LINEÁRNA ALGEBRA

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.
KM FEI STU, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
8. 2. 2002

1. Matice a sústavy lineárnych rovníc

Matice.

Definícia 1.1. *Maticou* typu $m \times n$, $m, n \in \mathbf{N}$, nazývame tabuľku komplexných resp. reálnych čísel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Číslo a_{jk} sa nazýva *prvok matice* $\mathbf{A}$ *na* (j,k)*-tom mieste*. Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{pp}$, kde $p = \min\{m, n\}$, tvoria *hlavnú diagonálu* a prvky $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{p\,n-p+1}$ *vedľajšiu diagonálu.*

Budeme používať ďalšie označenia a názvy:
$\mathbf{C}^{m\times n}$ – množina všetkých matic typu $m \times n$ s komplexnými prvkami,
$\mathbf{R}^{m\times n}$ – množina všetkých matic typu $m \times n$ s reálnymi prvkami.
Prvky $(a) \in \mathbf{C}^{1\times 1}$, $a \in \mathbf{C}$ budeme považovať za rovnaké, preto aj $\mathbf{C}^{1\times 1} = \mathbf{C}$. Matice typu $n \times 1$ nazývame *stĺpcové* n-tice alebo *stĺpcové vektory.* Matice typu $1 \times n$ sú nám už dobre známe n-tice.
Maticu $\mathbf{A}$, ktorej prvky sú a_{jk} pre $j \in \{1 \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$ budeme stručnejšie zapisovať $(a_{jk})_n^m$ alebo, keď bude jasné aký je počet riadkov a stĺpcov matice alebo tieto hodnoty nebudú dôležité, len (a_{jk}).
Matica, ktorej všetky prvky sú nuly sa nazýva *nulová* a označujeme ju $\mathbf{0}$ alebo $(0)_n^m$, ak chceme vyznačiť aj jej typ.

N-tica $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$ sa nazýva *j-tý riadok* a stĺpcová m-tica $\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$ *k-tý stĺpec* matice $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^m$.
Ak označíme $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_m$ riadky a $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n$ stĺpce matice $\mathbf{A}$ typu $m \times n$, tak budeme tiež písať

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n)$$

.

Príklad 1.1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & -5, & 6, & 7 \\ 3, & 2, & 1, & 0 \\ -4, & 5, & 1, & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 4}$. Jej tretím stĺpcom je $\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a druhým riadkom je $\mathbf{R}_2 = (3.2, 1, 0)$.

■

Definícia 1.2. Dve matice $\mathbf{A} = (a_{jk})$, $\mathbf{B} = (b_{jk})$ sú rovnaké, ak sú rovnakého typu a pre všetky j, k platí $a_{jk} = b_{jk}$.

Definícia 1.3. Vedúcim prvkom n-tice nazývame jej prvú zľava nenulovú zložku.

Príklad 1.2. Vedúcim prvkom šestice $(0, 0, -2, 0, 3, 1)$ je jej tretia zložka -2. Nulová n-tica nemá vedúci prvok.

■

Definícia 1.4. Matica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{pmatrix}$ sa nazýva *stupňovitá*, ak pre $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ platí:

(1) Vedúci prvok riadku $\mathbf{R}_{j+1}$ je posunutý aspoň o jedno miesto doprava vzhľadom k vedúcemu prvku riadku $\mathbf{R}_j$.

(2) Ak $\mathbf{R}_j = \overline{0}$, tak $\mathbf{R}_{j+1} = \overline{0}$.

Príklad 1.3.

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & -2, & 1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 2, & 3, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \text{ – stupňovitá matica,}$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 1, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & 0, & 2, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2, & 0 \end{pmatrix} \text{ – nie je stupňovitá}$$

■

Definícia 1.5. Matica $\mathbf{A}$ sa nazýva *redukovaná stupňovitá*, ak je stupňovitá, vedúci prvok každého nenulového riadku je 1 a v každom stĺpci, v ktorom sa nachádza vedúci prvok niektorého riadku, všetky ostatné prvky sa rovnajú 0.

Príklad 1.4. Matica

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 5 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

je redukovaná stupňovitá.

■

Definícia 1.6. *Elementárnou riadkovou operáciou* (ERO) na matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{pmatrix}$ nazývame každú z nasledujúcich úprav matice $\mathbf{A}$:

(I) Vzájomná výmena dvoch riadkov matice $\mathbf{A}$.

(II) Nahradenie jedného riadku matice $\mathbf{A}$ jeho nenulovým násobkom.

(III) Nahradenie jedného riadku súčtom tohto riadku a ľubovoľného násobku iného riadku matice $\mathbf{A}$.

