LINEÁRNA ALGEBRA

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.
KM FEI STU, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
23. 2. 2002

1. Matice

Hodnosť matice.

Veta 1.1. Nech matica $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ jednou ERO resp. ESO. Potom platí

(1) ak sú riadky matice $\mathbf{A}$ lineárne nezávislé, tak sú lineárne nezávislé aj riadky matice $\mathbf{B}$.
(2) ak sú riadky matice $\mathbf{A}$ lineárne závislé, tak sú lineárne závislé aj riadky matice $\mathbf{B}$.
(3) maximálny počet lineárne nezávislých riadkov v maticiach $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je rovnaký.

Dôkaz

Nech matica $\mathbf{A}$ má riadky $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_m}$ a nech matica $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ pomocou ERO $\mathbf{A_2} := \mathbf{A_2} + \alpha\mathbf{A_1}$. Potom riadkami matice $\mathbf{B}$ sú $\mathbf{B_1} = \mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_2} = \mathbf{A_2} + \alpha\mathbf{A_1}$, $\mathbf{B_3} = \mathbf{A_3}, \ldots, \mathbf{B_m} = \mathbf{A_m}$.

(1) Nech riadky matice $\mathbf{A}$ sú lineárne nezávislé.
Zistime, pre aké čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, platí

$$\alpha_1\mathbf{A_1} + \alpha_2(\mathbf{A_2} + \alpha\mathbf{A_1}) + \alpha_3\mathbf{A_3} + \cdots + \alpha_m\mathbf{A_m} = \mathbf{0}$$

Túto rovnosť môžeme upraviť na

$$(\alpha_1 + \alpha_2\alpha)\mathbf{A_1} + \alpha_2\mathbf{A_2} + \alpha_3\mathbf{A_3} + \cdots + \alpha_m\mathbf{A_m} = \mathbf{0}$$

Z lineárnej nezávislosti vektorov $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, \ldots, \mathbf{A_m}$ vyplýva

$$\alpha_1 + \alpha_2\alpha = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \ldots,\ \alpha_m = 0$$

odkiaľ

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,\ \ldots,\ \alpha_m = 0$$

To však znamená, že riadky matice $\mathbf{B}$ sú lineárne nezávislé.

(2) Nech teraz riadky matice $\mathbf{A}$ sú lineárne závislé. Existujú teda čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, z ktorých aspoň jedno je rôzne od nuly tak, že

$$\alpha_1\mathbf{A_1} + \alpha_2\mathbf{A_2} + \alpha_3\mathbf{A_3} + \cdots + \alpha_m\mathbf{A_m} = \mathbf{0}$$

Táto rovnosť sa dá upraviť na

$$(\alpha_1 - \alpha_2\alpha)\mathbf{A_1} + \alpha_2(\mathbf{A_2} + \alpha\mathbf{A_1}) + \alpha_3\mathbf{A_3} + \cdots + \alpha_m\mathbf{A_m} = \mathbf{0}$$

a pritom aspoň jedno z čísel $\alpha_1 - \alpha_2\alpha,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ je rôzne od nuly. To však znamená, že riadky matice $\mathbf{B}$ sú lineárne závislé.

(3) Nech maximálny počet lineárne nezávislých riadkov v matici $\mathbf{A}$ je r a v matici $\mathbf{B}$ je s. Nech v skupine r lineárne nezávislých riadkov matice $\mathbf{A}$ nie je druhý riadok. Potom tieto riadky sú aj v matici $\mathbf{B}$, a preto $r \leq s$. Ak sa v tejto skupine r lineárne nezávislých riadkov matice $\mathbf{A}$ druhý riadok nachádza, stačí ho nahradiť riadkom $\mathbf{A_2} + \alpha\mathbf{A_1}$ a dostaneme r lineárne nezávislých riadkov matice $\mathbf{B}$. Takže opäť $r \leq s$. Na druhej strane matica $\mathbf{A}$ vznikne z matice $\mathbf{B}$ pomocou ERO $\mathbf{B_2} := \mathbf{B_2} - \alpha\mathbf{B_1}$, a tak na základe predošlých úvah $s \leq r$. Potom však musí platiť $r = s$.

Nech teraz matica $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ pomocou ESO $\mathbf{S_2} := \mathbf{S_2} + \alpha\mathbf{S_1}$, kde $\mathbf{S_1}, \mathbf{S_2}$ sú prvý a druhý stĺpec matice $\mathbf{A}$. Pre lineárnu závislosť či nezávislosť riadkov matice $\mathbf{A}$ resp. $\mathbf{B}$ je rozhodujúce či rovnosť

$$\alpha_1\mathbf{A_1} + \alpha_2\mathbf{A_2} + \alpha_3\mathbf{A_3} + \cdots + \alpha_m\mathbf{A_m} = \mathbf{0}$$

resp.

$$\alpha_1\mathbf{B_1} + \alpha_2\mathbf{B_2} + \alpha_3\mathbf{B_3} + \cdots + \alpha_m\mathbf{B_m} = \mathbf{0}$$

je splnená aj pre nenulové či len pre nulové čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Rozpíšme tieto dve rovnosti po zložkách. Pritom si treba uvedomiť, že ak $\mathbf{A}_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \ldots, a_{jn})$, tak $\mathbf{B}_j = (a_{j1}, a_{j2} + \alpha a_{j1}, a_{j3}, \ldots, a_{jn})$. Získame tak dve sústavy lineárnych rovníc o neznámych $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

$$\begin{array}{l}
a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + a_{31}\alpha_3 + \cdots + a_{m1}\alpha_m = 0\\
a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{32}\alpha_3 + \cdots + a_{m2}\alpha_m = 0\\
a_{13}\alpha_1 + a_{23}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + \cdots + a_{m3}\alpha_m = 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + a_{3n}\alpha_3 + \cdots + a_{mn}\alpha_m = 0
\end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\alpha_1 & + & a_{21}\alpha_2 & + & a_{31}\alpha_3 & + \cdots & + & a_{m1}\alpha_m & = 0\\
(a_{12}+\alpha a_{11})\alpha_1 & + & (a_{22}+\alpha a_{21})\alpha_2 & + & (a_{32}+\alpha a_{31})\alpha_3 & + \cdots & + & (a_{m2}+\alpha a_{11})\alpha_m & = 0\\
a_{13}\alpha_1 & + & a_{23}\alpha_2 & + & a_{33}\alpha_3 & + \cdots & + & a_{m3}\alpha_m & = 0\\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\
a_{1n}\alpha_1 & + & a_{2n}\alpha_2 & + & a_{3n}\alpha_3 & + \cdots & + & a_{mn}\alpha_m & = 0
\end{array}$$

