

6. Riešte okrajovú úlohu pre Laplaceovu rovnicu v medzikruží  $0 < \varrho_1 < r < \varrho_2$ , ak sú dané okrajové podmienky

a)  $u(\varrho_1, \varphi) = g_1(\varphi), \quad u(\varrho_2, \varphi) = g_2(\varphi)$

b)  $u(\varrho_1, \varphi) = g_1(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(\varrho_2, \varphi) = g_2(\varphi)$

c)  $\frac{\partial u}{\partial r}(\varrho_1, \varphi) = g_1(\varphi), \quad u(\varrho_2, \varphi) = g_2(\varphi)$

7. Nájdite stacionárne rozdelenie teploty v doske tvaru kruhového výseku  $0 < r < \varrho, 0 < \varphi < \infty$ , ak je daná teplota na jeho okraji:  $u(\varrho, \varphi) = g(\varphi)$ ,  $u(r, 0) = u(r, \infty) = 0$ .

8. Riešte Dirichletovu okrajovú úlohu -  $\Delta u = f(r, \varphi)$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , pre prie-  
hyb kruhovej membrány  $\Omega$  polomeru  $\varrho$ , ak

a)  $f(r, \varphi) = A \cos \frac{\varphi}{2}$

b)  $f(r, \varphi) = A r^2$

Návod: Použite vzorce (2.43), (2.44).

9. Nájdite stacionárne rozdelenie teploty  $u(r, \varphi, z)$  vnútri val-  
ca polomeru  $\varrho$  a výšky  $d$ , ak

a)  $u(r, \varphi, 0) = u(r, \varphi, d) = 0, \quad u(\varrho, \varphi, z) = A z \left(1 - \frac{z}{d}\right)$

b)  $\frac{\partial u}{\partial z}(r, \varphi, 0) = \frac{\partial u}{\partial z}(r, \varphi, d) = 0, \quad u(\varrho, \varphi, z) = g(z)$

(Obe základne valca sú tepelne izolované)

c)  $u(\varrho, \varphi, z) = u(r, \varphi, z) = 0, \quad u(r, \varphi, d) = \varrho^2 - r^2$

d)  $u(r, \varphi, 0) = \frac{\partial u}{\partial r}(\varrho, \varphi, z) = 0, \quad u(r, \varphi, d) = g(r)$

e)  $u(\varrho, \varphi, z) = u(r, \varphi, d) = 0, \quad -k \frac{\partial u}{\partial z}(r, \varphi, 0) = q$

(cez dolnú základňu prúdi konštantný tok tepla  $q$ )

10. Nájdite potenciál elektrostatičného poľa v polonekonečnom valci polo-  
meru  $\varrho$  pri nulovom náboji, ak

a) jeho povrch je uzemnený a základňa má potenciál  $V_0$

b) jeho základňa je uzemnená a povrch má potenciál  $V_0$

Návod: Použite podmienku  $\lim_{z \rightarrow \infty} u(r, \varphi, z) = 0$

11. Nájdite rozdelenie teploty vo valci polomeru  $\varrho$  a výšky  $d$ , ak v ňom  
pôsobí zdroj tepla vyjadrený funkciou tepelnej hustoty  $f \equiv f(r, \varphi, z)$ ,  
pričom

a) na povrchu je udržiavaná nulová teplota a obe základne sú tepelne  
izolované,

b) na základniach je udržiavaná nulová teplota a povrch je tepelne izo-  
lovaný.

12. Riešte okrajovú úlohu pre Laplaceovu rovnicu v guľi polomeru  $\varrho$ , ak

a)  $u(\varrho, \varphi, \vartheta) = \cos^2 \vartheta$

b)  $u(\varrho, \varphi, \vartheta) = \sin^2 \vartheta$

c)  $\left(u + \frac{\partial u}{\partial r}\right)(\varrho, \varphi, \vartheta) = 1 + \cos^2 \vartheta; \quad 0 < \vartheta < \pi$



4. Nech  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ ,  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ;

a  $f \in C(\bar{\Omega})$ ,  $f|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$ ;  $i = 1, \dots, n$ .

Dokážte, že  $f \in H^1(\Omega)$ .

