(x)v(x) dx = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + q(x)u(x)v(x) \right] dx -$$

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n_A}(s)v(s) ds$$

$$\int_{\Omega} [(Lu)(x)v(x) - u(x)(Lv)(x)] dx = \int_{\partial\Omega} \left[u(s) \frac{\partial v}{\partial n_A}(s) - v(s) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s) \right] ds$$

Ak funkcie u, v spĺňajú homogénne okrajové podmienky

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s)u(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega$$

$$\alpha(s) \frac{\partial v}{\partial n_A}(s) + \beta(s)v(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega;$$

potom dosadením do pravej strany identity (2.20) dostaneme vzťah

$$\int_{\Omega} (Lu)(x)v(x) dx = \int_{\Omega} u(x)(Lv)(x) dx$$

V tomto prípade hovoríme, že operátor L je symetrický na množine D_L tých funkcií

$$v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), \text{ pre ktoré } Lv \in L_2(\Omega) \text{ a platí (2.21).}$$

Podmienky $Lu, Lv \in L_2(\Omega)$ zabezpečujú existenciu oboch integrálov vo vzťahu (2.22).

Pomocou vzťahov (2.19), (2.20), (2.22) dokážeme jednoznačnosť (nie existenciu) riešenia okrajovej úlohy (2.11), (2.12).

Najekôr si zavedieme pojem klasického riešenia.

Definícia 2.4. Funkcia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ sa nazýva (klasickým) riešením okrajovej úlohy

$$- \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.23)$$

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s)u(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega \quad (2.24)$$

ak spĺňa rovnicu (2.23) pre všetky $x \in \Omega$ a okrajovú podmienku (2.24) pre všetky $s \in \partial\Omega$.

Poznámka 2.1. V prípade Dirichletovej okrajovej úlohy je $\alpha(s) = 0$ na $\partial\Omega$ a teda od riešenia u stačí žiadať $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Veta 2.1. Nech Ω je ohraničená oblasť v \mathbb{R}^m ; $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $i, j = 1, \dots, m$; $q \in C(\bar{\Omega})$, $q(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \Omega$.

Potom Dirichletova a Newtonova okrajové úlohy pre eliptickú rovnicu (2.23) majú najviac jedno riešenie.

Rozdiel ľubovoľných dvoch riešení Neumannovej úlohy je rovný na Ω konštante.

Ak navyše $q(x) \neq 0$ na Ω , potom aj Neumannova okrajová úloha má najviac jedno riešenie.

Dôkaz: Nech u_1, u_2 sú dve riešenie okrajovej úlohy (2.23), (2.24). Funkcia $w = u_1 - u_2$ je potom riešením okrajovej úlohy

$$(Lw)(x) = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j}) + q(x)w(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\alpha(s) \frac{\partial w}{\partial n_A}(s) + \beta(s)w(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega$$

Použitím Greenovej formuly (2.19) dostaneme vzťahy

$$0 = \int_{\Omega} (Lw)(x)w(x) dx = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + q(x)w^2(x) \right] dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n_A}(s)w(s) ds =$$

$$\int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + q(x)w^2(x) \right] dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} w^2(s) ds,$$

ak $\alpha(s) > 0$ pre všetky $s \in \partial\Omega$.

V prípade Dirichletovej úlohy máme $w(s) = 0$ na $\partial\Omega$ a integrály po hranici $\partial\Omega$ budú nulové. Pretože funkcie α, β sú nezáporné na $\partial\Omega$, dostaneme na základe podmienky eliptickosti (2.2) nerovnosť

$$0 \leq c \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Omega} q(x) w^2(x) dx, \quad c > 0$$

Pretože $q(x) \geq 0$ na Ω , musia byť $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0$ na Ω , $i = 1, \dots, m$ a teda

$$w(x) = C \text{ na } \Omega$$

V prípade Neumannovej úlohy to znamená, že

$$u_1(x) - u_2(x) = C = \text{konšt. na } \Omega$$

V prípade Dirichletovej úlohy máme $w(s) = 0$ na $\partial\Omega$ a teda $C = 0$, odkiaľ dostávame jednoznačnosť riešenia.