Jasne vidieť, že sú tieto sústavy ekvivaletné, lebo druhá sústava vznikne z prvej pripočítaním α-násobku prvej rovnice k druhej. To ale znamená, že obidve sústavy majú rovnaké riešenia, a teda riadky matice $\mathbf{A}$ sú lineárne závislé práve vtedy, keď sú lineárne závislé riadky matica $\mathbf{B}$. Keby sme v tejto časti dôkazu skupinu všetkých riadkov matice $\mathbf{A}$ nahradili skupinou M_A jej r riadkov a skupinu všetkých riadkov matice $\mathbf{B}$ skupinou M_B jej riadkov, pričom $M_B = M_A$, ak M_A neobsahuje riadok A_2, v opačnom prípade M_B vnikne z M_A nahradením riadku A_2 riadkom $A_2 + \alpha A_1$, tak prídeme k záveru, že M_A, M_B sú súčasne lineárne závislé alebo súčasne lineárne nezávislé. Z toho potom vyplýva, že maximálny počet lineárne nezávislých riadkov v oboch maticiach je rovnaký.

Dôkaz pre iné ERO či ESO je podobný.

□

Veta 1.2. Nech matica $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ jednou ERO resp. ESO. Potom platí:

(1) Stĺpce matice $\mathbf{A}$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď sú lineárne nezávislé stĺpce matice $\mathbf{B}$.
(2) Maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcov v maticiach $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ je rovnaký.

Dôkaz je podobný ako v predchádzajúcej vete.

□

Veta 1.3. Nenulové riadky stupňovitej matice sú linárne nezávislé.

Dôkaz

Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{pmatrix}$ je stupňovitá matica typu $m \times n$, kde $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_s$ sú jej nenulové riadky a $\mathbf{A}_{s+1} = \cdots = \mathbf{A}_m = \mathbf{0}$, $\mathbf{A_j} = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})$ pre $j \in \{1, \ldots, s\}$ a nech a_{jk_j} je vedúci prvok riadku $\mathbf{A}_j$. Potom $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_s \leq n$ a $a_j k = 0$ pre $k < k_j$.
Zistime, pre aké čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ platí

$$\alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \cdots + \alpha_s\mathbf{A}_s = \mathbf{0}$$

Zapíšme to po zložkách, pričom uvedieme len zložky na miestach $k_1, k_2, \ldots, k_s$

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 a_{1k_1} & = 0\\
\alpha_1 a_{1k_2} + \alpha_2 a_{2k_2} & = 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\alpha_1 a_{1k_s} + \alpha_2 a_{2k_s} + \cdots + \alpha_s a_{sk_s} & = 0
\end{array}$$

Táto sústava lineárnych rovníc má jediné riešenie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = (0, \ldots, 0)$, čo znamená, že nenulové riadky matice $\mathbf{A}$ sú lineárne nezávislé.

□

Veta 1.4. V každej matici sa maximálny počet lineárne nezávislých riadkov rovná maximálnemu počtu lineárne nezávislých stĺpcov.

Dôkaz

Nech maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ je r. Pomocou ERO upravme maticu $\mathbf{A}$ na redukovanú stupňovitú maticu. Táto matica má práve r nenulových riadkov. Zameňme v nej poradie riadkov tak, aby vedúci prvok prvého riadku bol v prvom stĺpci, vedúci prvok druhého riadku v druhom stĺpci atď, až vedúci prvok r-tého riadku bol v r-tom stĺpci. Dostaneme tak maticu

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & b_{1\,r+1}, & \ldots, & b_{1n} \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & b_{2\,r+1}, & \ldots, & b_{2n} \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, & b_{3\,r+1}, & \ldots, & b_{3n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & 0. & \ldots, & 1, & b_{r\,r+1}, & \ldots, & b_{rn} \\ 0, & 0, & 0. & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & 0. & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}$$

Prvých r stĺpcov matice $\mathbf{B}$ je lineárne nezávislých a každý ďalší je ich lineárnou kombináciou napr.

$$\begin{pmatrix} b_1n \\ b_2n \\ b_3n \\ \vdots \\ b_rn \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{1n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_{2n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_{3n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + b_{rn} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

preto maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcov v matici $\mathbf{B}$ je tiež r. Matica $\mathbf{A}$ vznikne z matice $\mathbf{B}$ konečným počtom EO. Tie nemenia maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcov, preto v matici $\mathbf{A}$ maximálnym počtom lineárne nezávislých stĺpcov je r.

□

Definícia 1.1. *Hodnosťou matice* $\mathbf{A}$ nazývame maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice $\mathbf{A}$ a označujeme ju $h(\mathbf{A})$.

Veta 1.5. Nech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú matice typu $m \times n$, potom

(1) $h(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$,
(2) ak $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, tak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.
(3) $h(\mathbf{A}^T) = h(\mathbf{A})$

Dôkaz

Tvrdenie je priamym dôsledkom definície hodnosti matice a predchádzajúcich viet o maximálnom počte lineárne nezávislých riadkov matice.

□

Príklad 1.1. Zistite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé vektory

(1) $(1, 2, 0), (2, 1.2), (4, 0, 1)$
(2) $(2, 0, 3, 4), (-3, 1, 2, 1), (1, 1, 8, 9)$

Riešenie

Vektory zapíšeme do matice ako riadky a určíme jej hodnosť.

(1) $$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 2, & 1. & 2 \\ 4, & 0, & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-2\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-2\mathbf{R}_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & -3. & 2 \\ 0, & -2, & -3 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-2\mathbf{R}_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 0, & -1. & 5 \\ 0, & 0, & -13 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice je 3, preto vektory (všetky tri) sú lineárne nezávislé.

(2) $$\begin{pmatrix} 2, & 0, & 3, & 4 \\ -3, & 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 8, & 9 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-2\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2, & 0, & 3, & 4 \\ -3, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Matica $\mathbf{B}$ má dva nenulové riadky, jej hodnosť je najviac dva, a preto dané vektory (sú až tri) sú lineárne závislé.

■

Príklad 1.2. Určte hodnosť matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3, & x, & 10, & 1 \\ 2, & -1, & x, & 3 \\ 5, & 10, & 30, & -5 \end{pmatrix}$ v závislosti od parametra $x \in \mathbf{R}$.

