## Funkcie ($D(f),\ f^{-1},\ g\circ f$).

1. Určte definičný obor funkcií:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \ln\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}\right)\\
f_2(x) &= \sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}\\
f_3(x) &= \arcsin\frac{x+2}{x-1}\\
f_4(x) &= \frac{x}{\ln\left(x^2-1\right)}\\
f_5(x) &= \frac{x}{\ln(3-x)}+\ln(4x-x^2).
\end{aligned}
$$

2. Určte definičný obor funkcie a zistite, či je $f$ párna alebo nepárna.

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,

b) $f(x)=\dfrac{4}{1+\sqrt{x^2-4}}$.

3. Určte $D(f)$ a nájdite inverznú funkciu k funkcii $f$.

a) $f(x)=\pi+\arcsin(2x+1)$,

b) $f(x)=\sqrt{\ln(x+1)}$

4. Dané sú funkcie $f$ a $g$. Určte definičné obory a obory hodnôt funkcií $f$ a $g$. Nájdite také zúženie funkcie $f$, aby existovala zložená funkcia $g\circ f|_A$ a určte ju.

a) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1},\quad g(x)=\sqrt{1-x^2}$,

b) $f(x)=\dfrac{x}{x+1},\quad g(x)=\ln(x-2)$,

c) $f(x)=x^2-x-1,\quad g(x)=\arccos x$.

### Výsledky.

1. $D(f_1)=(3,4\rangle$, $D(f_2)=\bigcup\limits_{k\in N}\langle-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\rangle$, $D(f_3)=(-\infty,-\frac12\rangle$, $D(f_4)=(-\infty,-\sqrt2)\cup(-\sqrt2,-1)\cup(1,\sqrt2)\cup(\sqrt2,\infty)$, $D(f_5)=(0,2)\cup(2,3)$.

2.a) $D(f)=(-2,2)$, nepárna, 2.b) $D(f)=(-\infty,-2\rangle\cup\langle2,\infty)$, párna.

3.a) $D(f)=\langle-1,0\rangle$, $f^{-1}(x)=\frac12(-\sin x-1)$,

3.b) $D(f)=\langle0,\infty)$, $f^{-1}(x)=e^{x^2}-1$.

4.a) $A=(-\infty,-\frac12\rangle$, $(g\circ f|_A)(x)=\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2}$,

4. b) $A=(-2,-1)$, $(g\circ f|_A)(x)=\ln\left(\frac{-x-2}{x+1}\right)$,

4. c) $A=\langle-1,0\rangle\cup\langle1,2\rangle$, $(g\circ f|_A)(x)=\arccos\left(x^2-x-1\right)$.

## Limity a derivácie funkcií.

1. Vypočítajte limity v krajných bodoch definičného oboru a načrtnite graf funkcie.

a) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac1x}}$,

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x-2}$,

c) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1-x)}$.

2. Vypočítajte limity funkcií.

a) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2+x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos 2x}{x^2-1}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x}+3}$.

e) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

f) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin 3x}{x},\quad a=0,\infty$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)$.

h) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{\operatorname{tg}2x}$.

3. Zistite $D(f)$, množinu bodov, v ktorých je $f$ spojitá a množinu bodov, v ktorých $\exists$ derivácia $f$. Vypočítajte $f^{-1}$.

a) $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}$,

b) $f(x)=\left(x^2-2x\right)e^x\ln x$,

c) $f(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{x}$,

d) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-35}$,

e) $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+4}$,

f) $f(x)=\operatorname{arcotg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

g) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}$.

### Výsledky.

1a) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1/2$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=1/2$, $\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$,

1b) $\lim_{x\to1+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-2+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-2-}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$,

1c) $\lim_{x\to1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$,

2a) $-1/3$, 2b) $0$, 2c) $0$, 2d) $\infty$, 2e) $1/20$, 2f) $3$, $0$, 2g) $0$, 2h) $0$

3a) $D(f)=D(f')=R\setminus\{k\pi,k\in Z\}$, $f'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$,

3b) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=e^x\left[(x^2-2)\ln x+\frac1x\right]$,

3c) $D(f)=D(f')=R\setminus\{0\}$, $f'(x)=\frac{e^x(x^2+x-1)}{x^2}$,

3d) $D(f)=(-\infty,-7\rangle\cup\langle5,\infty)$, $D(f')=(-\infty,-7)\cup(5,\infty)f'(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-35}}$, 3e) $D(f)=D(f')=R$, $f'(x)=\frac{x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+4}}$,

3f) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$,

3g) $D(f)=D(f')=(0,\infty)$, $f'(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+1}+\frac{\ln(x^2+1)}{2x\sqrt{x}}$.

4a) $t\colon y-2=-(x-3)$, $n\colon y-2=(x-3)$, 4b) $t\colon y=-x$, $n\colon y=x$, 4c) $t\colon y=-x$, $n\colon y=x$.

1. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie v bode $(a, f(a))$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1\,,\ a = 3$

b) $f(x) = e^{-x}\cos 2x\,,\ a = 0\,.$

c) $f(x) = e^{x^2}\ln(1-x)\,,\ a = 0\,.$

2. Vyšetrite monotónnosť a nájdite lokálne extrémy funkcie.

a) $f(x) = x^4 - 18x^2 + 9\,,$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}\,,$

c) $f(x) = e^{(x^2+1)}\,,$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}\,.$

3. Nájdite asymptoty funkcie.

a) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x\,,$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - x - 2}\,,$

c) $f(x) = (x+3)e^{-x-1}\,,$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{2x}\,.$

4. Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5+1}{x^4-1}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x-3}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\frac{1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^x - x}{\ln(1-x^2)}$

5. Vypočítajte limity

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x+1)e^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

6. Vyšetrite priebeh funkcie a načrtnite jej graf (D(f), nulové body, spojitosť, párnosť, nepárnosť, periodičnosť, asymptoty, intervaly monotónnosti, konvexnosti a konkávnosti, lokálne extrémy, inflexné body, graf obor hodnôt)

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

c) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

g) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$

h) $f(x) = (x+2)e^{-x}\,.$

**Výsledky:** 1a) $t\colon y-2 = -(x-3)\,,\ n\colon y-2 = (x-3)\,,$ 1b),c) $t\colon y=-x\,,\ n\colon y = x\,.$ 2a) na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle 0,3\rangle$ klesajúca, na $\langle -3,0\rangle\,,\ \langle ,\infty)$ rastúca, ostré l.min. $f(-3)=f(3)=-72\,,$ o.l.max. $f(0)=9\,;$ b) Na $(-\infty,-1)\,,\ (-1,2)\,,\ (2,\infty)$ klesajúca, lokálne extrémy nem. c) na $(-\infty,0\rangle$ kles., na $\langle 0,\infty)$ rast., $f(0)=e$ o.l.min., d) na $(0,1),(1,e\rangle$ kles., na $\langle e,\infty)$ rast., $f(e)=e$ o.l.max., 3a) $y = x-\frac{\pi}{2}$ v $\infty$, $y = x+\frac{\pi}{2}$ v $-\infty$, 3b) $y = x+1$ v $-\infty$, $x = 2$, $x=-1\,,$ 3c) $y=0$ v $\infty\,,$ 3d) $y=0$ v $-\infty$, $x=1\,,$ 4a) $-\frac{5}{4}\,,$ b) $0\,,$ c) $1\,,$ d) $0\,,$ e) $1$ (nie je možné použiť L'Hospitalovo pravidlo!), 3f) $\frac{1}{4}\,,$ 3g) $-1\,,$ 5a) 0, 5b)0, 5c) 0, 5d) $e^{-\frac{1}{2}}\,.$ 6a) $D(f)=R$, nepárna, na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,\infty)$ rastúca, na $\langle -1,1\rangle\,,$ klesajúca, o.l.min $f(1)=-2\,,$ o.l.max. $f(-1)=2\,;$ na $(-\infty,0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0,\infty)$ r. konvexná, i. b. $x=0\,,$ asymptoty nem; 6b) $D(f) = (0,\infty)$, na $(0,e\rangle$ a $\langle 1,\infty)$ rastúca, na $\langle e,\infty)\,,$ klesajúca, o.l.max. $f(e)=\frac{1}{e}\,;$ na $(0,\sqrt{e^3}\rangle$ r. konkávna, na $\langle\sqrt{e^3},\infty)$ r. konvexná, i. b. $x=\sqrt{e^3}$, asymptoty $x=0$, $y=0$; 6c) $D(f) = R\setminus\{-1\}$, na $(-\infty,-2\rangle$ a $\langle 0,\infty)$ rastúca, na $\langle -2,-1)$ a $(-1,0\rangle$ klesajúca, o.l.min $f(0)=0\,,$ o.l.max. $f(-2)=-4\,;$ na $(-\infty,-1)$ r. konkávna, na $(-1,\infty)$ r. konvexná, i. b. nemá, asymptoty $x=-1$, $y=x-1\,;$ 6d) $D(f)=R$, nepárna, na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,\infty)$ klesajúca, na $\langle -1,1\rangle\,,$ rastúca, o.l.min $f(-1)=-\frac{1}{2}\,,$ o.l.max. $f(1)=\frac{1}{2}\,;$ na $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$ a $\langle\sqrt{3},\infty)$ r. konvexná, na $\langle -\sqrt{3},\sqrt{3}\rangle$ r. konkávna, i. b. $x=\pm\sqrt{3}$, asymptota $y=0$; 6e) $D(f)=R\setminus\{-1,1\}$, párna, na $(-\infty,-1)$ a $(-1,0\rangle$ klesajúca, na $\langle 0,1)$ a $(1,\infty)$ rastúca, o.l.min $f(0)=1\,,$ na $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$ r. konkávna, na $(-1,1)$ r. konvexn, i. b. nem, asymptoty $y=0$, $x=\pm 1$; 6f) $D(f) = R\setminus\{-1\}$, na $(-\infty,-1)$ a $(-1,0\rangle$ klesajúca, na $\langle 0,\infty)$ rastúca, o.l.min $f(0)=1\,,$ na $(-\infty,-1)$ r. konkvna, na $(-1,\infty)$ r. konvexn, i. b. nem, asymptoty $x=-1$; 6g) $D(f)=R$, na $(-\infty,-1\rangle$ a $\langle 1,\infty)$ rastúca, na $\langle -1,1\rangle$ klesajúca, o.l.min $f(1)=1-\frac{\pi}{2}\,,$ o.l.max $f(-1)=-1+\frac{\pi}{2}\,,$ na $(-\infty,0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0,\infty)$ r. konvexná, i. b. $x=0\,,$ asymptoty $y=x-\pi$ v $\infty\,,$ $y=x+\pi$ v $-\infty$; 6h) $D(f)=R\,,$ na $(-\infty,-1\rangle$ rastúca, na $\langle 1,\infty)$ klesajúca, o.l.max $f(-1)=e\,,$ na $(-\infty,0\rangle$ r. konkávna, na $\langle 0,\infty)$ r. konvexná, i. b. $x=0\,,$ asymptoty $y=0$ v $\infty\,.$