Ak $q(x) \neq 0$, potom existuje bod $x_0 \in \Omega$, v ktorom je

$$q(x_0) > 0$$

Na základe spojitosti funkcie q existuje okolie $O(x_0)$ bodu x_0 také, že

$$q(x) \geq q_0 > 0 \text{ pre všetky } x \in O(x_0) \subset \Omega$$

Pretože platia nerovnosti

$$0 \leq \int_{O(x_0)} q(x) w^2(x) dx \leq q_0 \int_{O(x_0)} w^2(x) dx$$

musí byť $w(x) = 0$ pre všetky $x \in O(x_0)$. Pretože sme už vyššie ukázali, že $w(x) = C$ na množine Ω , dostávame rovnosť

$$C = 0 \text{ a teda } u_1(x) = u_2(x) \text{ pre všetky } x \in \Omega.$$

Zostáva nám ešte prípad Newtonovej úlohy. Využitím okrajovej podmienky a kladnosti a spojitosti funkcie $\beta: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dostaneme v tomto prípade rovnosť

$$0 \leq c \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx + \beta_0 \int_{\partial\Omega} w^2(s) ds, \quad c > 0, \beta_0 > 0$$

Opäť dostaneme $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0$ na Ω , $w = 0$ na $\partial\Omega$, čo je možné len v prípade

$$w(x) = C = 0 \text{ pre všetky } x \in \Omega$$

čo dokazuje jednoznačnosť riešenia.

Poznámka 2.2. Rovnakým spôsobom možno ukázať, že aj zmiešaná okrajová úloha pre eliptickú rovnicu má najviac jedno riešenie.

V prípade Neumannovej okrajovej úlohy platí nasledujúca nevyhnutná podmienka existencie riešenia.

Veta 2.2. Ak u je riešenie Neumannovej okrajovej úlohy

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_A}(s) = g(s), \quad s \in \partial\Omega; \quad (2.26)$$

potom platí rovnosť

$$\int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(s) ds = 0 \quad (2.27)$$

Dôkaz: Rovnosť (2.27) je dôsledkom formuly (2.19), kde položíme $q \equiv 0$, $v \equiv 1$.

V prípade vedenia tepla v telese vyjadruje podmienka (2.27) ten fakt, že z telesa uniká rovnaké množstvo tepla, ako v ňom vzniká.

Vo všeobecnosti závisí existencia klasického riešenia okrajovej úlohy (2.23), (2.24) od hladkosti dát úlohy. Riešenie existuje napríklad, ak pravá strana f a koeficienty rovnice sú nekonečne veľakrát diferencovateľné funkcie na množine $\bar{\Omega}$ a funkcie α, β, g sú nekonečne veľakrát diferencovateľné na hladkej hranici $\partial\Omega$ (kružnica, sféra). V iných prípadoch, napríklad ak oblasť Ω je obdĺžnik, kváder, alebo valec, nemusí klasické riešenie existovať, ale existuje tzv. slabé riešenie, ktoré síce nemá všetky vlastnosti riešenia diferenciálnej rovnice, ale plne vyjadruje fyzikálnu podstatu skúmaného javu. Podrobnejšie sa budeme týmto riešením zaoberať v §5.

Príklad 2.7: Riešme okrajovú úlohu

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.28)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta u(s) = C, \quad s \in \partial\Omega, \quad C \in \mathbb{R} \quad (2.29)$$

na ohraničenej oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Ľahko vidno, že funkcia $u = C$ je riešením Dirichletovej ($\alpha = 0, \beta = 1$) úlohy. Na základe vety o jednoznačnosti riešenia je toto riešenie jediné.

V prípade Newtonovej ($\alpha = 1, \beta > 0$) úlohy dostávame jediné riešenie $u = \frac{C}{\beta}$. Na základe vety 2.2 má Neumannova úloha ($\alpha = 1, \beta = 0$) riešenie len ak $C = 0$. V tomto prípade dostaneme nekonečne veľa riešení $u = c$, kde c je ľubovoľné reálne číslo.

Poznámka 2.3. V prípade vonkajšej okrajovej úlohy jednoznačnosť riešenia v tej forme ako vo vete 2.1 neplatí. Kvôli jednoduchosti sa obmedzíme na Poissonovu rovnicu

$$-\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (2.30)$$

V rovinnom prípade $m = 2$ existuje najviac jedno ohraničené na oblasti Ω riešenie Dirichletovej okrajovej úlohy. Ľubovoľné dve ohraničené riešenia Neumannovej úlohy sa v tomto prípade líšia o konštantu. Ak $m = 3$, potom existuje najviac jedno riešenie Dirichletovej, alebo Neumannovej úlohy v triede funkcií $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, pre ktoré $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Väčšie podrobnosti možno nájsť v knihách ([12], §12), ([22], §28).