Riešenie

$$\mathbf{A} \overset{\substack{\mathbf{S}_1:=:\mathbf{S}_4 \\ \mathbf{S}_2:=:\mathbf{S}_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & 3, & 10, & x \\ 3, & 2, & x, & -1 \\ -5, & 5, & 30, & 10 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-3\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_3:=\frac{1}{5}\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & 3, & 10, & x \\ 0, & -7, & x-30, & -1-3x \\ 0, & 4, & 16, & 2+x \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{\substack{\mathbf{R}_2:=:\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_3:=4\mathbf{R}_3+7\mathbf{R}_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & 3, & 10, & x \\ 0, & 4, & 16, & 2+x \\ 0, & 0, & 4x-8, & 10-5x \end{pmatrix}$$

Maticu $\mathbf{A}$ sme upravili na stupňovitú, ktorá má pre $x = 2$ dva, pre $x \neq 2$ tri nenulové riadky. Preto

ak $x = 2$, tak $h(\mathbf{A}) = 2$,
ak $x \neq 2$, tak $h(\mathbf{A}) = 3$.

■

Definícia 1.2. Matica typu $n \times n$ sa nazýva *štvorcová matica stupňa n.*
Štvorcová matica sa nazýva

diagonálna, ak všetky prvky mimo hlavnej diagonály sa rovnajú nule,
jednotková, ak je diagonálna a všetky prvky na hlavnej diagonále sú jednotky (označujeme ju $\mathbf{I}$ alebo $\mathbf{I}_n$),
horná trojuholníková, ak všetky prvky pod hlavnou diagonálou sú nuly,
dolná trojuholníková, ak všetky prvky nad hlavnou diagonálou sú nuly.

Príklad 1.3.

$$\begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{pmatrix} \text{ – diagonálna matica}$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ – jednotková matica}$$

$$\begin{pmatrix} 2, & -1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ – horná trojuholníková matica}$$

$$\begin{pmatrix} 2, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 3, & 0 \\ 3, & 5, & 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ – dolná trojuholníková matica}$$

■

Definícia 1.3. Štvorcová matica $\mathbf{A}$ stupňa n sa nazýva
regulárna, ak $h(\mathbf{A}) = n$,
singulárna, ak $h(\mathbf{A}) < n$.

Veta 1.6. Matica $\mathbf{A}$ je regulárna práve vtedy, keď $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{I}$.

Dôkaz

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa n. Ak $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{I}$, tak $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{I}) = n$, teda $\mathbf{A}$ je regulárna matica.

Nech $\mathbf{A}$ je regulárna matica, teda $h(\mathbf{A}) = n$. Maticu $\mathbf{A}$ je možné pomocou ERO upraviť na redukovanú stupňovitú maticu $\mathbf{B}$, ktorej hodnosť je tiež n. Vedúce prvky riadkov matice $\mathbf{B}$ sú jednotky a je ich n. Sú teda v každom stĺpci. Navyše, nad a pod vedúcimi prvkami sú len nuly. Takáto matica je práve jednotková, teda $\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

□

Operácie s maticami.

Definícia 1.4. Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^m$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_n^m$ sú matice typu $m \times n$. *Súčtom matíc* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ nazývame maticu

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{jk} + b_{jk})_n^m$$

Súčinom čísla α a matice $\mathbf{A}$ nazývame maticu

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{jk})_n^m$$

Príklad 1.4. Vypočítajte $\mathbf{A} - 3\,\mathbf{B}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5, & -4, & 3 \\ -2, & 7, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2, & -4, & 2 \\ 2, & 3, & -1 \end{pmatrix}$$

Riešenie

$$\mathbf{A} - 3\,\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5, & -4, & 3 \\ -2, & 7, & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6, & 12, & -6 \\ -6, & -9, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 8, & -3 \\ -8, & -2, & 3 \end{pmatrix}$$

■

Veta 1.7. Pre každé matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathbf{C}^{m \times n}$ a $\alpha \in \mathbf{C}$ platí

(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
(2) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{D}$
(3) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
(4) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Dôkaz

Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^m$, $\mathbf{B} = (b_{jk})_n^m$, $\mathbf{D} = (d_{jk})_n^m$. Potom

(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{jk})_n^m + (b_{jk})_n^m = (a_{jk} + b_{jk})_n^m = (b_{jk} + a_{jk})_n^m = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

(2) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{D})=(a_{jk})_n^m+((b_{jk})_n^m+(d_{jk})_n^m)=(a_{jk}+(b_{jk}+d_{jk}))_n^m=$

$$=((a_{jk}+b_{jk})+d_{jk})_n^m=(a_{jk}+b_{jk})_n^m+(d_{jk})_n^m=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{D}$$

(3) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha(a_{jk}+b_{jk})_n^m=(\alpha a_{jk}+\alpha b_{jk})_n^m=(\alpha a_{jk})_n^m+(\alpha b_{jk})_n^m=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$

(4) Matice $\mathbf{A}^T$ a $\mathbf{B}^T$ majú na (j,k)-tom mieste prvky $a_{k,j}$ a $b_{k,j}$. Matica $\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$ má potom na (j,k)-tom mieste prvok $a_{kj}+b_{kj}$, čo je práve prvok matice $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T$ na (j,k)-tom mieste.

□

Definícia 1.5. *Súčinom matíc* $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{m\times p}$, $\mathbf{B}\in\mathbf{C}^{p\times n}$ (v tomto poradí) nazývame maticu $\mathbf{D}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ definovanú takto: ak

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \vdots\\ \mathbf{A}_m\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\dots,\mathbf{B}_n),$$

kde $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\dots,\mathbf{A}_m$ sú riadky matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\dots,\mathbf{B}_n$ sú stĺpce matice $\mathbf{B}$, tak

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1, & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2, & \dots, & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_n\\ \mathbf{A}_2\mathbf{B}_1, & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2, & \dots, & \mathbf{A}_2\mathbf{B}_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathbf{A}_m\mathbf{B}_1, & \mathbf{A}_m\mathbf{B}_2, & \dots, & \mathbf{A}_m\mathbf{B}_n\end{pmatrix}$$

Súčin matíc $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ budeme označovať $\mathbf{AB}$.

Príklad 1.5. Vypočítajte $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BA}$, ak

(1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1, & -2, & 3\\ 0, & -1, & 2\end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{A}=(-3,\ 2,\ 1)$, $\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

(3) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ -1, & 2\end{pmatrix}$, $\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2, & 2\\ -2, & 2\end{pmatrix}$

Riešenie

(1) $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}2, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & -2, & 3\\ 0, & -1, & 2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}(2,\ 0)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, & (2,\ 0)\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}, & (2,\ 0)\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\\ (-1,\ 1)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, & (-1,\ 1)\begin{pmatrix}-2\\ -1\end{pmatrix}, & (-1,\ 1)\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+0\cdot0, & 2\cdot(-2)+0\cdot(-1), & 2\cdot3+0\cdot2\\ -1\cdot1+1\cdot0, & -1\cdot(-2)+1\cdot(-1), & -1\cdot3+1\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2, & -4, & 6\\ -1, & 1, & -1\end{pmatrix}$$

Súčin $\mathbf{BA}$ neexistuje, lebo počet stĺpcov matice $\mathbf{B}$ je iný ako počet riadkov matice $\mathbf{A}$.