### III. Nestacionárne rovnice

V tejto kapitole sa budeme zaoberať parciálnymi diferenciálnymi rovnicami 2. rádu vyjadrujúcimi fyzikálne deje závislé od času. V rovniciach bude vystupovať popri priestorových premenných  $x_1, \dots, x_m$  aj časová premenná  $t$ . Medzi najdôležitejšie nestacionárne rovnice patria parabolické rovnice modelujúce procesy vedenie tepla a difúzie a hyperbolické rovnice vyjadrujúce kmitanie, alebo vlnenie. Pri riešení budeme používať podobné metódy ako v II. kapitole, a to metódou separácie premenných a integrálne metódy. Budeme pritom využívať niektoré výsledky z teórie eliptických rovníc.

#### §1. NIEKTORÉ FYZIKÁLNE DEJE VYJADRENÉ NESTACIONÁRNymi ROVNICAMI

##### 1.1 Nestacionárne vedenie tepla a difúzia

Uvažujme teleso zaberajúce ohraničenú oblasť  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , v ktorom sú spojite rozložené s časom sa meniace tepelné zdroje vyjadrené funkciou  $f: \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  - hustotou rozloženia tepelných zdrojov v čase  $t$ . Budeme postupovať podobne ako v prípade stacionárneho vedenia tepla v kap. II, 1.1. Urobíme tepelnú bilanciu v ľubovoľnej časti  $D \subset \Omega$  v malom časovom intervale  $(t, t + \Delta t)$ . Množstvo tepla vyprodukovaného zdrojmi  $f$  je rovné

$$Q_1 = \left( \iiint_D f(x, t) dx \right) \Delta t, \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

a tok tepla cez povrch  $D$  v smere vonkajšej normály je

$$Q_2 = - \left( \iint_{\partial D} k(s) \frac{\partial u}{\partial n}(s) ds \right) \Delta t$$

kde  $k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je funkcia - koefficient tepelnej vodivosti a  $u: \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je (neznáma) funkcia popisujúca rozloženie teploty v telese - oblasti  $\Omega$  v čase  $t$ . Na rozdiel od stacionárneho prípadu uvažujeme aj množstvo tepla

$$Q_3 = \left( \iiint_D c(x) \varrho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx \right) \Delta t,$$

ktoré sa spotrebuje na zmenu teploty v časti  $D$  za časový úsek  $(t, t + \Delta)$ , pričom  $c: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je merné teplo a  $\varrho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je hustota telesa.



Podľa zákona o zachovaní energie platí

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

a po vydelení s členom  $\Delta t$  dostaneme tým istým spôsobom ako v prípade stacionárneho vedenia tepla rovnicu pre nestacionárne vedenie tepla

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (k(x) \operatorname{grad} u) = f(x, t); \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, \infty) \quad (1.1)$$

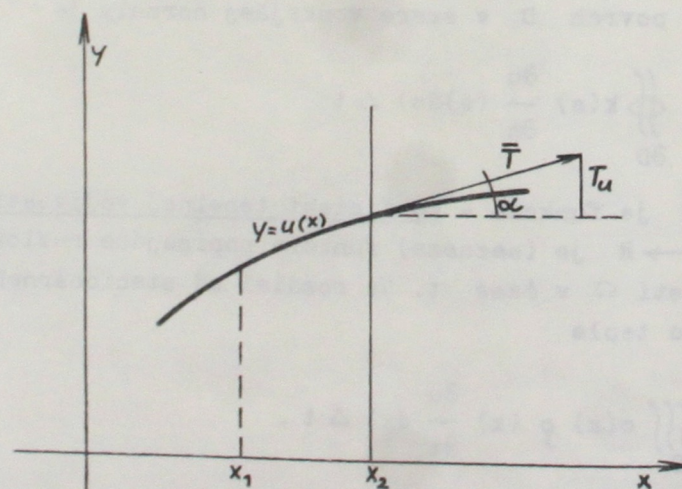
Rovnakého typu je aj rovnica nestacionárnej difúzie

$$c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (D(x) \operatorname{grad} u) = f(x, t); \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, \infty), \quad (1.2)$$

kde  $c$  je koeficient pórovitosti prostredia,  $D$  je koeficient difúzie a funkcia  $u$  vyjadruje koncentráciu difundujúcej látky.

## 1.2 Rovnice kmitania a vlnenia

Uvažujme proces kmitania tenkej struny, ktorá nekladie odpor priehybu, ale kladie odpor rozťahovaniu, t.j. vektor napätia vznikajúceho v strune má smer dotyčnice k jej okamžitému profilu. Budeme skúmať iba také kmitanie, pri ktorom struna ostáva v jednej rovine a vektor posunutia je v každom bode kolmý na os  $o_x$  (pričné kmity). Poloha struny je potom vyjadrená funkciou  $U : (a, b) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $(a, b)$  je interval (aj neohraničený) na reálnej osi  $o_x$  a  $(0, \infty)$  časový interval. Navyše skúmame len malé kmity, t.j. možno zanedbať výraz  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$  a veľkosť  $T$  napätia vznikajúceho v strune nezávisí od  $t$  (obr. 17).