Príklad 2.8. Riešme úlohu o elektrostatickom potenciáli nekonečného valcového telesa

$$-\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 > \rho^2, \quad \rho > 0 \quad (2.31)$$

$$u(x, y) = A, \quad x^2 + y^2 = \rho^2 \quad (2.32)$$

Úloha (2.31), (2.32) je vonkajšia Dirichletova úloha. Úlohu budeme riešiť pomocou polárnych súradníc. Pretože dáta úlohy nezávisia od uhlovej premennej φ , budeme hľadať riešenie ako funkciu premennej r . Teda $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$ a funkcia $u \equiv u(r)$ je riešením okrajovej úlohy pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad r > \rho \quad (2.33)$$

$$u(\rho) = A \quad (2.34)$$

Po prvom integrovaní rovnice (2.33) dostaneme

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = C, \quad \text{alebo} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{C}{r}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ďalším integrovaním dostávame všeobecné riešenie rovnice (2.33) v tvare

$$u(r) = C \ln r + D, \quad r > \rho, \quad C, D \in \mathbb{R}$$

Využitím podmienky (2.34) máme riešenie okrajovej úlohy (2.33), (2.34):

$$u(r) = C \ln \frac{r}{\rho} + A$$

kde C je ľubovoľné reálne číslo. Vidíme, že Dirichletova úloha (2.31), (2.32) má nekonečne veľa riešení. Ak k okrajovej podmienke (2.32) pridáme požiadavku ohraničenosti riešenia u , potom musí byť $C = 0$ a dostávame tak jediné ohraničené riešenie

$$u(x, y) = u(r) \equiv A, \quad x^2 + y^2 = r^2 > \rho^2$$

Príklad 2.9. Riešme vonkajšiu Dirichletovu okrajovú úlohu pre potenciál nabitej gule:

$$-\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 > \rho^2, \quad \rho > 0 \quad (2.35)$$

$$u(x, y, z) = A, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \quad (2.36)$$

Úlohu riešime pomocou sférických súradníc. Rovnako ako v predchádzajúcom príklade hľadáme riešenie ako funkciu závislú len od vzdialenosti r od stredu súradnej sústavy. Funkcia $u \equiv u(r)$ je na základe vyjadrenia (2.10) Laplaceovho operátora v sférických súradniciach riešením okrajovej úlohy

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0, \quad r > \rho \quad (2.37)$$

$$u(\rho) = A \quad (2.38)$$

Dvojnásobným integrovaním rovnice (2.37) a využitím podmienky (2.38) dostaneme riešenie úlohy (2.37), (2.38) v tvare

$$u(r) = C \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho} \right) + A$$

kde C je ľubovoľné reálne číslo. Teda Dirichletova úloha má opäť nekonečne veľa riešení. Ak budeme žiadať splnenie požiadavky

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 0 \quad (2.39)$$

čo je prirodzená požiadavka na elektrostatický potenciál, potom dostaneme jediné riešenie úlohy (2.35), (2.36), (2.39) tvaru

$$u(x, y) = u(r) = A \frac{\rho}{r} = A \frac{\rho}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2.40)$$

2.5 Úlohy na vlastné hodnoty a vlastné funkcie

Budeme sa zaoberať nasledovnou okrajovou úlohou pre eliptickú rovnicu:

$$(Lu)(x) - \lambda u(x) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \quad (2.41)$$

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n_A} + \beta(s) u(s) = 0, \quad s \in \partial \Omega \quad (2.42)$$

kde

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + q(x)u \quad (2.43)$$

Je zrejmé, že funkcia $u = 0$ je riešením úlohy (2.41), (2.42). Ďalej sa budeme zaujímať o tie čísla λ , pre ktoré existujú aj nenulové riešenia.

Propomeňme si, že symbolom D_L sme označili množinu všetkých takých funkcií $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, pre ktoré je $Lu \in L_2(\Omega)$ a ktoré spĺňajú okrajovú podmienku (2.42).

Definícia 2.5. Reálne číslo λ , pre ktoré existuje nenulové riešenie $u \in D_L$ okrajovej úlohy (2.41), (2.42) sa nazýva vlastná hodnota a zodpovedajúce riešenie u vlastná funkcia operátora $L : D_L \rightarrow L_2(\Omega)$.