(2) $\mathbf{AB}=(-3,\ 2,\ 1)\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=-3\cdot2+2\cdot2+1\cdot3=1$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 3\end{pmatrix}(-3,\ 2,\ 1)=\begin{pmatrix}2\cdot(-3), & 2\cdot2, & 2\cdot1\\ 2\cdot(-3), & 2\cdot2, & 2\cdot1\\ 3\cdot(-3), & 3\cdot2, & 3\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6, & 4, & 2\\ -6, & 4, & 2\\ -9, & 6, & 3\end{pmatrix}$$

(3) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ -2, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ -6, & 2 \end{pmatrix}$

$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ -2, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 4 \\ -4, & 4 \end{pmatrix}$

■

Poznámka 1.1.

(1) Násobenie matíc nie je komutatívne, lebo ako sme zistili v predchádzajúcom príklade, existujú také matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, že $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

(2) Ak $\mathbf{A} = (a_{js})_p^m, \mathbf{B} = (b_{sk})_n^p$, tak $\mathbf{AB} = (d_{jk})_n^m$, kde

$$d_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \cdots + a_{jp}b_{pk} = \sum_{s=1}^{p} a_{js}b_{sk}$$

Veta 1.8. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbf{C}^{n\times p}$, $\mathbf{G} \in \mathbf{C}^{p\times q}$, $\mathbf{H} \in \mathbf{C}^{p\times m}$, $\alpha \in \mathbf{C}$. Potom

(1) $\mathbf{AI}_n = \mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$
(2) $(\mathbf{AD})\mathbf{G} = \mathbf{A}(\mathbf{DG})$
(3) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{D} = \mathbf{AD} + \mathbf{BD}$
(4) $\mathbf{H}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{HA} + \mathbf{HB}$
(5) $\alpha(\mathbf{AD}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{D} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{D})$
(6) $(\mathbf{AD})^T = \mathbf{D}^T\mathbf{A}^T$

Dôkaz

Dokážeme druhú vlastnosť, ostatné sa dokazujú podobne. Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^m$, $\mathbf{D} = (d_{kr})_p^n$, $\mathbf{G} = (g_{rs})_q^p$, $\mathbf{AD} = (c_{jr})_p^m$, $\mathbf{DG} = (h_{ks})_q^n$. Potom

$$c_{jr} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}d_{kr}, \quad h_{ks} = \sum_{r=1}^{p} d_{kr}g_{rs}$$

Prvkom na (j,s)-tom mieste matice $(\mathbf{AD})\mathbf{G}$ je

$$\sum_{r=1}^{p} c_{jr}g_{rs} = \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}d_{kr} \right) g_{rs} = \sum_{r=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}d_{kr}g_{rs} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} a_{jk}d_{kr}g_{rs}$$

a prvkom na (j,s)-tom mieste matice $\mathbf{A}(\mathbf{DG})$ je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}h_{ks} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \sum_{r=1}^{p} d_{kr}g_{rs} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} a_{jk}d_{kr}g_{rs}$$

čo sú evidentne rovnaké čísla, preto $(\mathbf{AD})\mathbf{G} = \mathbf{A}(\mathbf{DG})$.

□

Sústavy lineárnych rovníc a niektoré maticové rovnice.

Veta 1.9. (Frobeniova veta) Sústava lineárnych rovníc má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.

Dôkaz

Ak použijeme označenie $\mathbf{S}_1,\ \mathbf{S}_2,\ \ldots,\ \mathbf{S}_n$ pre stĺpce matice $\mathbf{A}$ sústavy (1) a $\mathbf{B}$ pre pravú stranu tejto sústavy, tak sústavu (1) môžeme písať v tvare

$$x_1\mathbf{S}_1 + x_2\mathbf{S}_2 + \cdots + x_n\mathbf{S}_n = \mathbf{B}$$

Nech $(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)$ je riešenie sústavy (1), teda platí

$$q_1\mathbf{S}_1 + q_2\mathbf{S}_2 + \cdots + q_n\mathbf{S}_n = \mathbf{B}$$

Stĺpec $\mathbf{B}$ je lineárnou kombináciou stĺpcov matice sústavy, preto maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcov v matici sústavy a v rozšírenej matici sústavy je rovnaký, čiže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

Predpokladajme teraz, že matica sústavy a rozšírená matica sústavy majú rovnakú hodnosť. Teda, ak k matici sústavy pridáme jeden stĺpec - pravú sranu sústavy, tak hodnosť sa nezmení. To je možné, len keď stĺpec $\mathbf{B}$ je lineárnou kombináciou stĺpcov matice $\mathbf{A}$. Existujú teda také čísla $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, že

$$\alpha_1\mathbf{S}_1 + \alpha_2\mathbf{S}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{S}_n = \mathbf{B}$$

To ale znamená, že $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ je riešením sústavy.

□

Veta 1.10. Nech $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = r$, kde $\mathbf{A}$ je matica sústavy (1) o n neznámych a $\mathbf{B}$ je jej pravá strana. Potom

ak $r = n$, sústava (1) má práve jedno riešenie,

ak $r < n$, sústava (1) má nekonečne veľa riešení, pričom $n - r$ premenných je možné voliť ľubovoľne.

Dôkaz

Tvrdenie je iba preformulovaný poznatok získaný z Gaussovej eliminačnej metódy riešenia sústav lineárnych rovníc.

□

Príklad 1.6. Riešte v množine reálnych čísel sústavu lineárnych rovníc s parametrom $a \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} ax_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2a+2 \\ x_1 + 2ax_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ -a^2x_1 - x_2 + (1+a)x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Riešenie

Riešiť sústavu lineárnych rovníc s parametrom znamená zistiť pre aké hodnoty parametra má sústava riešenie a nájsť všetky riešenia. Na riešenie použijeme Gaussovu eliminačnú metódu.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & a & -2 & 1 & 2a+2 \\ -1 & 1 & 2a & -1 & -1 \\ 1 & -a^2 & -1 & 1+a & 1 \end{array}\right) \end{array} \overset{\substack{\mathbf{R}_1:=:\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_2:=:\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3+2\mathbf{R}_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2a & -1 & -1 \\ 0 & 1-a^2 & 2a-1 & a & 0 \\ 0 & 2+a & 4a-2 & -1 & 2a \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2a & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2a-1 & a & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 4a-2 & -1 & 2+a & 2a \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2a & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2a-1 & a & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2a-1 & 2a^2+a & 2a \end{array}\right) = \mathbf{D}$$