Obr. 17  
Časť kmitajúcej struny

Priečne kmity sú spôsobené vonkajšími silami a priemetom  $T_u$  napätia na os  $u$ , ktorý má veľkosť

$$T_u = T \sin \alpha = T \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = T \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx T \frac{\partial u}{\partial x}$$

Nech  $\langle x_1, x_2 \rangle$  je ľubovoľný interval. Hybnosť časti struny v intervale  $\langle x_1, x_2 \rangle$  v čase  $t$  je rovná

$$H(t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \rho(x) dx$$

kde  $\rho$  je funkcia dĺžkovej hustoty struny. Podľa druhého Newtonovho zákona je zmena hybnosti za čas  $t = t_2 - t_1$  rovná impulzu pôsobiacich síl, ktoré sa v tomto prípade skladajú zo síl napätia  $T_u = T \frac{\partial u}{\partial x}$  pôsobiacich na koncoch  $x_1, x_2$  (vnútri intervalu sa zrušia) a z vonkajších síl  $\int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx$ ,

kde  $F$  je hustota týchto síl. Platí teda rovnosť

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_2) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_1) \right] \rho(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \left[ T(x_2) \frac{\partial u}{\partial x}(x_2, t) - T(x_1) \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, t) \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) dx dt$$

Ak funkcia  $u$  je dvakrát spojitely diferencovateľná, potom použitím Lagrangeovej vety o strednej hodnote na intervaloch  $\langle t_1, t_2 \rangle$ ,  $\langle x_1, x_2 \rangle$  a vety o strednej hodnote pre integrály dostaneme po predelení s výrazom  $(t_2 - t_1)(x_2 - x_1)$  perciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( T(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F(x, t) \quad (1.3)$$

ktorá v prípade konštantného napätia  $T$  a konštantnej hustoty  $\rho$  má tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (1.4)$$



$$\text{kde } a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad f(x,t) = \frac{1}{\rho} F(x,t)$$

Rovnica (1.4) sa nazýva aj vlnová rovnica.

V dvojrozmernom prípade vyjadruje riešenie u rovnice

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(T(x) \operatorname{grad} u(x)) = F(x,t) \quad (1.5)$$

$$(x,t) \in \Omega \times (0,\infty); \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

priečne kmity membrány, ktorej priemet do roviny  $(x_1, x_2)$  je oblasť  $\Omega$ .

V trojrozmernom prípade rovnica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \quad (1.6)$$

popisuje proces šírenie zvuku v homogénnom prostredí a elektromagnetických vln v homogénnom nevodivom prostredí. Funkcia u môže vyjadrovať hustotu a tlak plynu, potenciál rýchlosti kmitajúceho plynu, ako aj zložky napätia nestacionárneho elektrického a magnetického poľa a im zodpovedajúce potenciály.

Ak kvantová častica hmotnosti  $m_0$  sa pohybuje v silovom poli s potenciálom  $V(x)$ , potom jej vlnová funkcia  $\psi$  je riešením nestacionárnej Schrödingerovej rovnice

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi - V(x) \psi(x,t) = 0 \quad (1.7)$$

kde  $\hbar = 1,054,10^{-27}$  je Planckova konštanta.

## §2. PARABOLICKÉ ROVNICE

V tejto časti sa budeme zaoberať rovnicami vyjadrujúcimi nestacionárne vedenie tepla a difúziu.

### 2.1 Základné úlohy pre parabolickú rovnicu

Definícia 2.1. Nech  $L$  je eliptický operátor v oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  tvaru

$$(Lu)(x) = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + q(x)u(x)$$

Potom parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \quad (2.1)$$

sa nazýva parabolická rovnica.

Porovnaním s (1.1), (1.2) vidíme, že rovnice pre nestacionárne vedenie tepla a difúziu sú parabolické.

Podobne ako v prípade eliptickej rovnice aj v parabolickej rovnici hľadáme riešenie, ktoré okrem rovnice (2.1) spĺňa aj niektoré ďalšie podmienky.

Definícia 2.2. Začiatočná úloha pre parabolickú rovnicu je úloha nájsť funkciu  $u : \mathbb{R}^m \times \langle 0,\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , ktorá je riešením rovnice (2.1) na množine  $\mathbb{R}^m \times (0,\infty)$  a spĺňa začiatočnú podmienku

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (2.2)$$

kde  $u_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  je daná funkcia.

