Contents

Chapter 1

Integrálny počet

1.1 Určitý integrál

1.1.1 Definícia určitého integrálu

Definícia 1 *1. Nech $\langle a, b\rangle$ je uzavretý interval. Nech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú také, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$. Potom $k+1-$ticu $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nazývame delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nazývame deliace intervaly.*

2. *Nech $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom číslo $\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ nazývame norma delenia D.*

3. *Nech $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$. Ak $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$.*

4. *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je ľubovolné delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Nech body $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ sú ľubovolne zvolené pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Potom číslo*

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ a voľbu bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Definícia 2 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a každú voľbu bodov c_i v integrálnych súčtoch $S_{D_n}(f)$, postupnosť $(S_{D_n}(f))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k tomu istému číslu J, tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo*

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{D_n}(f)$$

nazývame určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$ a označujeme

$$J = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Veta 1 *(Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 3 *Nech sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *Funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$.*
2. *V intervale $\langle a, b\rangle$existuje len konečný počet bodov, v ktorých táto funkcia nie je spojitá.*
3. *V každom bode z intervalu (a, b) existuje vlastná limita funkcie f sprava a aj zľava.*
4. *Existujú vlastné limity $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.*

Potom hovoríme, že funkcia f je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 2 *(Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

1.1.2 Vlastnosti určitého integrálu

Veta 3 *Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovolná konštanta. Potom*

1. *Funkcia $(f + g) : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. *Funkcia $(cf) : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f.$$

3. *Funkcia $|f| : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

Veta 4 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na každom intervale $\langle c, d\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$.*

Veta 5 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a aj na intervale $\langle b, c\rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na intervale $\langle a, c\rangle$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Veta 6 *Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Potom platí*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

1.1.3 Veta o strednej hodnote

Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale ohraničená. To znamená, že existujú $k, K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $k \leq f(x) \leq K$. Preto platí

$$\int_a^b k\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b K\, dx.$$

Z toho dostávame

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq K(b-a).$$

A ďalej

$$k \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq K.$$

Číslo

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 7 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom existuje $c \in \langle a, b\rangle$ také, že*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

To znamená, že spojitá funkcia dosahuje na intervale $\langle a, b\rangle$ svoju strednú hodnotu.

1.1.4 Hlavná veta integrálneho počtu

Definícia 4 *Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na intervale* $\langle a, b\rangle$. *Potom funkciu*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt$$

nazývame funkcia hornej hranice integrálu funkcie f.

Veta 8 *Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je integrovateľná na intervale* $\langle a, b\rangle$. *Potom funkcia*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je spojitá.

Veta 9 *(Hlavná veta integrálneho počtu) Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je diferencovateľná (*na intervale* $\langle a, b\rangle$) *a navyše*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Definícia 5 *Nech je daná funkcia* $f : I \to \mathbb{R}$, *kde* I *je interval. Nech existuje funkcia* $F : I \to \mathbb{R}$ *taká, že*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pre každé} \quad x \in I.$$

Potom funkciu $F : I \to \mathbb{R}$ *nazývame primitívna funkcia funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$.

Veta 10 *Nech funkcia* $F_1 : I \to \mathbb{R}$ *je primitívnou funkciou funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$. *Potom funkcia* $F_2 : I \to \mathbb{R}$ *je primitívnou funkciou funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$ *práve vtedy, ak existuje* $c \in \mathbb{R}$ *také, že pre každé* $x \in I$ *je* $F_2(x) = F_1(x) + c$. *To znamená, že dve primitívne funkcie tej istej funkcie sa líšia iba o konštantu.*

Veta 11 *(Newtonov - Leibnitzov vzorec) Nech funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je jej ľubovolná primitívna funkcia. Potom*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Poznámka 1 *Definíciu určitého integrálu zovšeobecňujeme nasledujúcim spôsobom:*

1. $\int\limits_a^a f = 0.$

2. *Ak* $a > b$, *definujeme* $\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f.$

3. *Nech* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Môžeme definovať funkciu*

$$G : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ G(x) = \int\limits_x^b f(t)dt.$$

Táto funkcia je diferencovateľná (*na intervale* $\langle a, b\rangle$) *a platí*

$$G'(x) = -f(x) \quad \textit{pre každé} \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

4. *Nech* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia,* I *je interval a bod* $a \in I$. *Definujme funkciu* $G : I \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. *Nie je problém ukázať, že táto funkcia je diferencovateľná a* $G'(x) = f(x) \quad$ *pre každé* $\quad x \in I$.