Jednotlivé ERO budeme označovať takto:

$\mathbf{R}_j :=: \mathbf{R}_k$ – vzájomná výmena j-tého a k-tého riadku
$\mathbf{R}_j := \alpha\mathbf{R}_j$ – nahradenie j-tého riadku jeho α-násobkom
$\mathbf{R}_j := \mathbf{R}_j + \beta\mathbf{R}_k$ – nahradenie j-tého riadku súčtom tohto riadku a β-násobku k-tého riadku

Príklad 1.5. Upravte maticu $\begin{pmatrix} 1, & -3, & 2, & 1+i \\ -i, & 1-2i, & 3, & 5 \\ 0, & 3i, & -2, & 4 \end{pmatrix}$ pomocou ERO

(1) $\mathbf{R}_2 :=: \mathbf{R}_3$
(2) $\mathbf{R}_1 := i\mathbf{R}_1$
(3) $\mathbf{R}_3 := \mathbf{R}_3 + 2\mathbf{R}_1$

Riešenie

(1) $\begin{pmatrix} 1, & -3, & 2, & 1+i \\ -i, & 1-2i, & 3, & 5 \\ 0, & 3i, & -2, & 4 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{R}_2:=:\mathbf{R}_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1, & -3, & 2, & 1+i \\ 0, & 3i, & -2, & 4 \\ -i, & 1-2i, & 3, & 5 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1, & -3, & 2, & 1+i \\ -i, & 1-2i, & 3, & 5 \\ 0, & 3i, & -2, & 4 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{R}_1:=i\mathbf{R}_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} i, & -3i, & 2i, & -1+i \\ -i, & 1-2i, & 3, & 5 \\ 0, & 3i, & -2, & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1, & -3, & 2, & 1+i \\ -i, & 1-2i, & 3, & 5 \\ 0, & 3i, & -2, & 4 \end{pmatrix} \overset{\mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3+2\mathbf{R}_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1, & -3, & 2, & 1+i \\ -i, & 1-2i, & 3, & 5 \\ 2, & -6+3i, & 2, & 6+2i \end{pmatrix}$

■

Analogicky sa definujú *elementárne stĺpcové operácie* (ESO) na matici $\mathbf{A} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n)$. Stačí v definícii ERO nahradiť riadky stĺpcami, pričom súčet stĺpcových vektorov a násobok stĺpcového vektora číslom sú definované takto:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_m+v_m \end{pmatrix} \qquad \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_m \end{pmatrix}$$

ERO a ESO nazývame spoločným názvom *elementárne operácie* (EO).

Definícia 1.7. Hovoríme, že matica $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ konečným počtom ERO (resp. ESO či EO), ak existujú také matice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_p$, že $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1, \mathbf{B} = \mathbf{A}_p$ a pre každé $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ matica $\mathbf{A}_{j+1}$ vznikla z matice $\mathbf{A}_j$ jedinou ERO (resp. ESO či EO).

Veta 1.1. Ak matica $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ konečným počtom ERO (resp. ESO či EO), tak aj $\mathbf{A}$ vznikne z matice $\mathbf{B}$ konečným počtom ERO (resp. ESO či EO).

Dôkaz

Stačí dokázať, že ak matica $\mathbf{F}$ vznikne z matice $\mathbf{E}$ jednou ERO či ESO, tak aj matica $\mathbf{E}$ vznikne z matice $\mathbf{F}$ jednou ERO či ESO. Ukážeme to pre ERO, pre ESO by sa postupovalo podobne.

Nech $\mathbf{F}$ vznikne z $\mathbf{E}$ elementárnou operáciou $\mathbf{R}_j :=: \mathbf{R}_k$, potom tá istá ERO upraví maticu $\mathbf{F}$ na $\mathbf{E}$.

Nech $\mathbf{F}$ vznikne z $\mathbf{E}$ elementárnou operáciou $\mathbf{R}_j := \alpha\mathbf{R}_j$. Keďže α musí byť rôzne od nuly, existuje číslo $\frac{1}{\alpha}$ a zrejme z matice $\mathbf{F}$ pomocou ERO $\mathbf{R}_j := \frac{1}{\alpha}\mathbf{R}_j$ vznikne matica $\mathbf{E}$.

Nech $\mathbf{F}$ vznikne z $\mathbf{E}$ elementárnou operáciou $\mathbf{R}_j := \mathbf{R}_j + \beta\mathbf{R}_k$. Potom z matice $\mathbf{F}$ pomocou ERO $\mathbf{R}_j := \mathbf{R}_j - \beta\mathbf{R}_k$ vznikne matica $\mathbf{E}$.