Definícia 2.3. Nech  $\Omega$  je oblasť v  $\mathbb{R}^m$ . Začiatočno-okrajová úloha pre parabolickú rovnicu je úloha nájsť funkciu  $u : \bar{\Omega} \times \langle 0,\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , ktorá je riešením rovnice (2.1) na množine  $\Omega \times (0,\infty)$ , spĺňa začiatočnú podmienku

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2.3)$$

a okrajovú podmienku

$$\alpha(s,t) \frac{\partial u}{\partial n_A}(s,t) + \beta(s,t)u(s,t) = g(s,t), \quad (s,t) \in \partial \Omega \times (0,\infty) \quad (2.4)$$



kde  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $g, \alpha, \beta : \partial\Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sú dané funkcie,  $\alpha(s, t) \geq 0$ ,  $\beta(s, t) \geq 0$ ,  $\alpha(s, t) + \beta(s, t) > 0$  pre všetky  $(s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty)$  a

$$\frac{\partial u}{\partial n_A}(s, t) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(s) \frac{\partial u}{\partial x_i}(s, t) n_j(s); \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty),$$

pričom  $\bar{n}(s) = (n_1(s), \dots, n_m(s))$  je jednotkový vektor vonkajšej normály k hranici  $\partial\Omega$  v bode  $s \in \partial\Omega$ .

Teda pri začiatočno-okrajovej úlohe kombinujeme začiatočnú podmienku vzhľadom na čas a okrajové podmienky známe z teórie eliptických rovníc.

## 2.2 Jednoznačnosť riešenia začiatočnej a začiatočno-okrajovej úlohy

Podobne ako v prípade eliptickej rovnice budeme sa najprv zaoberať otázkou jednoznačnosti riešenia začiatočnej a začiatočno-okrajovej úlohy a až v ďalších častiach čiastočne aj existenciou riešenia. Problematika existencie riešenia je dosť náročná a aj v tomto prípade sa zavádza pojem slabého riešenia (podrobnejšie napr. v [5], [12], [18]).

Nech  $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$ . Symbolom  $C^{2,1}(D)$  budeme označovať množinu všetkých funkcií  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ , ktoré majú spojité na množine  $D$  všetky parciálne derivácie

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$  a spojité parciálne derivácie  $\frac{\partial u}{\partial t}$ .  $\Omega$  bude naďalej znamenať ohraničenú oblasť v priestore  $\mathbb{R}^m$ . Zavedieme ešte nasledujúce množiny:

$$\Omega_t = \{(x, t) = (x_1, \dots, x_m, t) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in \Omega\},$$

kde  $t \geq 0$  je pevné číslo

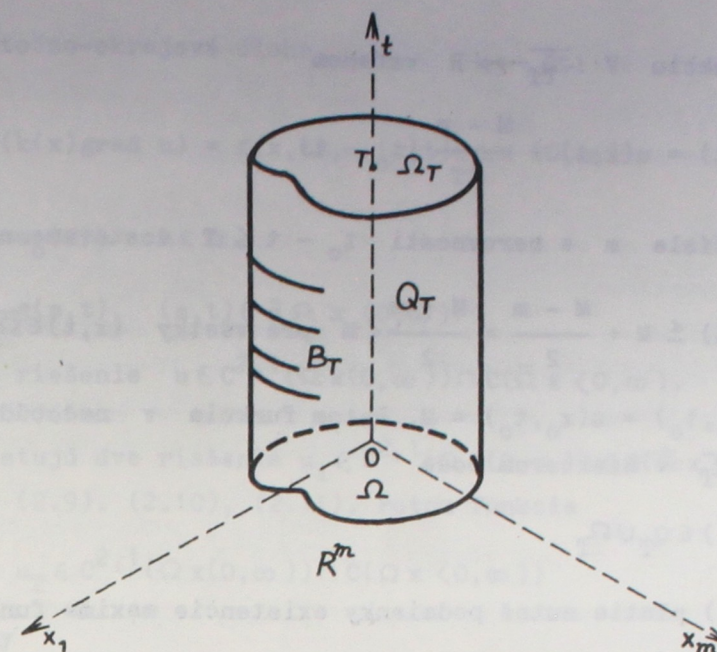
$Q_T = \Omega \times (0, T)$  - vnútro valca v priestore  $\mathbb{R}^{m+1}$  s dolnou základňou  $\Omega_0$  a vrcholom  $\Omega_T$ ,  $T > 0$

$B_T = \partial\Omega \times (0, T)$  - plášť valca  $Q_T$  (obr. 18).