Ak $2a - 1 \neq 0$, t.j. $a \neq \frac{1}{2}$, matica $\mathbf{D}$ je stupňovitá. Jej prvé dva riadky sú nenulové. Hodnosť matice a rozšírenej matice sústavy je aspoň 2. Presnejšie, ak $a = -\frac{1}{2}$,

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

odkiaľ vyplýva, že hodnosť matice sústavy je 2 a hodnosť rozšírenej matice sústavy je 3. V tomto prípade sústava nemá riešenie. Ak $a \neq -\frac{1}{2}$, hodnosť oboch matíc je 3, čo je o 1 menej ako počet neznámych, preto má sústava nekonečne veľa riešení, ktoré vypočítame zo sústavy

$$\begin{aligned} -x_4 + 2ax_2 - x_3 + x_1 &= -1 \\ (2a-1)x_2 + ax_3 + (1-a^2)x_1 &= 0 \\ (-2a-1)x_3 + (2a^2+a)x_1 &= 2a \end{aligned}$$

Keď zvolíme $x_1 = t \in \mathbf{R}$, tak $x_3 = -\frac{2a}{2a+1} + at$, $x_2 = \frac{2a^2}{4a^2-1} - \frac{t}{2a-1}$, $x_4 = \frac{4a^3+8a^2-2a-1}{4a^2-1} + \frac{-2a^2+a-1}{2a-1}t$.

Ostáva nám vyriešiť prípad, keď $a = \frac{1}{2}$. Vtedy matica $\mathbf{D}$ nie je stupňovitá, upravme ju.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=4\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3+\mathbf{R}_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=4\mathbf{R}_2-3\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_1:=4\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_3}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 4 & -4 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=\frac{1}{8}\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3:=\frac{1}{4}\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_1:=-\frac{1}{4}\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Z tejto redukovanej stupňovitej matice môžeme hneď písať riešenie: $x_2 = t \in \mathbf{R}$, $x_4 = \frac{13}{8} + t$, $x_3 = -\frac{3}{8}$, $x_1 = \frac{1}{4}$.

Zhrnutie:

1. ak $a = -\frac{1}{2}$, tak $K = \emptyset$
2. ak $a = \frac{1}{2}$, tak $K = \left\{\left(\frac{1}{4},\ t,\ -\frac{3}{8},\ \frac{13}{8} + t\right); t \in \mathbf{R}\right\}$
3. ak $a \neq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, tak $K = \left\{\left(t,\ \frac{2a^2}{4a^2-1} - \frac{t}{2a-1},\ -\frac{2a}{2a+1} + at,\ \frac{4a^3+8a^2-2a-1}{4a^2-1} + \frac{-2a^2+a-1}{2a-1}t\right); t \in \mathbf{R}\right\}$

■

Operácia súčinu matíc nám umožňuje takýto zápis sústavy lineárnych rovníc (1)

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

alebo

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

kde $\mathbf{A}$ je matica sústavy, $\mathbf{X}$ je stĺpec neznámych a $\mathbf{B}$ je pravá strana sústavy.
Je to maticová rovnica. Poďme sa zaoberať všeobecnejším prípadom tejto rovnice, keď matica $\mathbf{B}$ môže mať viac stĺpcov ako jeden. Aby bol definovaný šúčin $\mathbf{AX}$ a rovnal sa matici $\mathbf{B}$, musia mať matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rovnaký počet riadkov a matica $\mathbf{X}$ musí mať toľko riadkov ako má matica $\mathbf{A}$ stĺpcov. Nech $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ je typu $m \times p$, potom $\mathbf{X}$ je matica typu $n \times p$. Nech $\mathbf{B}_k$ pre $k \in \{1, \ldots, p\}$ sú stĺpce matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{X}_k$ sú stĺpce matice $\mathbf{X}$, čiže $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2,\ \ldots,\ \mathbf{B}_p)$ a $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ \ldots,\ \mathbf{X}_p)$ Potom maticovú rovnicu

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \quad \text{čiže} \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ \ldots,\ \mathbf{X}_p) = (\mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2,\ \ldots,\ \mathbf{B}_p) \tag{5}$$

môžeme písať v tvare

$$\mathbf{AX_1} = \mathbf{B_1},\ \mathbf{AX_2} = \mathbf{B_2},\ \ldots,\ \mathbf{AX_p} = \mathbf{B_p} \tag{6}$$

Každá z maticových rovníc $\mathbf{AX_k} = \mathbf{B_k}$ je vlastne sústavou m lineárnych rovníc o n neznámych s maticou sústavy $\mathbf{A}$ a pravou stranou $\mathbf{B_k}$. Maticová rovnica (5) má riešenie práve vtedy, keď má riešenie každá sústava lineárnych rovníc v (6), t.j. keď $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B_k})$ pre $k \in \{1, \ldots, p\}$. To nastane práve vtedy, keď stĺpce matice $\mathbf{B}$ sú lineárnou kombináciou stĺpcov matice $\mathbf{A}$, čiže keď $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Počet riešení rovnice (5) závisí od počtu riešení sústav rovníc v (6). Môžeme vysloviť vetu:

Veta 1.11. Maticová rovnica $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, kde $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, $\mathbf{B}$ je typu $m \times p$ má riešenie práve vtedy, keď $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.
Ak $r = h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ a
$r = n$, rovnica (5) má práve jedno riešenie,
$r < n$, rovnica (5) má nekonečne veľa riešení.

□

Riešenie rovnice (5) dostaneme tak, že vyriešime všetky sústavy v (6). Keďže majú rovnakú maticu sústavy, môžeme ich riešiť naraz tak, že vedľa matice sústavy napíšeme pravú stranu prvej sústavy, hneď vedľa pravú stranu druhej sústavy až poslednej sústavy, čím napíšeme maticu $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Tú upravíme na stupňovitú maticu a z nej určíme riešenia jednotlivých sústav zo (6).