□

Definícia 1.8. Dve matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sa nazývajú

$$\left.\begin{array}{l} \textit{riadkovo ekvivalentné} \\ \textit{stĺpcovo ekvivalentné} \\ \textit{ekvivalentné} \end{array}\right\} \text{ ak } \mathbf{B} \text{ vznikne z } \mathbf{A} \text{ konečným počtom } \left\{\begin{array}{l} \text{ERO} \\ \text{ESO} \\ \text{EO} \end{array}\right.$$

a označujeme to v poradí $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \overset{s}{\sim} \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Príklad 1.6. Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 2, & 4 \\ 1, & 0, & 3 \\ 3, & 1, & 12 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$ sú riadkovo ekvivalentné, lebo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 2, & 4 \\ 1, & 0, & 3 \\ 3, & 1, & 12 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{R}_1:=:\mathbf{R}_2}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 4 \\ 3, & 1, & 12 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-3\mathbf{R}_1}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 1, & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim}$$

$$\underset{\mathbf{R}_3:=2\mathbf{R}_3}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 2, & 6 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_2}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{R}_3:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_3}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

■

Z dôvodu úspory času a miesta je vhodné pri úprave matice pomocou EO zapísať novú maticu nie po každej vykonanej EO, ale až po niekoľkých. Úpravu matice $\mathbf{A}$ môžeme kratšie zapísať napr. takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 2, & 4 \\ 1, & 0, & 3 \\ 3, & 1, & 12 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{R}_1:=:\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-3\mathbf{R}_1}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 1, & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{R}_3:=2\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_3}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & 2, & 4 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Namiesto posledných dvoch úprav $\mathbf{R}_3 := 2\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3 := \frac{1}{2}\mathbf{R}_3$ sme mohli použiť len jednu $\mathbf{R}_3 := \mathbf{R}_3 - \frac{1}{2}\mathbf{R}_2$.

Veta 1.2. Každá matica je riadkovo ekvivaletná niektorej stupňovitej a tiež niektorej redukovanej stupňovitej matici.

Dôkaz pre ľubovoľnú maticu nebudeme robiť. Ukážeme si však postup pri úprave konkrétnej matice $\mathbf{A}$ na stupňovitú resp. redukovanú stupňovitú maticu.

Príklad 1.7. Nájdite stupňovitú a redukovanú stupňovitú maticu riadkovo ekvivaletnú s maticou

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & -1, & 0 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ 2, & 2, & 0, & -1 \end{pmatrix}$$

Riešenie

Najprv v matici $\mathbf{A}$ vyhľadáme riadok, ktorého vedúci prvok sa nachádza najviac vľavo, a vymeníme tento riadok s prvým. Potom pripočítame vhodné násobky prvého riadku k ostatným riadkom tak, aby v stĺpci pod vedúcim prvkom prvého riadku boli len nuly.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & -1, & -1, & 0 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ 2, & 2, & 0, & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\mathbf{R}_1:=:\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2:=:\mathbf{R}_5}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & -1, & -1, & 0 \\ 2, & 2, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim}$$

$$\underset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_1}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & -1, & -1, & 0 \\ 0, & 4, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

Maticu **B** upravujeme tak ako maticu **A**, s tým rozdielom. že úlohu prvého riadku tu preberá riadok druhý, ďalej potom riadok tretí atď až nakoniec dostaneme stupňovitú maticu.

$$\mathbf{B} \underset{\substack{\mathbf{R}_2:=:\mathbf{R}_3\\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-4\mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-2\mathbf{R}_2}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & -1, & -1, & 0\\ 0, & 1, & 1, & 0\\ 0, & 0, & -2, & -1\\ 0, & 0, & -2, & -1\\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_3}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & -1, & -1, & 0\\ 0, & 1, & 1, & 0\\ 0, & 0, & -2, & -1\\ 0, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

Matica **D** je stupňovitá a riadkovo ekvivalentná s maticou **A**. Redukovanú stupňovitú maticu dostaneme z matice **D** takto: Vhodné násobky posledného nenulového riadku pripočítame k riadkom nad ním tak, aby sa vynulovali prvky nad vedúcim prvkom posledného nenulového riadku. Takto pokračujeme s predposledným nenulovým riadkom atď, až všetky prvky nad vedúcimi prvkami budú nuly. Nakoniec každý nenulový riadok vynásobíme prevrátenou hodnotou jeho vedúceho prvku.

$$\mathbf{D} \underset{\substack{\mathbf{R}_1:=2\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_3\\ \mathbf{R}_2:=2\mathbf{R}_2+\mathbf{R}_3}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 2, & -2, & 0, & 1\\ 0, & 2, & 0, & -1\\ 0, & 0, & -2, & -1\\ 0, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathbf{R}_1:=\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 2, & 0, & -1\\ 0, & 0, & -2, & -1\\ 0, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim}$$

$$\underset{\substack{\mathbf{R}_1:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_1\\ \mathbf{R}_2:=\frac{1}{2}\mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_3:=-\frac{1}{2}\mathbf{R}_3}}{\overset{r}{\sim}} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0, & -\frac{1}{2}\\ 0, & 0, & 1, & \frac{1}{2}\\ 0, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

E je redukovaná stupňovitá matica riadkovo ekvivaletná s maticou **A**.