Nasledujúca veta má veľký význam pri dôkaze jednoznačnosti riešenia začiatočnej a začiatočno-okrajovej úlohy pre parabolickú rovnicu. Obmedzíme sa pritom na rovnicu s operátorom  $L$  tvaru

$$Lu = -\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u), \quad k(x) \geq k_0 > 0$$

pre všetky  $x \in \Omega$ ,  $k \in C^1(\bar{\Omega})$



Obr. 18  
Časovo-priestorová oblasť riešenia parabolickej rovnice

**Veta 2.1.** (Princíp maxima a minima.) Ak funkcia  $u \in C(\bar{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T \cup \Omega_T)$  je riešením homogénnej parabolickej rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u) = 0, \quad (x, t) \in Q_T \quad (2.5)$$

tak

$$\max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \bar{\Omega}_0 \cup \bar{B}_T} u(x, t) \quad (2.6)$$

$$\min_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t) = \min_{(x,t) \in \bar{\Omega}_0 \cup \bar{B}_T} u(x, t) \quad (2.7)$$

t.j. funkcia  $u : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$  nadobúda maximum a minimum na základni, alebo plášti valca  $\bar{Q}_T$ .

Dôkaz: Označme  $M = \max_{(x,t) \in \bar{Q}_T} u(x, t)$ ,  $m = \min_{(x,t) \in \bar{\Omega}_0 \cup \bar{B}_T} u(x, t)$ .

Čísla  $M, m$  existujú, pretože funkcia  $u$  je spojitá na ohraničených uzavretých množinách  $\bar{Q}_T, \bar{\Omega}_0 \cup \bar{B}_T$ . Zrejme  $m \leq M$ . Aby sme dokázali vzťah (2.6), stačí ukázať  $m = M$ . Predpokladajme, že  $m < M$ . Potom existuje bod  $(x_0, t_0) \in Q_T \cup \Omega_T$  (t.j. vnútri valca, alebo na jeho povrchu) taký, že

$$u(x_0, t_0) = M$$



Definujeme funkciu  $V : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$  vzťahom

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{2T} (t_0 - t)$$

Z definície čísla  $m$  a nerovnosti  $t_0 - t \leq T$  dostávame nerovnosť

$$v(x, t) \leq M + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M \text{ pre všetky } (x, t) \in \bar{\Omega}_0 \cup \bar{B}_T$$

Súčasne  $v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M$ . Potom funkcia  $v$  nadobúda svoje maximum na množine  $\bar{Q}_T$  v niektorom bode

$$(y, t_1) \in Q_T \cup \Omega_T$$

V bode  $(y, t_1)$  platia nutné podmienky existencie maxima funkcie  $v$  na množine  $\bar{Q}_T$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y, t_1) \geq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i}(y, t_1) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(y, t_1) \leq 0; \quad i = 1, \dots, m$$

Prvá nerovnosť vyplýva z toho, že môže byť  $t_1 = T$ , ak  $t_1 < T$ , tak

$\frac{\partial v}{\partial t}(y, t_1) = 0$ . Funkcia  $v$  potom spĺňa v bode  $(y, t_1)$  nerovnosť

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} v) \right](y, t_1) \geq 0 \quad (2.8)$$

Z vyjadrenia funkcie  $v$  a rovnosti (2.5) dostaneme vzťahy

$$\left[ \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} v) \right](y, t_1) = - \frac{M - m}{2T} < 0$$

čo je spor s nerovnosťou (2.8). Teda bod  $(y, t_1)$  nemôže byť z množiny  $Q_T \cup \Omega_T$ , ale je z množiny  $\Omega_0 \cup B_T$ . Z predchádzajúcich úloh vyplýva, že potom musí byť  $m = M$  a teda platí rovnosť (2.6), ktorú sme chceli dokázať.

Ak predchádzajúci postup zopakujeme s funkciou  $-u$ , dostaneme aj analogické tvrdenie o minime funkcie  $u$ , ktoré je totožné s maximom funkcie  $-u$ .

Tvrdenia vety môžeme interpretovať tak, že v prípade chýbajúcich vnútorných tepelných (difundujúcich) zdrojov prebieha tepelný (difúzny) proces tak, že teplo (difundujúca látka) sa premiestňuje z miest s vyššou teplotou (koncentráciou) na miesta s nižšou teplotou (koncentráciou).