Príklad 1.7. Riešte maticovú rovnicu $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & -3, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 1 \\ 4, & 3, & 5, & 1 \\ 5, & 4, & 9, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3, & 1 \\ 1, & 3 \\ 5, & -7 \\ 9, & -11 \end{pmatrix}$$

Riešenie

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 2, & 1, & -3, & 1, & -3, & 1 \\ 3, & 2, & 1, & 1, & 1, & -3 \\ 4, & 3, & 5, & 1, & 5, & -7 \\ 5, & 4, & 9, & 1, & 9, & -11 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2:=2\mathbf{R}_2-3\mathbf{R}_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 2, & 1, & -3, & 1, & -3, & 1 \\ 0, & 1, & 11, & -1, & 11, & -9 \\ 0, & 1, & 11, & -1, & 11, & -9 \\ 0, & 1, & 11, & -1, & 11, & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\substack{\mathbf{R}_1:=\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 2, & 0, & -14, & 2, & -14, & 10 \\ 0, & 1, & 11, & -1, & 11, & -9 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{array}\right) \overset{\mathbf{R}_1:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cc} 1, & 0, & -7, & 1, & -7, & 5 \\ 0, & 1, & 11, & -1, & 11, & -9 \end{array}\right)$$

Ak použijeme označenie $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \\ x_3, & y_3 \\ x_4, & y_4 \end{pmatrix}$, tak z poslednej matice dostaneme sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 7x_3 + x_4 &= -7 \\ x_2 + 11x_3 - x_4 &= 11 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y_1 \quad - 7y_3 + y_4 &= 5 \\ y_2 + 11y_3 - y_4 &= -9 \end{aligned}$$

a z nich

$$x_3 = r \in \mathbf{R},\ x_4 = s \in \mathbf{R},\ x_1 = -7 + 7r - s,\ x_2 = 11 - 11r + s$$
$$y_3 = u \in \mathbf{R},\ y_4 = v \in \mathbf{R},\ y_1 = 5 + 7u - v,\ y_2 = -9 - 11u + v$$

Riešením danej rovnice je každá matica $\begin{pmatrix} -7 + 7r - s, & 5 + 7u - v \\ 11 - 11r + s, & -9 - 11u + v \\ r, & u \\ s, & v \end{pmatrix}$, kde $r, s, u, v \in \mathbf{R}$.

■

Maticovú rovnicu $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ riešime tak, že ju transponujeme, čím získame rovnicu $\mathbf{A}^T\mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$, ktorú už vieme riešiť.

Príklad 1.8. V množine reálnych čísel riešte rovnicu $\mathbf{AXB} = \mathbf{D}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5, & -1 \\ -1, & 5 \end{pmatrix}$$

Riešenie

Použitím substitúcie $\mathbf{XB} = \mathbf{Y}$ dostaneme rovnicu $\mathbf{AY} = \mathbf{D}$. Nájdime jej riešenie

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2, & 1 & 5, & -1 \\ -1, & 1 & -1, & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2, & 1 & 5, & -1 \\ 0, & 3 & 3, & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2, & 0 & 4, & -4 \\ 0, & 1 & 1, & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 0 & 2, & -2 \\ 0, & 1 & 1, & 3 \end{array}\right)$$

Rovnica má jedno riešenie, lebo $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{D}) = 2$ a počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je tiež 2. Tým riešením je zrejme $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 2, & -2 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}$. Ostáva nám vyriešiť rovnicu

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & -2 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}$$

Transponovaním dostaneme rovnicu

$$\begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \\ -1, & 1, & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}$$

Riešme ju

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1, & -1, & 1 & 2, & 1 \\ -1, & 1, & 1 & -2, & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1, & -1, & 1 & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 2 & 0, & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1, & -1, & 0 & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 1 & 0, & 2 \end{array}\right)$$

Hodnosť oboch matíc $\mathbf{B}^T$, $(\mathbf{B}^T|\mathbf{Y}^T)$ je 2, počet stĺpcov matice $\mathbf{B}^T$ je 3, takže jednu neznámu v každom stĺpci matice $\mathbf{X}^T$ volíme ľubovoľne.

$$\mathbf{X}^T = \begin{pmatrix} 2+t, & -1+s \\ t, & s \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$$

a teda

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2+t, & t, & 0 \\ -1+s, & s. & 2 \end{pmatrix}, \text{ kde } t, s \in \mathbf{R}$$

■

Na riešenie iných typov maticových rovníc môžeme použiť základnú metódu: určiť typ neznámej matice, označiť si jej prvky, vykonať požadované operácie a porovnaním ľavej a pravej strany dostaneme sústavu rovníc, ktorú vyriešime.

Príklad 1.9. Riešte rovnicu $\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} - \mathbf{X}\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

Riešenie

Aby boli definované uvedené súčiny, musí byť matica $\mathbf{X}$ štvorcová, stupňa 2.
Nech $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix}$. Dosaďme a upravme

$$\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ x_3, & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 2, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_3, & x_2 - x_4 \\ 2x_1 + x_3, & 2x_2 + x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2, & -x_1 + x_2 \\ x_3 + 2x_4, & -x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x_2 - x_3, & x_1 - x_4 \\ 2x_1 - 2x_4, & 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Porovnaním prvkov dostaneme homogénnu sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} -2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ktorú vyriešime

$$\begin{pmatrix} 0, & -2, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & 0, & -1 \\ 2, & 0, & 0, & -2 \\ 0, & 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Zvoľme $x_3 = 2t,\ x_4 = s$, potom $x_1 = s,\ x_2 = -t$.

Riešením maticovej rovnice je každá matica $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} s, & -t \\ 2t, & s \end{pmatrix}$, kde $t, s \in \mathbf{R}$.

■

Inverzná matica.

Definícia 1.6. *Inverznou maticou* k štvorcovej matici $\mathbf{A}$ nazývame maticu $\mathbf{B}$, pre ktorú platí $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

Poznámka 1.2. Inverznú maticu k matici $\mathbf{A}$ (pokiaľ existuje) označujeme $\mathbf{A}^{-1}$. Matica $\mathbf{A}^{-1}$ je zrejme štvorcová, toho istého stupňa ako matica $\mathbf{A}$.

Veta 1.12. Nech $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times p$ a $\mathbf{B}$ je matica typu $p \times n$. Potom

$$h(\mathbf{AB}) \leq \min\{h(\mathbf{A}),\ h(\mathbf{B})\}$$

Dôkaz

Maticová rovnica $\mathbf{AX} = \mathbf{AB}$ má riešenie ($\mathbf{X} = \mathbf{B}$), preto $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{AB})$. To ale znamená, že stĺpce matice $\mathbf{AB}$ sú lineárnou kombináciou stĺpcov matice $\mathbf{A}$, a preto

$$h(\mathbf{AB}) \leq h(\mathbf{A})$$

Túto vlastnosť majú všetky matice, pre ktoré je definovaný ich súčin, špeciálne teda

$$h(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T) \leq h(\mathbf{B}^T)$$

Potom platí

$$h(\mathbf{AB}) = h((\mathbf{AB})^T) = h(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T) \leq h(\mathbf{B}^T) = h(\mathbf{B})$$

Nerovnosti $h(\mathbf{AB}) \leq h(\mathbf{A})$, $h(\mathbf{AB}) \leq h(\mathbf{B})$ sú ekvivalentné s nerovnosťou

$$h(\mathbf{AB}) \leq \min\{h(\mathbf{A}),\ h(\mathbf{B})\}$$

□

Veta 1.13. K štvorcovej matici $\mathbf{A}$ existuje inverzná matica práve vtedy, keď $\mathbf{A}$ je regulárna matica.