■

Definícia 1.9. *Trasponovanou maticou* k matici $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^m$ nazývame maticu $\mathbf{A}^T = (a'_{kj})_m^n$, kde $a'_{kj} = a_{jk}$ pre všetky j, k.

Príklad 1.8. Transponovanou maticou k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4\\ 5, & 6, & 7, & 8\\ 9, & 0, & -1, & -2 \end{pmatrix}$ je

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1, & 5, & 9\\ 2, & 6, & 0\\ 3, & 7, & -1\\ 4, & 8, & -2 \end{pmatrix}.$$

■

Sústavy lineárnych rovníc.

Definícia 1.10. Nech $m, n \in \mathbf{N}$, $a_{jk}, b_j \in \mathbf{C}$ pre $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Potom

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1}$$

je *sústava m lineárnych rovníc o n neznámych $x_1, x_2, \dots, x_n$ s koeficientami a_{jk} a pravou stranou* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix}$. Maticu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n}\\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$ nazývame *maticou sústavy* (1) a

maticu $\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ *rozšírenou maticou sústavy* (1).
Ak pravá strana $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, tak (1) sa nazýva *homogénna sústava.*

Poznámka 1.1. Zvislá čiara v rozšírenej matici sústavy (1) slúži len na vizuálne oddelenie pravej strany od koeficientov sústavy.
Sústava lineárnych rovníc (1) je svojou rozšírenou maticou sústavy jednoznačne určená.

Definícia 1.11. *Súčinom matice typu* $1 \times n$ *s maticou typu* $n \times 1$ je matica typu 1×1 (teda číslo) definovaná takto

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Ak označíme $\mathbf{A}_j$, j-tý riadok matice $\mathbf{A}$ sústavy lineárnych rovníc (1) a $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektor neznámych, tak vzhľadom na definíciu súčinu riadkového a stĺpcového vektora, môžeme sústavu lineárnych rovníc (1) zapísať kratšie

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{X}^T = b_1, \ \mathbf{A}_2 \mathbf{X}^T = b_2, \ \ldots, \ \mathbf{A}_m \mathbf{X}^T = b_m \tag{2}$$

Definícia 1.12. *Riešením sústavy lineárnych rovníc* (2), samozrejme aj (1), nazývame každú n-ticu $\overline{q} \in \mathbf{C}^n$, pre ktorú platí

$$\mathbf{A}_1 \overline{q}^{\,T} = b_1, \ \mathbf{A}_2 \overline{q}^{\,T} = b_2, \ \ldots, \ \mathbf{A}_m \overline{q}^{\,T} = b_m$$

Množinu všetkých riešení sústavy (1) bubeme označovať $K_{(1)}$ alebo len K.

Definícia 1.13. Dve sústavy lineárnych rovníc $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ nazývame *ekvivalentné*, ak majú rovnaké množiny riešení.

Príklad 1.9. Rozhodnite, či sú ekvivaletné sústavy lineárnych rovníc $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ a $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_3$, ak

$$\mathcal{S}_1 : \begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 &= 1 \end{array} \qquad \mathcal{S}_2 : \begin{array}{rl} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{array} \qquad \mathcal{S}_3 : \begin{array}{rl} 2y_1 - y_2 &= 0 \\ -y_1 - y_2 &= 1 \end{array}$$

Riešenie
Sústavy $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ nie sú ekvivalentné, lebo buď sú to sústavy s rôznym počtom premenných (2 a 3) a vtedy riešeniami sústavy $\mathcal{S}_1$ sú dvojice a sústavy $\mathcal{S}_2$ trojice, čo nie sú rovnaké objekty, alebo $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ sú sústavy s tromi premennými, potom však trojica $(1, 0, -3)$ je riešením sústavy $\mathcal{S}_2$, ale nie je riešením sústavy $\mathcal{S}_1$.
Sústavy $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_3$ sú ekvivalentné, lebo ako sa ľahko presvedčíte, množinou riešení oboch sústav je $K_{\mathcal{S}_1} = \left\{ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) \right\} = K_{\mathcal{S}_3}$.

■

Definícia 1.14. *Lineárnou kombináciou rovníc* (2) s koeficientami $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ nazývame lineárnu rovnicu

$$\alpha_1(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}^T) + \alpha_2(\mathbf{A}_2 \mathbf{X}^T) + \cdots + \alpha_m(\mathbf{A}_m \mathbf{X}^T) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_m b_m$$

Definícia 1.15. *Elementárnou úpravou sústav lineárnych rovníc* nazývame každú úpravu, pomocou ktorej z ľubovoľnej sústavy lineárnych rovníc $\mathcal{S}$ vznikne sústava lineárnych rovníc $\mathcal{S}'$ ekvivalentná s $\mathcal{S}$.