Veta 12 *Nech* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia na intervale* I. *Potom k nej existuje primitívna funkcia.*

1.2 Neurčitý integrál

1.2.1 Definícia

Definícia 6 *Nech* I *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je funkcia. Potom jej ľubovolnú primitívnu funkciu* $F : I \to \mathbb{R}$ *nazývame neurčitý integrál funkcie* f. *Označujeme* $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Poznámka 2 1. *Je zrejmé, že označením* $\int f(x)\,dx$ *nie je výsledok jednoznačne určený. Je to jedna z primitívnch funkcií funkcie* f. *Teda* $\int \sin x\,dx = -\cos x$ *rovnako dobre, ako* $\int \sin x\,dx = -\cos x + 356$. *Teda tieto výsledky sa môžu líšiť o koštantu. Preto, keď napíšeme*

$$\int \sin x\,dx = \int \sin x\,dx,$$

nebude to znamenať, že

$$-\cos x = -\cos x + 356,$$

ale že existuje konštanta $c \in \mathbb{R}$ *taká, že*

$$-\cos x + c = -\cos x + 356.$$

2. *Označenie* $F(x) = \int f(x)\,dx$ *nie je možné chápať ako rovnosť funkčných hodnôt. Rovnosť* $\int sin3d3 = -\cos 3$ *nedáva žiaden zmysel. Označenie* $\int f(x)\,dx$ *treba chápať ako úlohu o nájdení jednej z primtívnych funkcií funkcie* f *a rovnosť* $F(x) = \int f(x)\,dx$ *ako jeden z možných výsledkov uvedenej úlohy.*

1.2.2 Metóda per partes

Veta 13 *Nech funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$ *a* $g : I \to \mathbb{R}$ *sú spojito diferencovateľné na intervale* I. *Nech* $H : I \to \mathbb{R}$ *je primitívna funkcia funkcie* $(f'g) : I \to \mathbb{R}$. *Potom* $(fg - H) : I \to \mathbb{R}$ *je primitívna funkcia funkcie* $(fg') : I \to \mathbb{R}$. *V symbolike neurčitých integrálov to znamená, že*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Dôsledok 1 *Nech funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$ *a* $g : I \to \mathbb{R}$ *sú spojito diferencovateľné na intervale* I *a body* $a, b \in I$ *sú ľubovolne zvolené. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

1.2.3 Substitučná metóda

Veta 14 *(Prvá veta o substitučnej metóde) Nech* I *a* J *sú intervaly,* $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ *je spojito diferencovateľná a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Nech* $F : I \to \mathbb{R}$ *je primitívna funkcia funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$. *Potom* $(F \circ \varphi) : J \to \mathbb{R}$ *je primitívna funkcia funkcie* $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$.

Dôsledok 2 *Nech* I *a* J *sú intervaly,* $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ *je spojito diferencovateľná a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Nech* $\alpha, \beta \in J$ *sú ľubovolné. Potom*

$$\int_\alpha^\beta ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Veta 15 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech* I *a* J *sú intervaly,* $\varphi : J \to I$ *je spojito diferencovateľná bijekcia a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Nech* $G : J \to \mathbb{R}$ *je primitívna funkcia funkcie* $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$. *Potom* $(G \circ \varphi^{-1}) : I \to \mathbb{R}$ *je primitívna funkcia funkcie* $f : I \to \mathbb{R}$.

Dôsledok 3 *Nech* I *a* J *sú intervaly,* $\varphi : J \to I$ *je spojito diferencovateľná bijekcia a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Potom pre každé* $a, b \in I$ *platí:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

1.2.4 Niektoré význačné substitúcie

I. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\,dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Vypočítame najmenší spoločný násobok $k = \operatorname{lcm}\{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$.

2. Položíme
$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t = \varphi^{-1}(x).$$

3. Potom
$$x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a} = \varphi(t).$$

4. Ďalej
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1}\,dt.$$

5. Ešte máme
$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{preto} \quad \sqrt[k_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{\frac{k}{k_i}}.$$

6. Je zrejmé, že $\frac{k}{k_i}$ je celé číslo. Preto po dosadení do pôvodného integrálu dostávame integrál
$$\int R\left(c, \frac{b - dt^k}{ct^k - a}, t^{\frac{k}{k_1}}, t^{\frac{k}{k_2}}, \ldots, t^{\frac{k}{k_s}}\right) \frac{ad - bc}{(ct^k - a)^2} kt^{k-1}\,dt,$$
čo je integrál z racionálnej funkcie.

II. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\,dx,$$

kde $a > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x.$$

2. Potom
$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2.$$
V tejto rovnosti vypadne druhá mocnina x. Preto môžeme vypočítať x.

3. Dostávame
$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t} = \varphi(t).$$

4. Potom
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\,dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x = \pm t \pm \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}.$$

6. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$$
je prevedený na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c,\ \frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}\ ,\ \pm t \pm \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b \pm 2\sqrt{a}t}\right)\left(\frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\right)\,dt.$$

III. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$$

kde $c > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$
Pre jednoduchosť budeme uvažovať len o jednej zo štyroch možností
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} - xt.$$

2. Potom
$$ax^2+bx+c = c - 2\sqrt{c}xt + x^2t^2.$$
V tejto rovnosti vypadne c, preto môžeme krátiť $x-$om. Vypočítame x.

3. Dostávame
$$x = \frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a} = \varphi(t).$$

4. Potom
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{c}a)}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} - xt = \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}\right) t.$$

6. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx$$
je prevedený na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c,\ \frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a},\ \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}\right) t\right) \left(\frac{-2(t^2\sqrt{c}+tb+\sqrt{c}a)}{(t^2-a)^2}\right)\, dt.$$

IV. **Integrály typu**
$$\int R\left(c, \sin x, \cos x\right)\, dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame
$$x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom
$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

4. Ďalej
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, \sin x, \cos x\right)\, dx$$
prevedieme na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c,\ \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

V. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x\right)\, dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\operatorname{tg} x = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame
$$x = \operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom
$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

4. Ďalej
$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x\right)\, dx$$
prevedieme na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c, t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

1.2.5 Príklady

Časť I

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \sin x dx$. .... $[\sin x - x\cos x]$.
2. $\int (x^3 - x + 1)e^{2x} dx$. .... $\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right)\right]$.
3. $\int_0^\pi (2x^2 + 3)\cos 2x dx$. .... $[\pi]$.
4. $\int x \log_{10} 2x dx$. .... $\left[\frac{x^2}{2}\left(\log_{10} 2x - \frac{1}{2\ln 10}\right)\right]$.
5. $\int e^x \sin x dx$. .... $\left[\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right]$.

6. $\int \frac{e^x}{(e^x+3)^7} dx.$ .... $\left[-\frac{1}{6(e^x+3)^6}\right].$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2}\arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}}\right].$

8. $\int \frac{x}{\sqrt{3-4x^2}} \mathrm{d}x.$ .... $\left[-\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2}\right].$

9. $\int \cos(\ln x)\, dx.$ .... $\left[\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)\right].$

10. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx.$ .... $[5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|].$

11. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3} dx.$ .... $\left[2\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-2\ln|x+1|\right].$

12. $\int \frac{1}{x^3+1} dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right].$

13. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7} dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}(\ln 42-\ln 15)-\frac{3}{\sqrt{6}}\left(\operatorname{arctg}\frac{6}{\sqrt{6}}-\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right].$

14. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+1}{\cos^4 x+\cos^3 x} \sin x dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}+2\ln\frac{3}{2}\right].$

15. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}} dx.$ .... $\left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}}-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|\right].$

16. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right),\ t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\right].$

17. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}} dx.$ .... $\left[\frac{3t}{2}-\frac{\ln|1-2t|}{2}-\frac{33}{4(1-2t)},\ t=-x+\sqrt{x^2+x+3}\right].$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}} dx.$ .... $\left[-2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x}\right)\right].$

19. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$ .... $[-8,345].$

20. $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5} dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$

21. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x+1} dx.$ .... $\left[\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right].$

22. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x} dx.$ .... $[1,246].$

23. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+2\cos x} dx.$ .... $[0,152].$

24. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

    (a) $y=x\ln x,\ x=\frac{1}{2},\ x=2,\ y=0.$ .... $\left[-\frac{9}{16}+\frac{15}{8}\ln 2\right].$

(b) Parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1, 3]$, $B = [4, 0]$. .... $\left[\frac{9}{4}\right]$.

25. Vypočítajte objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x. Polomery jeho podstáv sú $r = 1$, $R = 2$ a výška $v = 3$. .... $[7\pi]$.