Dôkaz

Nech k štvorcovej matici $\mathbf{A}$ stupňa n existuje inverzná matica $\mathbf{A}^{-1}$. Potom $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I_n}$ a pre hodnosti týchto matíc platí

$$n = h(\mathbf{I_n}) = h(\mathbf{AA}^{-1}) \leq \min\{h(\mathbf{A}),\ h(\mathbf{A}^{-1})\} \leq h(\mathbf{A})$$

Na druhej strane, hodnosť matice nemôže byť väčšia ako je počet jej riakov, preto $h(\mathbf{A}) = n$, čo znamená, že $\mathbf{A}$ je regulárna matica.

Nech teraz $\mathbf{A}$ je regulárna matica stupňa n. Potom $h(\mathbf{A}) = n$ a takisto $h(\mathbf{A}|\mathbf{I}_n) = n$. To ale znamená, že rovnica $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n$ má riešenie. Označme ho $\mathbf{E}$. Z takých istých dôvodov má riešenie aj rovnica $\mathbf{A}^T\mathbf{X} = \mathbf{I}_n$. Nech tým riešením je matica $\mathbf{F}$. Pre matice $\mathbf{E},\ \mathbf{F}$ platí $\mathbf{AE} = \mathbf{I}_n$ a $\mathbf{A}^T\mathbf{F} = \mathbf{I}_n$. Transponovaním druhej rovnosti dostaneme $\mathbf{F}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Ak by matice $\mathbf{E},\ \mathbf{F}^T$ boli rovnaké, znamenalo by to, že $\mathbf{E}$ je inverzná matica k matici $\mathbf{A}$. Počítajme

$$\mathbf{E} = \mathbf{I}_n\mathbf{E} = (\mathbf{F}^T\mathbf{A})\mathbf{E} = \mathbf{F}^T(\mathbf{AE}) = \mathbf{F}^T\mathbf{I}_n = \mathbf{F}^T$$

□

Inverzná matica k regulárnej matici $\mathbf{A}$ je riešením rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$. Keďže matica $\mathbf{A}$ je riadkovo ekvivalentná s jednotkovou maticou $\mathbf{I}$, môžeme pri riešení uvedenej rovnice postupovať tak, že maticu $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ pomocou ERO (ESO je neprípustná) upravíme na $(\mathbf{I}|\mathbf{B})$ Matica $\mathbf{B}$ je zrejme riešením rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, a teda $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Príklad 1.10. Vypočítajte inverznú maticu k $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2, & -6, & -3 \\ -2, & -7, & -4 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$

Riešenie

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2, & -6, & -3 & 1, & 0, & 0 \\ -2, & -7, & -4 & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 2, & 1 & 0, & 0, & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 2, & 1 & 0, & 0, & 1 \\ 0, & -2, & -1 & 1, & 0, & 2 \\ 0, & -3, & -2 & 0, & 1, & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 2, & 1 & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1 & 1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 & 3, & -2, & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim}$$

$$\overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 2, & 0 & -3, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 0 & -2, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 & 3, & -2, & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1, & 0, & 0 & 1, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & 0 & -2, & 1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 & 3, & -2, & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ -2, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 2 \end{pmatrix}$$

■

Veta 1.14. Nech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú regulárne matice stupňa n. Potom

(1) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(2) $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$

Dôkaz

(1) $(\mathbf{AB})\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{BB}^{-1}\right)\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$

(2) $\mathbf{A}^T\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\right)^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$

□

Inverznú maticu je možné použiť aj na riešenie niektorých maticových rovníc.

Príklad 1.11. Riešte rovnicu $\mathbf{AXB} = \mathbf{D}$, ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2, & -6, & -3 \\ -2, & -7, & -4 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & -2 \end{pmatrix}$.

Riešenie

Matica $\mathbf{A}$ je regulárna, lebo jej riadky sú lineárne nezávislé (v opačnom prípade by jeden riadok bol násobkom druhého), teda k nej existuje inverzná matica. K matici $\mathbf{B}$ tiež existuje inverzná matica (vypočítali sme ju v predchádzajúcom príklade). Vynásobme rovnicu maticou $\mathbf{A}^{-1}$ z ľavej strany a maticou $\mathbf{B}^{-1}$ z pravej strany.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \; / \quad \mathbf{AXB} &= \mathbf{D} \\ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AXB}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D} \\ \mathbf{XB} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D} \quad / \; \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{DB}^{-1} \end{aligned}$$

Vypočítajme $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 1 & 1, & 0 \\ 1, & 3 & 0, & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1, & 1 & 1, & 0 \\ 0, & 2 & -1, & 1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2, & 0 & 3, & -1 \\ 0, & 2 & -1, & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{DB}^{-1} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2, & -1, & 0 \\ 1, & 0, & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ -2, & 1, & -2 \\ 3, & -2, & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4, & -1, & 8 \\ -5, & 4, & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 17, & -7, & 25 \\ -9, & 5, & -9 \end{pmatrix}$$

■

Cvičenie 1.

(1) Určte hodnosť matíc:

(a) $\begin{pmatrix} -2, & 1, & 4 \\ 3, & 2, & -1 \end{pmatrix}$ [2]

(b) $\begin{pmatrix} 2, & -3, & 1 \\ 4, & -6, & 2 \end{pmatrix}$ [1]

(c) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 2, & 3, & 4, & 5, & 1 \\ 3, & 4, & 5, & 1, & 2 \\ 4, & 5, & 1, & 2, & 3 \\ 5, & 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ [5]

(d) $\begin{pmatrix} 81, & 90, & 67, & 107 \\ 21, & 15, & 23, & 11 \\ 39, & 60, & 21, & 85 \\ 99, & 135, & 65, & 181 \\ 120, & 150, & 88, & 192 \end{pmatrix}$ [2]

(2) Vzávislosti od parametrov a, $b \in \mathbf{R}$ určte hodnosť matíc:

(a) $\begin{pmatrix} 2, & 2, & 2, & -a \\ 2, & 2, & -a, & 2 \\ 2, & -a, & 2, & 2 \\ -a, & 2, & 2, & 2 \end{pmatrix}$ [1, ak $a = -2$; 3, ak $a = 6$; 4, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 6\}$]