Veta 1.3. Nasledujúce úpravy sú ekvivalentnými úpravami sústav lineárnych rovníc.
(I) Vzájomná výmena dvoch rovníc sústavy.
(II) Nahradenie rovnice sústavy jej nenulovým násobkom.

(III) Nahradenie rovnice sústavy súčtom tejto rovnice a ľubovoľného násobku inej rovnice sústavy.
(IV) Vynechanie rovnice, ktorá je lineárnou kombináciou iných rovníc sústavy.

Dôkaz
Urobíme ho len pre úpravu (IV), v ostatných prípadoch je postup podobný.
Majme sústavu

$$\mathcal{S} : \mathbf{A}_1\mathbf{X}^T = b_1,\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}^T = b_2,\ \dots,\ \mathbf{A}_m\mathbf{X}^T = b_m$$

Nech napr. posledná rovnica je lineárnou kombináciou ostatných rovníc sústavy, teda

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m\mathbf{X}^T &= \alpha_1(\mathbf{A}_1\mathbf{X}^T) + \alpha_2(\mathbf{A}_2\mathbf{X}^T) + \cdots + \alpha_{m-1}(\mathbf{A}_{m-1}\mathbf{X}^T) \\ b_m &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_{m-1} b_{m-1} \end{aligned}$$

Vynechaním poslednej rovnice v sústave $\mathcal{S}$ dostaneme sústavu

$$\mathcal{S}' : \mathbf{A}_1\mathbf{X}^T = b_1,\ \mathbf{A}_2\mathbf{X}^T = b_2,\ \dots,\ \mathbf{A}_{m-1}\mathbf{X}^T = b_{m-1}$$

Zrejme každé riešenie sústavy $\mathcal{S}$ je riešením aj sústavy $\mathcal{S}'$. Stačí už len dokázať, že každé riešenie sústavy $\mathcal{S}'$ je riešením sústavy $\mathcal{S}$. Nech teda $\overline{q}$ je riešením sústavy $\mathcal{S}'$, t.j. platí

$$\mathbf{A}_1\overline{q}^{\,T} = b_1,\ \mathbf{A}_2\overline{q}^{\,T} = b_2,\ \dots,\ \mathbf{A}_{m-1}\overline{q}^{\,T} = b_{m-1}$$

Keďže sústavy $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ majú prvých $m-1$ rovníc rovnakých, stačí dokázať, že $\overline{q}$ je riešením poslednej rovnice sústavy $\mathcal{S}$. Počítajme

$$\mathbf{A}_m\overline{\mathbf{q}}^T = \alpha_1(\underbrace{\mathbf{A}_1\overline{\mathbf{q}}^T}_{b_1}) + \alpha_2(\underbrace{\mathbf{A}_2\overline{\mathbf{q}}^T}_{b_2}) + \cdots + \alpha_{m-1}(\underbrace{\mathbf{A}_{m-1}\overline{\mathbf{q}}^T}_{b_{m-1}}) = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_{m-1} b_{m-1} = b_m$$

□

Gaussova eliminačná metóda riešenia sústav lineárnych rovníc.

Táto metóda spočíva v úprave danej sústavy lineárnych rovníc pomocou elementárnych úprav na sústavu s ňou ekvivaletnú, ktorej riešenie by sme vedeli už ľahko nájsť. Takou je sústava lineárnych rovníc, ktorej rozšírená matica je stupňovitá alebo ešte lepšie redukovaná stupňovitá. Keďže sústava lineárnych rovníc je jednoznačne určená svojou rozšírenou maticou, je výhodné zapisovať sústavy pomocou nich. Uvedomme si ešte, že vykonať na sústave (2) elementárnu úpravu

vzájomná výmena j-tej a k-tej rovnice resp.
nahradenie j-tej rovnice jej α násobkom resp.
nahradenie j-tej rovnice súčtom tejto rovnice a β-násobku k-tej rovnice
vyškrtnutie j-tej rovnice zo sústavy
a potom napísať rozšírenú maticu tejto novej sústavy je to isté, ako na rozšírenej matici sústavy (2) vykonať
ERO $\mathbf{A}_j :=: \mathbf{A}_k$ resp.
ERO $\mathbf{A}_j := \alpha\mathbf{A}_j$ resp.
ERO $\mathbf{A}_j := \mathbf{A}_j + \beta\mathbf{A}_k$ rep.
vyškrtnutie j-tého riadku z rozšírenej matice (pozor, to nie je ERO!)
Toto nám umožňuje získať stupňovitú alebo redukovanú stupňovitú rozšírenú maticu sústavy ekvivaletnej so sústavou (1) z jej rozšírenej matice použitím ERO. Pri týchto úpravách budeme používať symboly $\sim$, $\overset{r}{\sim}$ aj v prípade, keď použijeme vyškrtnutie riadku.
Ak pri úprave rozšírenej matice vznikne riadok

$$(0, 0, \dots, 0 \mid b),\ \text{kde } b \neq 0$$

znamená to, že v prislúchajúcej sústave je rovnica

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_n = b$$

ktorá nemá riešenie, a teda riešenie nemá ani sústava (1).

