Nekonečné číselné rady

V príkladoch 1.–6. vyšetrite konvergenciu nekonečných číselných radov.

1.$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$, $\quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

2.$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2n^2}\right)$.

3.$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n+1}}$, $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!3^n}$.

4.$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{n^n}$, $\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3^n}\right)^{n+1}$

5.$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5}\right)^{2n}$, $\quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

6.$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, $\quad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^{n^3}$.

7. Vyšetrite konvergnenciu radu a nájdite súčet radu

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-(-2)^{n+1}}{2^{2n}}$$

8. Vyšetrite konvergenciu radu so striedavými znamienkami. Rozhodnite, či je rad absolútne alebo relatívne konvergentný.

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}. \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1},$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2-1}.$$

Výsledky: 1. a), b) konvergentný, 2. a), b) konvergentný, 3. a) divergentný, b) konvergentný, 4. a) divergentný, b)konvergentný, 5. a), b) konvergentný, 6. a) divergentný, b) konvergentný, 7. a) konvergentný, súčet radu $s = \frac{1}{3}$, b) konvergentný súčet radu $s = \frac{16}{3}$. 8. a) relat. konvergentný, b) divergentný, c) relat. konvergentný, d) abs. konvergentý.

Mocninové rady

1. Nájdite obor konvergencie a súčet radu

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}}(x+2)^n, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}x^n.$$

2. Nájdite obor konvergencie mocninových radov.

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}(x+1)^n,\ b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^{2n}}(x-2)^n.$$

$$c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}(x-5)^n, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n}(x+1)^n.$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-2)}{2^n}(x+3)^n, \quad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n.$$

3. Nájdite obor konvergencie mocninových radov.

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^{4n}}{n^2}, \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. Njdite Taylorov rad funkcie f v bode a.

$$a)\ f(x) = e^{2x+1},\ a=-1 \qquad b)\ f(x) = \cos^2 x,\ a=0,$$

$$c)\ f(x) = \sin 2x,\ a=\pi \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{x+1},\ a=1,$$

Výsledky: 1. a) $O_k = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, set radu $s(x) = \frac{-9}{2x+1}$, b) $O_k = (-2,2)$, set radu $s(x) = \frac{x}{x+2}$, 2. a) $O_k = \langle -3, 1)$, b) $O_k = (0,4)$, c) $O_k = R$, d) $O_k = \{-1\}$, e) $O_k = (-5,-1)$, f) $O_k = \langle -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$, 3. a) $O_k = \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$ b) $O_k = (-4,-2)$.

4. a) $e^{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{en!}(x+1)^n,\ \forall x \in R$,

b) $\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},\ \forall x \in R$,

c) $\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}(x-\pi)^{2n+1},\ \forall x \in R$,

d) $\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n,\ \forall x \in (-1,3)$.