Prejdeme teraz k otázke jednoznačnosti riešenia začiatočnej a začiatočno-okrajovej úlohy.

**Veta 2.2.** Začiatočno-okrajová úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} u) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (2.9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2.10)$$

$$u(s, t) = g(s, t), \quad (s, t) \in \partial \Omega \times (0, \infty) \quad (2.11)$$

má najviac jedno riešenie  $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ .

**Dôkaz:** Nech existujú dve riešenia  $u_i \in C^{2,1}(\Omega \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ ,  $i = 1, 2$ ; úlohy (2.9), (2.10), (2.11). Potom funkcia

$$w = u_1 - u_2 \in C^{2,1}(\Omega \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$$

je riešením úlohy

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}(k(x) \operatorname{grad} w) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (2.12)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.13)$$

$$w(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial \Omega \times (0, \infty) \quad (2.14)$$

Podľa princípu maxima a minima pre ľubovoľný bod  $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$ ,  $0 < t < T$ ; platia nerovnosti

$$\min_{(x, t) \in \Omega_0 \cup B_t} w(x, t) \leq w(x, t) \leq \max_{(x, t) \in \Omega_0 \cup B_T} w(x, t)$$

kde  $\Omega_0 = \Omega \times \{0\}$ ,  $B_T = \partial \Omega \times [0, T]$ .

Na základe nulovej začiatočnej a okrajovej podmienky máme  $w(x, t) = 0$  pre všetky  $(x, t) \in \Omega_0 \cup B_T$  a teda aj  $w(x, t) = 0$  pre všetky  $(x, t) \in Q_T$  a tým je dôkaz jednoznačnosti riešenia skončený.

V prípade začiatočnej úlohy budeme kvôli jednoduchosti uvažovať operátor  $L = -s^2 \Delta$ ,  $s > 0$ ,  $s = \text{konšt.}$

**Veta 2.3.** Začiatočná úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} - s^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty) \quad (2.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (2.16)$$

má najviac jedno ohraničené riešenie

$$u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^m \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^m \times [0, \infty))$$



Dôkaz: Nech existujú dve ohraničené riešenia

$u_i \in C^{2,1}(R^m \times (0, \infty)) \cap C(R^m \times \langle 0, \infty \rangle)$ ,  $i = 1, 2$ ; úlohy (2.15), (2.16).

Potom ohraničená funkcia

$$w = u_1 - u_2 \in C^{2,1}(R^m \times (0, \infty)) \cap C(R^m \times \langle 0, \infty \rangle)$$

je riešením homogénnej úlohy

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w = 0, \quad (x, t) \in R^m \times (0, \infty) \quad (2.17)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in R^m \quad (2.18)$$

Nech

$$|w(x, t)| \leq M \text{ pre všetky } (x, t) \in R^m \times \langle 0, \infty \rangle \quad (2.19)$$

Označme

$$G_0 = \{(x, t) \in R^{m+1} : |x| < \rho, \quad t = 0\}$$

$$Q = \{(x, t) \in R^{m+1} : |x| < \rho, \quad t > 0\}$$

$$B = \{(x, t) \in R^{m+1} : |x| = \rho, \quad t > 0\}$$

Funkcia  $v$  definovaná vzťahom

$$v(x, t) = \frac{2Mma^2}{\rho^2} \left( \frac{|x|^2}{2ma^2} + t \right) \quad (2.20)$$

je riešením rovnice (2.17). Na základe podmienok (2.18), (2.19) platí nerovnosť

$$|w(x, t)| \leq v(x, t) \text{ pre všetky } (x, t) \in G_0 \cup B$$

Funkcie  $v + w$ ,  $v - w$  sú potom nezáporné na množine  $G_0 \cup B$  a spĺňajú rovnicu (2.17). Na základe princípu minima dostávame potom nerovnosti

$$(v + w)(x, t) \geq 0, \quad (v - w)(x, t) \geq 0 \text{ pre všetky } (x, t) \in \bar{Q}$$

z ktorých vyplýva nerovnosť

$$|w(x, t)| \leq v(x, t) = \frac{2Mma^2}{\rho^2} \left( \frac{|x|^2}{2ma^2} + t \right)$$

$$\text{pre všetky } (x, t) \in \bar{Q}$$

Keďže číslo  $\rho$  môžeme zvoliť ľubovoľne veľké, dostaneme z (2.21) nerovnosť

$$|w(x, t)| \leq 0 \text{ pre všetky } (x, t) \in R^m \times (0, \infty)$$

a teda  $w = 0$  na  $R^m \times (0, \infty)$  čím je dôkaz jednoznačnosti riešenia začiatkovej úlohy (2.17), (2.18) skončený.