Príklad 1.10. Ukážeme, že sústava lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad\quad + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

nemá riešenie.

Riešenie

Pomocou ERO upravujme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitú.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1, & -1, & 0, & 1 & 1 \\ 3, & -3, & 2, & 6 & 5 \\ 2, & -2, & 2, & 5 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-3\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-2\mathbf{R}_1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & -1, & 0, & 1 & 1 \\ 0, & 0, & 2, & 3 & 2 \\ 0, & 0, & 2, & 3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{\mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & -1, & 0, & 1 & 1 \\ 0, & 0, & 2, & 3 & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Z posledného riadku vyplýva, že sústava nemá riešenie.

■

Uvažujme teraz situáciu, keď máme rozšírenú maticu sústavy upravenú na stupňovitú maticu, ktorá neobsahuje riadok $(0, 0, \ldots, 0 \mid b)$ s nenulovým číslom b. V tom prípade táto matica, po vyškrtnutí nulových riadkov (tie sú lineárnou kombináciou ostatných), má tvar

$$\mathbf{D} = \left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 0, & \ldots, & 0, & \boxed{d_{1k_1}}, & \ldots, & d_{1k_2}, & \ldots, & d_{1k_r}, & \ldots, & d_{1k_n} & u_1 \\ 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & \boxed{d_{2k_2}}, & \ldots, & d_{2k_r}, & \ldots, & d_{2k_n} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\cdot \\ 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & \ldots, & \boxed{d_{rk_r}}, & \ldots, & d_{rk_n} & u_r \end{array}\right)$$

V rámčekoch sú vedúce prvky riadkov. V prípade, že vedúci prvok prvého riadku je hneď na jeho začiatku, t.j. $k_1 = 1$, matica $\mathbf{D}$ nemá na začiatku nulové stĺpce. Keďže vedúce prvky riadkov sa posúvajú aspoň o jedno miesto doprava a v matici nemôže byť riadok $(0, 0, \ldots, 0 \mid b)$ s nenulovým číslom b, musí platiť

$$r \leq n, \ 1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$$

Napíšme k matici $\mathbf{D}$ príslušnú sústavu lineárnych rovníc, na ktorej urobíme ešte malú úpravu: na ľavej strane rovníc nechajme len neznáme $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$, všetky ostatné presuňme na pravú stranu.

$$\begin{array}{rcrcccrcl} d_{1k_1}x_{k_1} & + & d_{1k_2}x_{k_2} & + & \cdots & + & d_{1k_r}x_{k_r} & = & u_1 - \sum\limits_{j \in M} d_{1j}x_j \\ & & d_{2k_2}x_{k_2} & + & \cdots & + & d_{2k_r}x_{k_r} & = & u_2 - \sum\limits_{j \in M} d_{2j}x_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & d_{rk_r}x_{k_r} & = & u_r - \sum\limits_{j \in M} d_{rj}x_j \end{array} \tag{3}$$

kde $M = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$.

Táto sústava je ekvivaletná so sústavou (1) a navyše dajú sa ľahko nájsť všetky jej riešenia. Ak totiž za neznáme x_j pre $j \in M$ (týchto neznámych je $n - r$) dosadíme konkrétne čísla, dá sa zo sústavy (3) vypočítať zostávajúcich r neznámych: z poslednej rovnice môžeme vypočítať x_{k_r}, túto hodnotu keď dosadíme do predposlejnej rovnice, vypočítame odtiaľ $x_{k_{r-1}}$, atď až z prvej rovnice vypočítame x_{k_1}. Je zrejmé, že ak $n - r = 0$ (žiadna z neznámych sa nedá voliť ľubovoľne), tak sústava (1) má jedno riešenie, ak $n - r > 0$, tak sústava (1) má nekonečne veľa riešení.

Keby sme rozšírenú maticu sústavy (1) upravili až na redukovanú stupňovitú, tak vedúce prvky jej riadkov by boli jednotky a všetky prvky nad nimi zas nuly, teda $d_{1k_1} = d_{2k_2} = \cdots = d_{rk_r} = 1$, $d_{1k_2} = 0$, $d_{1k_3} = d_{2k_3} = 0$, $\ldots$, $d_{1k_r} = d_{2k_r} = \cdots = d_{r-1\,k_r} = 0$. K tejto matici prislúchajúca sústava lineárnych rovníc má po prenesení neznámych x_j pre $j \in M$ na pravú stranu tvar

$$
\begin{aligned}
x_{k_1} \qquad\qquad &= u_1 - \sum_{j\in M} d_{1j}x_j \\
x_{k_2} \qquad &= u_2 - \sum_{j\in M} d_{2j}x_j \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots\dots \\
x_{k_r} &= u_r - \sum_{j\in M} d_{rj}x_j
\end{aligned} \tag{4}
$$

kde neznáme $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ sú už priamo vyjadrené pomocou zvyšných neznámych.