Časť II

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x \operatorname{arctg} x dx$. .... $\left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x\right]$.
2. $\int x^2 e^{3x} \mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2)\right]$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x) \sin x dx$. .... $\left[\frac{2}{5}e^{\pi} + \frac{1}{5}\right]$.
4. $\int x \ln x^2 dx$. .... $\left[\frac{x^2}{2}(\ln x^2 - 1)\right]$.
5. $\int \ln(x^2 + 1) dx$. .... $\left[x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x\right]$.
6. $\int\limits_1^e \ln^2 x \mathrm{d}x$. .... $[(e - 2)]$.
7. $\int \frac{1}{4+3x^2} \mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$.
8. $\int \frac{x}{4+3x^2} \mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{1}{6} \ln(4 + 3x^2)\right]$.
9. $\int \frac{x}{(x^2+1)^3} \mathrm{d}x$. .... $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right]$.
10. $\int e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$. .... $\left[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)\right]$.
11. $\int e^x \operatorname{cotg} e^x \mathrm{d}x$. .... $[\ln|\sin e^x|]$.
12. $\int x \sqrt[3]{x + 2} \mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{3}{7} \sqrt[3]{(x + 2)^7} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x + 2)^4}\right]$.
13. $\int \frac{1-x}{x^2+x} dx$. .... $[\ln|x| - 2\ln|x + 1|]$.
14. $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2} dx$. .... $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x - 2| - 2\ln|x + 1|\right]$.
15. $\int \frac{x}{x^3-3x+2} dx$. .... $\left[\frac{2}{9} \ln|x - 1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} \ln|x + 2|\right]$.
16. $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5} dx$. .... $\left[2\ln|x + 5| - \ln|x + 1| - \frac{3}{x+1}\right]$.
17. $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7} dx$. .... $\left[\frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 7) - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}}\right]$.

18. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7}dx.$
$\left[\frac{3}{10}\ln|x-1|-\frac{3}{20}\ln\left(x^2+2x+7\right)+\frac{\sqrt{6}}{15}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right].$

19. $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2}dx.$ .... $\left[\frac{5x^2}{2}+\ln|x-2|-2\ln|x+1|\right].$

20. $\int \frac{e^x+10}{(e^{2x}-2e^x+5)}dx.$ .... $\left[2x-\ln\left|e^{2x}-2e^x+5\right|+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)\right].$

21. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-6}dx.$ .... $\left[\ln\sqrt{5}\right].$

22. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2}e^x\mathrm{d}x.$ .... $[\ln 2+\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2].$

23. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x+3}dx.$
$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2 x+\sin x+3\right)-\frac{\sqrt{11}}{11}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{11}\left(2\sin x+1\right)\right)\right].$

24. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x)\sin x}{\cos^2 x-\cos x-2}dx.$ .... $[-3\ln 2].$

25. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x+\sin^2 x+\sin x}dx.$
$\left[\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\ln|\sin^2 x+\sin x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+\sin x\right)\right]\right].$

26. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}dx.$ .... $[6\ln(1+\sqrt[6]{x})].$

27. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx.$ .... $[7+\ln 4].$

28. $\int \frac{1-\sqrt[6]{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}}dx.$
$\left[\ln|x+1|-3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)\right].$

29. $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}dx.$ .... $\left[\ln\left(2x+2\sqrt{2x-1}\right)+\frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}\right].$

30. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}dx.$ .... $\left[2\sqrt{x-1}-\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)^4-\frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\right].$

31. $\int\limits_{1}^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x.$ .... $\left[8+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right].$

32. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}}dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)\right)\right]$

33. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx.$ .... $\left[\ln\left|\frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}\right|\right].$

34. $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$ .... $[2\pi].$

35. $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$ .... $\left[-2\mathrm{arctg}\, t,\ t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x}\right].$

36. $\int\limits_0^4 \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{4}{45}\right].$

37. $\int \frac{1}{3-\cos x}dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)\right].$

38. $\int \frac{1}{3+\cos x+\sin x}dx.$ .... $\left[\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{7}\left(2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}{7}\right)\right].$

39. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}dx.$ .... $\left[-\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\right].$

40. $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}dx.$ .... $\left[2(\ln|t-1|-\ln|t|-\mathrm{arctg}\, t),\ t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right].$

41. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}\, x)^2}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right].$

42. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x+2}.$ .... $\left[\frac{1}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\mathrm{tg}\, x\right)\right].$

43. $\int \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1}dx.$ ...... $\left[x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right|+\mathrm{arctg}\,(x-1)\right].$

44. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 5x\cos x\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{6}\right]$

45. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y=\frac{27}{x^2+9},\ y=\frac{x^2}{6}.$ .... $\left[\frac{3}{2}\,(3\pi-2)\right].$

   (b) $y=\ln x,\ \ y=\ln^2 x.$ .... $[3-e].$

46. Kruh $x^2+y^2=8$ je rozdelený parabolou $y=\frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajte obsah menšej z nich. .... $\left[2\pi+\frac{4}{3}\right].$

47. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y=\frac{2x}{\pi},\ y=\sin x,\ x\geq 0.$ .... $\left[\frac{\pi^2}{12}\right].$

Časť III

Vypočítajte nasledujúce integrály:

1. $\int x\ln x dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right].$

2. $\int xe^{-x}dx.$ .... $[-xe^{-x}-e^{-x}].$

3. $\int \mathrm{arctg}\, x dx.$ .... $\left[x\mathrm{arctg}\, x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right].$

4. $\int x^2 3^x dx.$ .... $\left[\frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2-\frac{2x}{\ln 3}+\frac{2}{(\ln 3)^2}\right)\right].$

5. $\int x \operatorname{arccotg} x \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arccotg} x + \frac{x}{2}\right].$

6. $\int_0^\pi x^2 \sin x dx.$ .... $\left[\pi^2 - 4\right].$

7. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arccotg} x \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right].$

8. $\int \frac{x^2}{5+x^3} dx.$ .... $\left[\frac{1}{3} \ln |5 + x^3|\right].$

9. $\int \frac{1}{3+9x^2} dx.$ .... $\left[\frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)\right].$

10. $\int \frac{x}{3+9x^2} dx.$ .... $\left[\frac{1}{18} \ln(3 + 9x^2)\right].$

11. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$ .... $\left[\frac{-1}{2\sin^2 x}\right].$

12. $\int \frac{\sin x}{\cos x - 1} dx.$ .... $\left[-\ln|\cos x - 1|\right].$

13. $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}} dx.$ .... $\left[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}\right].$

14. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{\sin x + \cos x}} dx.$ .... $\left[-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^3}\right].$

15. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}\right].$

16. $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2} \mathrm{d}x.$ .... $\left[2\ln|x-3| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right].$

17. $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)} \mathrm{d}x.$ .... $\left[2\ln|x-2| + \ln|x-3| - \frac{3}{x-2}\right].$

18. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx.$ .... $\left[\ln\left(x^2+2x+5\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right].$

19. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+7} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right].$

20. $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - 3\ln|x+1|\right].$

21. $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1}\right].$

22. $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)} \mathrm{d}x.$ ... $\left[\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$

23. $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{4}\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right].$

24. $\int\limits_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right].$

25. $\int\limits_3^4 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x} \mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln\frac{1}{24}\right].$

26. $\int\limits_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{5}{2}-\ln 3\right].$

27. $\int\limits_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\ln 2+\frac{17}{8}\right].$

28. $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{6}\text{arctg }\left(\frac{2}{3}(e^x-1)\right)\right].$

29. $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10}\mathrm{d}x.$ .... $[x-2\ln|e^x-2|+3\ln|e^x-5|].$

30. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}dx.$ .... $\left[6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\right)\right].$

31. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$ .... $\left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\,\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right].$

32. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx.$ .... $\left[2\sqrt{1+x}+\ln|\sqrt{1+x}-1|-\ln|1+\sqrt{1+x}|\right].$

33. $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}dx.$ .... $\left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|,\ t=\sqrt{2x+3}\right].$

34. $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$ .... $[\ln 9].$

35. $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]$

36. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}dx.$ .... $\left[\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right].$

37. $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}dx.$

$\left[2\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1},\ t=\sqrt{x^2-x+1}-x\right].$

38. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x}dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\text{arctg }\frac{\sqrt{2}}{2}-\text{arctg }\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right].$

39. $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}dx.$ .... $\left[\text{tg }\frac{x}{2}-\ln\left(\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$

40. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x-2}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln|\sin x-1|+\frac{2}{3}\ln(\sin x+2)\right].$

41. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}dx.$ .... $\left[\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\right].$

42. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{4-5\sin x}dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right].$

43. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\cos x-6}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{1}{5}\ln\frac{16}{27}\right].$

44. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{tg }x}{1+\text{tg }x}\mathrm{d}x.$ .... $\left[\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2\right].$

45. $\int \frac{1}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x} \mathrm{d}x$. .... $\left[\frac{\sqrt{14}}{14} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}} \operatorname{tg} x\right)\right]$.

46. $\int\limits_0^{2\pi} \cos 3x \cos 4x \mathrm{d}x$. .... $[0]$

47. Vypočítajte plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

    (a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1$. .... $\left[\frac{16}{3}\right]$.

    (b) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2$. .... $\left[\frac{8}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$.

48. Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \sin x$, $y = \frac{2x}{\pi}$. .... $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.