Veľký význam má nasledujúca veta o existencii vlastných hodnôt analogická vete I.2.1 o Sturmovej-Liouvilleovej úlohe.

Veta 2.3. Nech Ω je ohraničená oblasť s hladkou hranicou, $L : D_L \rightarrow L_2(\Omega)$ je eliptický operátor s koeficientmi $a_{ij}, q \in C^\infty(\bar{\Omega})$ a $\alpha, \beta : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nezáporné hladké funkcie, $\alpha(s) + \beta(s) > 0$ na $\partial\Omega$.

Potom existujú postupnosti $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty, \{u_n\}_{n=1}^\infty$ vlastných hodnôt a im zodpovedajúcich vlastných funkcií operátora L s vlastnosťami:

a) Množina všetkých vlastných funkcií zodpovedajúcich tej istej vlastnej hodnote tvorí konečnorozmerný lineárny priestor.

b) $\min_{x \in \bar{\Omega}} q(x) \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$

pričom každú vlastnú hodnotu uvádzame toľkokrát, koľko je jej násobnosť, t.j. dimenzie priestoru jej vlastných funkcií.

c) Postupnosť $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ vlastných funkcií je ortogonálna v priestore $L_2(\Omega)$, t.j.

$$\int_{\Omega} u_j(x) u_k(x) dx = 0, \text{ ak } j \neq k, j, k = 1, 2, \dots$$

d) Každá funkcia $f \in L_2(\Omega)$ môže byť vyjadrená v tvare Fourierovho radu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \quad x \in \Omega,$$

$$c_n = \left(\int_{\Omega} u_n^2(x) dx \right)^{-1} \int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

pričom daný rad konverguje v strede (v $L_2(\Omega)$) k funkcii f . Ak navyše $f \in D_L$, potom daný rad konverguje k funkcii f rovnomerne na množine $\bar{\Omega}$ a rad, ktorý vznikne jeho derivovaním podľa x_i konverguje v strede k funkcii $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Dôkaz: Rovnakým spôsobom ako vo vete I.2.1 by sme dokázali, že množina vlastných funkcií zodpovedajúcich tej istej vlastnej hodnote tvorí lineárny priestor. Pomocou Greenových formúl (2.19), (2.22) opäť analogicky ako v prípade Sturmovej-Liouvilleovej úlohy, možno dokázať dolný odhad vlastných hodnôt v časti tvrdenia b), ako aj ortogonalitu vlastných funkcií.

Dôkazy ostatných tvrdení vety sú veľmi náročné a vyžadujú aparát integrálnych rovníc a funkcionálnej analýzy (napr. [22], §21).

Úloha na vlastné hodnoty a vlastné funkcie sa rieši aj v prípade oblasti s po častiach hladkou (lipschitzovskou) hranicou. Veta 2.3 v tom prípade platí pre zovšeobecnené vlastné hodnoty a vlastné funkcie.

Pomocou vlastných hodnôt a vlastných funkcií budeme riešiť okrajovú úlohu

$$(Lu)(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.44)$$

$$\alpha(s) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s) + \beta(s)u(s) = 0, \quad s \in \partial\Omega \quad (2.45)$$

kde $L : D_L \rightarrow L_2(\Omega)$ je eliptický operátor definovaný v (2.43).

Nech $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, resp. $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ sú postupnosti vlastných hodnôt, resp. ortogonálnych vlastných funkcií operátora L . Riešenie nehomogénnej úlohy (2.44), (2.45) hľadáme v tvare Fourierovho radu podľa vlastných funkcií:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x), \quad x \in \Omega$$

Predpokladajme navyše, že všetky vlastné hodnoty sú nenulové. Koeficienty c_n sa potom dajú vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\int_{\Omega} u(x) u_n(x) dx}{\int_{\Omega} u_n^2(x) dx} = \frac{\int_{\Omega} u(x) \frac{1}{\lambda_n} (Lu_n)(x) dx}{\int_{\Omega} u_n^2(x) dx} = \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \frac{\int_{\Omega} (Lu(x) u_n(x) dx)}{\int_{\Omega} u_n^2(x) dx} = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\int_{\Omega} f(x) u_n(x) dx}{\int_{\Omega} u_n^2(x) dx} = \frac{f_n}{\lambda_n} \end{aligned}$$