Na záver môžeme napísať: Ak v upravenej rozšírenej matici sústavy (1) na stupňovitú maticu $\mathbf{D}$ sa nachádza riadok $(0, 0, \dots, 0 \mid b)$ s nenulovým číslom b, tak sústava (1) nemá riešenie. Ak matica $\mathbf{D}$ tento riadok neobsahuje a pre počet jej nenulových riadkov platí

$$
1 \le r \begin{cases} = n, & \text{tak sústava (1) má jedno riešenie} \\ < n, & \text{tak sústava (1) má nekonečne veľa riešení} \end{cases}
$$

Príklad 1.11. V $\mathbf{R}$ riešte sústavu lineárnych rovníc

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3} + x_4 &= 1 \\
3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 5 \\
2x_1 - 2x_2 \phantom{{}+2x_3} + 3x_4 &= 1 \\
2x_3 + 2x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Riešenie

Rozšírenú maticu sústavy upravíme pomocou ERO na stupňovitú

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 0, & 1 & 1 \\ 3, & -3, & 2, & 6 & 5 \\ 2, & -2, & 0, & 3 & 1 \\ 0, & 0, & 2, & 2 & 3 \end{array}\right)
\underset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-3\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-3\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_2}}{\overset{r}{\sim}}
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 0, & 1 & 1 \\ 0, & 0, & 2, & 3 & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & -1 \\ 0, & 0, & 0, & -1 & 1 \end{array}\right)
\overset{r}{\sim}
$$

$$
\underset{\mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4+\mathbf{R}_3}{\overset{r}{\sim}}
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1, & -1, & 0, & 1 & 1 \\ 0, & 0, & 2, & 3 & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 1 & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right) = \mathbf{D}
$$

Vidíme, že sústava má riešenie. Matice $\mathbf{D}$ má 3 nenulové riadky, preto jednu $(4-3=1)$ neznámu volíme ľubovoľne, zvyšné tri neznáme vypočítame zo sústavy prislúchajúcej k matici $\mathbf{D}$:

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3} + x_4 &= 1 \\
2x_3 + 3x_4 &= 2 \\
x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

Vedúce prvky riadkov matice $\mathbf{D}$ sú v prvom, treťom a štvrtom stĺpci, preto vyjadrovať budeme x_1, x_3, x_4. Neznámu x_2 volíme ľubovoľne. Nech teda $x_2 = t \in \mathbf{R}$, potom predchádzajúcu sústavu môžeme upraviť na

$$
\begin{aligned}
x_1 \phantom{{}+2x_3} + x_4 &= 1 + t \\
2x_3 + 3x_4 &= 2 \\
x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

odkiaľ

$$
x_4 = -1,\ x_3 = \frac{5}{2},\ x_1 = 2 + t
$$

Množinou všetkých riešení sústavy je

$$
K = \left\{ \left(2+t,\ t,\ \frac{5}{2},\ -1 \right);\ t \in \mathbf{R} \right\}
$$

■

Výber premenných, za ktoré môžeme voliť ľuboľné hodnoty nemôže byť náhodný. Pri náhodnom výbere by sa mohlo stať, že sústavu, ktorá má riešenie, nedokážete vyriešiť, ako to ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 1.12. Sústava lineárnych rovníc o štyroch neznámych x_1, x_2, x_3, x_4, ktorej rozšírenou maticou je stupňovitá matica

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 2, & 2, & 1 & 2 \\ 0, & 2, & 2, & -1 & -1 \end{array}\right)$$

má zrejme riešenie a dve neznáme môžeme voliť ľubovoľne. Nech teda napr. $x_1 = t$, $x_4 = s$. Potom z matice $\mathbf{A}$ môžeme písať sústavu

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 &= 2 - t - s \\ 2x_2 + 2x_3 &= -1 + s \end{aligned}$$

Táto sústava pre ľubovoľné hodnoty t a s nemá riešenie, lebo ak od prvej rovnice odčítame druhú, dostaneme rovnicu

$$0\,x_2 + 0\,x_3 = 3 - t - 2s$$

ktorej nevyhovuje žiadne x_2, x_3, pretože pravá strana rovnice môže byť rôzna od nuly.