Pri dôkaze jednoznačnosti riešenia začiatkovo-okrajovej úlohy s Neumannovou alebo Newtonovou okrajovou podmienkou použijeme Greenovu formulu podobne ako v prípade eliptických okrajových úloh. Budeme pritom opäť uvažovať eliptický operátor  $L$  vo všeobecnom tvare

$$(Lu)(x) = - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + q(x)u(x), \quad x \in \Omega$$

Symbolom  $C^{1,0}(\bar{\Omega} \times \langle 0, \infty \rangle)$  budeme označovať triedu všetkých funkcií spojitých na množine  $\Omega \times \langle 0, \infty \rangle$  so spojitými parciálnymi deriváciami prvého rádu podľa všetkých priestorových premenných v množine  $\Omega \times \langle 0, \infty \rangle$ .

Veta 2.4. Začiatočno-okrajová úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (2.22)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_A}(s, t) + \beta(s, t)u(s, t) = g(s, t), \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (2.24)$$

má najviac jedno riešenie  $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, \infty)) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times \langle 0, \infty \rangle)$ .

Dôkaz: Ak  $u_1, u_2$  sú dve riešenia úlohy (2.22), (2.23), (2.24), tak funkcia  $w = u_1 - u_2 \in C^{2,1}(\Omega \times (0, \infty)) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times \langle 0, \infty \rangle)$  je riešením homogénnej úlohy

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Lw = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (2.25)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n_A}(s, t) + \beta(s, t)w(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (2.27)$$

Nech  $t \in (0, \infty)$  je ľubovoľné číslo. Postupným použitím rovnice (2.25), podmienok (2.26), (2.27), Greenovej vety a vzťahu  $\frac{\partial}{\partial t} w^2(x, t) = 2 \frac{\partial w}{\partial t} w(x, t)$

dostaneme rovnosti

$$0 = \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial \tau} + Lw \right) w(x, \tau) dx d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + q(x)w^2(x, \tau) \right) dx + \int_{\partial\Omega} \beta(s, \tau)w^2(s, \tau) ds d\tau$$



Všetky integrály na pravej strane poslednej rovnosti sú nezáporné na základe eliptickosti operátora  $L$  a nezápornosti funkcií  $q, \beta$ . Potom musí byť

$$w(x, t) = 0 \quad \text{pre všetky } (x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$$

a teda úloha (2.22), (2.23), (2.24) má najviac jedno (klasické) riešenie  $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0, \infty)) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ .

### 2.3 Riešenie začiatočnej úlohy pre parabolickú rovnicu

Na vyjadrenie riešenia začiatočnej úlohy použijeme Fourierovu transformáciu. Pripomeňme si, že Fourierova transformácia je zobrazenie  $\mathcal{F}$ , ktoré priradí každej funkcii  $f$  absolútne integrovateľnej na celej reálnej osi  $\mathbb{R}$  funkciiu  $F$  tiež absolútne integrovateľnú na  $\mathbb{R}$  a definovanú vzťahom

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx, \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

Funkcia  $f$  môže byť naopak vyjadrená pomocou svojho Fourierovho obrazu  $F$  v tvare

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.29)$$

Zo vzťahu (2.28) dostaneme po integrácii per partes vzorec pre Fourierov obraz derivácie funkcie  $f$ :

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](y) = (iy)^k F(y), \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.30)$$

kde  $F = \mathcal{F}(f)$ , pričom predpokladáme, že funkcia  $f$  a všetky derivácie  $f^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , sú absolútne integrovateľné na  $\mathbb{R}$ , odkiaľ vyplývajú aj vzťahy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(p)}(x) = 0, \quad p = 0, 1, \dots, k-1$$

Podobne ako v prípade Laplaceovej transformácie platí vzorec pre Fourierovu transformáciu konvolúcie:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g) \quad (2.31)$$

kde

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi) g(\xi) d\xi$$

Uvažujme začiatočnú úlohu vyjadrujúcu vedenie tepla v neohraničenej tyči:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (2.32)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.33)$$

Predpokladajme, že dané funkcie  $f, u_0$ , ako aj riešenie  $u$  majú vlastnosti potrebné na to, aby sme v ďalšom priebehu mohli použiť Fourierovu transformáciu.