(b) $\begin{pmatrix} a, & b, & 1, & 0 \\ b, & a, & -1, & 0 \\ a+b, & a+b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & a+b \end{pmatrix}$ [1 pre $a = -b$; 3 pre $a \neq -b$]

(3) Zistite, ktoré z matíc

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & 1 \\ -1, & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = (-1,\ 0,\ 2), \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 2, & 0, & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ -2, & 0, & -3 \\ 0, & 3, & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 2 \\ 0, & 0, & -2 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 5, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & ,0, & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = (2,\ 0,\ -1,\ 3)$$

sú

(a) diagonálne [$\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$]
(b) dolné trojuholníkové [$\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$]
(c) horné trojuholníkové [$\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$]

(4) Pre matice $\mathbf{A}$ až $\mathbf{P}$ z predchádzajúcej úlohy vypočítajte:

(a) $3\mathbf{E} + \mathbf{J}$ $\left[\begin{pmatrix} 4, & 3 \\ 3, & -1 \end{pmatrix} \right]$

(b) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{G}$ [nie je definované]

(c) $\mathbf{D}^T$, $\mathbf{F}^T$ $\left[\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \\ 0, & 0 \\ -1, & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{F}^T = (1, 0, 3, 4)\right]$

(d) $-2\mathbf{G} - 5\mathbf{H}^T$ $\left[\begin{pmatrix} -7, & -4, & 0 \\ 4, & 0, & 6 \\ -15, & -1, & -10 \end{pmatrix}\right]$

(e) $\mathbf{AD}$ $\left[\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & -1 \\ 2, & 2, & 0, & 3 \\ -1, & 4, & 0, & 11 \end{pmatrix}\right]$

(f) $\mathbf{PF}$ [11]

(g) $\mathbf{FP}$ $\left[\begin{pmatrix} 2, & 0, & -1, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 6, & 0, & -3, & 9 \\ 8, & 0, & -4, & 12 \end{pmatrix}\right]$

(h) $\mathbf{K}^2$ $\left[\begin{pmatrix} \cos 2\alpha, & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha, & \cos 2\alpha \end{pmatrix}\right]$

(i) $\mathbf{GLE}$ $\left[\begin{pmatrix} 7, & 9 \\ -5, & -11 \\ 14, & 27 \end{pmatrix}\right]$

(5) Riešte sústavy lineárnych rovníc v závislosti od parametra $a \in \mathbf{R}$:

(a) $\begin{aligned} x - 6y + 2z &= -4a - 2 \\ 3x + 3y + 4z &= 3a - 6 \\ 2x - 33y + 6z &= -21a \end{aligned}$ $\left[\begin{array}{l} \emptyset \text{ pre } a \neq -2 \\ \left\{\left(-24 - 15t, t, 15 + \frac{21}{2}t\right);\ t \in \mathbf{R}\right\} \text{ pre } a = -2 \end{array}\right]$

(b) $\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$ $\left[\begin{array}{l} \emptyset \text{ pre } a = -2 \\ \{(1 - t - s, t, s);\ t \in \mathbf{R}\} \text{ pre } a = 1 \\ \left\{\left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)\right\} \text{ pre } a \neq -2, 1 \end{array}\right]$

(6) Riešte sústavy lineárnych rovníc v závislosti od parametrov $a, b \in \mathbf{R}$:

(a) $\begin{aligned} 2x + ay - 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1 \\ -x + by + z &= 3 \end{aligned}$ $\left[\begin{array}{l} 1.\ a \in \mathbf{R},\ b = -1 : K = \emptyset \\ 2.\ a \in \mathbf{R},\ b \neq -1 : K = \left\{\left(\frac{4a+b-11}{b+1}, \frac{4}{b+1}, \frac{4(a-2)}{b+1}\right)\right\} \end{array}\right]$

(b) $\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ 6x - 3y + bz &= 2 \end{aligned}$

$$\left[\begin{array}{l} 1.\ a = -2,\ b = -3 : K = \emptyset \\ 2.\ a = -2, b \neq -3 : K = \left\{\left(t, 1 - at - \frac{5}{b+3}, \frac{5}{b+3}\right);\ t \in \mathbf{R}\right\} \\ 3.\ a \neq -2, b \in \mathbf{R} : K = \left\{\left(\frac{5-(b+3)t}{6+3a}, 1 - t - a\frac{5-(b+3)t}{6+3a}, t\right);\ t \in \mathbf{R}\right\} \end{array}\right]$$

(7) Riešte maticové rovnice:

(a) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 3, & 2, & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & -3 \\ 11, & 3 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 - t, & 3 - s \\ -2 + 2t, & -3 + 2s \\ t, & s \end{pmatrix};\ t, s \in \mathbf{R}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 2, & -3 \\ 1, & -2 \\ -3, & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 1, & 0 \\ 2, & -4 \end{pmatrix}$ [nemá riešenie]

(c) $\mathbf{X} \begin{pmatrix} 2, & -3 \\ -4, & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2, & 3 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 + 2t, & t \\ 2s, & s \end{pmatrix};\ t, s \in \mathbf{R}\right]$

(d) $\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2, & -1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10, & 9 \\ -5, & 4 \end{pmatrix}$

$\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3-t, & -4+t, & t \\ -2-s, & 1+s, & s \end{pmatrix};\ t, s \in \mathbf{R}\right]$

(e) $\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -2, & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & 0 \\ -2, & -6 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}\right]$

(8) Vypočítajte inverznú maticu k matici:

(a) $\begin{pmatrix} 1, & -5 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 1, & 2, & -3 \\ 0, & -1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 1, & 2, & 7 \\ 0, & -1, & -2 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}\right]$

(c) $\begin{pmatrix} 2, & -1, & 3 \\ -2, & 2, & 2 \\ -1, & 1, & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2, & 5, & -8 \\ 2, & 7, & -10 \\ 0, & -1, & 2 \end{pmatrix}\right]$

(d) $\begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 3, & 2 \\ 0, & 0, & 3, & 4 \\ 1, & 0, & 0, & 4 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 24, & -12, & 12, & -12 \\ -6, & 9, & -9, & 6 \\ 8, & -4, & 8, & -8 \\ -6, & 3, & -3, & 6 \end{pmatrix}\right]$

(9) Pomocou inverznej matice riešte maticovú rovnicu:

(a) $\begin{pmatrix} 2, & -3 \\ -4, & 6 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2, & -3, & 1 \\ -1, & 2, & -1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 4, & -5, & 1 \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 5, & 3, & 4 \\ -6, & -3, & -5 \\ 4, & 2, & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} -3, & 2 \\ 2, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 1 \\ 0, & -2 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4, & -6 \\ 3, & 4 \\ 3, & 5 \end{pmatrix}\right]$