Označme

$$U = \mathcal{F}(u) - \text{Fourierov obraz predpokladaného riešenia } u$$

Použitím vzorca (2.30) a pravidla o derivovaní nevlastného integrálu podľa parametra dostaneme namiesto úlohy (2.32), (2.33) začiatočnú úlohu pre obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial U(y, t)}{\partial t} + a^2 y^2 U(y, t) = F(y, t), \quad (y, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (2.34)$$

$$U(y, 0) = U_0(y), \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

kde  $F, U_0$  sú Fourierove obrazy funkcií  $f, u_0$ . Riešenie  $U(y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  má pre každé  $y \in \mathbb{R}$  tvar

$$U(y, t) = U_0(y) e^{-a^2 y^2 t} + \int_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} F(y, \tau) d\tau \quad (2.36)$$

Funkciu  $u = \mathcal{F}^{-1} U$  nájdeme na základe vzorca (2.31) pre Fourierovu transformáciu konvolúcie, pričom využijeme známy ([10], 8.4.6) Fourierov obraz zloženej exponenciálnej funkcie:

$$[\mathcal{F}(g)](y) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-y^2/4c}; \quad g(x) = e^{-cx^2}, \quad c > 0 \quad (2.37)$$

Ak položíme vo vzorci (2.37) postupne  $c = (4a^2 t)^{-1}$ ,  $c = [4a^2 (t-\tau)]^{-1}$ , dostaneme vyjadrenie riešenia  $u$  pôvodnej úlohy (2.32), (2.33) pomocou konvolučných integrálov:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) u_0(\xi) d\xi + \quad (2.38)$$



$$+ \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

$$(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

Ak použijeme m-rozmernú Fourierovu transformáciu, dostaneme riešenie začiatkovej úlohy (2.15), (2.16) v tvare

$$u(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^m} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}\right) u_0(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^m} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{(\sqrt{t-\tau})^m} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

$$(x, t) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty)$$

Vzorec (2.39) sa nazýva Poissonova formula.

Poznámka 2.1. Pri odvodzovaní vzorcov (2.38), (2.39) sme postupovali čiastočne formálne, keď sme predpokladali dopredu, že riešenie  $u$  s použitými vlastnosťami existuje. V knihe ([12], 23. §3) je dokázané, že funkcia definovaná Poissonovou formulou (2.39) je naozaj riešenie začiatkovej úlohy (2.15), (2.16).

Poissonovu formulu môžeme vyjadriť aj v tvare

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m} G(x-\xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} G(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

kde

$$G(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^m} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty)$$

Funkcia  $G$  je Greenova alebo zdrojová funkcia rovnice vedenia tepla v priestore. Ak položíme vo formule (2.40)

$$u_0(x) = \delta(x - x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^m; \quad f(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty)$$

dostaneme podľa definície Diracovej funkcie

$$u(x, t) = G(x - x_0, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty)$$

Teda funkcia  $(x, t) \rightarrow G(x - x_0, t)$  je riešením začiatkovej úlohy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty)$$

$$u(x, 0) = \delta(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^m$$

čo zodpovedá vedeniu tepla v prípade bodového tepelného zdroja sústredeného do bodu  $x_0$  v čase  $t = 0$ .

Ak ďalej položíme

$$u_0(x) = 0, \quad f(x, t) = \delta(x - x_0, t - t_0), \quad (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty)$$

potom opäť podľa definície Diracovej funkcie dostaneme z (2.40)

$$u(x, t) = G(x - x_0, t - t_0), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t > t_0$$

To znamená, že funkcia  $(x, t) \rightarrow G(x - x_0, t - t_0)$  vyjadruje teplotu pri vedení tepla v priestore  $\mathbb{R}^m$  od časového okamihu  $t_0$ , v ktorom vzniklo v bode  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  jednotkové množstvo tepla.

## 2.4 Úlohy

1. Pomocou Poissonovej formuly riešte začiatkovú úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x); \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

a riešenie vyjadrite pomocou integrálu chýb  $\phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$ , ak

$$a) \quad u_0(x) = \begin{cases} 0, & |x| > c > 0 \\ u_0, & |x| \leq c \end{cases}$$

$$b) \quad u_0(x) = \begin{cases} U_1, & x \leq 0 \\ U_2, & x > 0 \end{cases}$$

$$c) \quad u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Ae^{-\alpha x}, & x > 0; \quad A \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \end{cases}$$

2. Riešte začiatkovú úlohu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x); \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \text{ak}$$

$$a) \quad u_0(x) = e^{-x^2}; \quad b) \quad u_0(x) = e^{2x-x^2}; \quad c) \quad u_0(x) = \sin x e^{-x^2}$$