■

Pri úprave rozšírenej matice sústavy lineárnych rovníc na stupňovitú, môžeme použiť aj jednu ESO, a to vzájomnú výmenu dvoch stĺpcov. Nesmie však byť medzi nimi pravá strana sústavy. Tejto ESO odpovedá v sústave rovníc len zmena poradia premenných. Jej použitie môže zjednodušiť úpravu matice na stupňovitý tvar.

Príklad 1.13. Riešte v $\mathbf{R}$ homogénnu sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 5x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie

Posledný stĺpec rozšírenej matice tejto sústavy je nulový a použitím ktorejkoľvek ERO sa nezmení, preto ho nebudeme písať.

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 1, & 0, & -5 \\ 2, & 3, & 1, & 1, & -4 \\ 2, & 2, & 0, & 1, & 1 \\ 3, & 4, & 2, & 2, & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathbf{S}_1:=:\mathbf{S}_3 \\ \mathbf{S}_2:=:\mathbf{S}_4}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & -5 \\ 1, & 1, & 2, & 3, & -4 \\ 0, & 1, & 2, & 2, & 1 \\ 2, & 2, & 3, & 4, & -1 \end{pmatrix} \end{array} \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-2\mathbf{R}_1}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & -5 \\ 0, & 1, & 2, & 2, & 1 \\ 0, & 1, & 2, & 2, & 1 \\ 0, & 2, & 3, & 2, & 9 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_3:=:\mathbf{R}_4 \\ \mathbf{R}_3:=\mathbf{R}_3-2\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-\mathbf{R}_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & -5 \\ 0, & 1, & 2, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & -1, & -2, & 7 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_3:=-1\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1, & -5 \\ 0, & 1, & 0, & -2, & 15 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & -7 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Vedúce prvky riadkov nie sú v štvrtom a piatom stĺpci. V týchto stĺpcoch sú koeficienty pri neznámych x_2 a x_5 (menili sme poradie neznámych). Tieto neznáme volíme ľubovoľne: $x_2 = t$, $x_5 = s$, pričom $t, s \in \mathbf{R}$. Z matice potom dostaneme

$$\begin{aligned} x_3 &= -t + 5s \\ x_4 &= 2t - 15s \\ x_1 &= -2t + 7s \end{aligned}$$

Riešením sústavy je každá pätica

$$(-2t+7s,\ t,\ -t+5s,\ 2t-15s,\ s),\ \text{kde } t,s\in\mathbf{R}$$

■

Cvičenie 1.

(1) Zistite, ktoré z matíc

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 2, & 1\\ -1, & 2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=(-1,\ 0,\ 2),\qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & -1\\ 0, & 2, & 0, & 5\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{F}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 3\\ 4\end{pmatrix},\qquad \mathbf{G}=\begin{pmatrix}1, & 2, & 0\\ -2, & 0, & -3\\ 0, & 3, & 5\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix}0, & 1, & 0, & 3\\ 0, & 0, & 0, & -1\\ 0, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{J}=\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & -7\end{pmatrix},\qquad \mathbf{K}=\begin{pmatrix}\cos\alpha, & -\sin\alpha\\ \sin\alpha, & \cos\alpha\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 2, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{pmatrix}2, & 1, & 2\\ 0, & 0, & 2\\ 0, & 0, & -2\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{O}=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 5, & 0\\ 0, & 0, & 0, & ,0, & 1\end{pmatrix}$$

sú

(a) stupňovité, [$\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ pre $\alpha=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{O}$]

(b) redukované stupňovité? [$\mathbf{K}$ pre $\alpha=2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{O}$]

(2) Nájdite redukovanú stupňovitú maticu, ktorá je riadkovo ekvivaletná s maticou

(a) $\begin{pmatrix}1, & -2, & 0, & 1\\ 3, & 2, & 1, & 0\\ 1, & -1, & 1, & -2\end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & 1\\ 0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & -3\end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix}4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9\\ 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8\\ 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix}1, & 0, & -1, & -2, & -3, & -4\\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5\\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix}\right]$

(3) Rozhodnite, či sú ekvivaletné sústavy lineárnych rovníc $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, ak

(a) $\mathcal{S}_1:\ \begin{aligned}2x_1+x_2-3x_3&=2\\ x_1-3x_2-2x_3&=1\end{aligned}$ $\quad\mathcal{S}_2:\ \begin{aligned}2y_1+y_2-3y_3&=2\\ y_1+4y_2-y_3&=1\end{aligned}$ [áno]

(b) $\mathcal{S}_1:\ \begin{aligned}2x_1+x_2-3x_3&=2\\ x_1-3x_2-2x_3&=1\end{aligned}$ $\quad\mathcal{S}_2:\ \begin{aligned}2x_1+x_2-3x_3&=2\\ 3x_1-2x_2-x_3&=3\end{aligned}$ [nie]

(4) Riešte sústavu lineárnych rovníc

(a) $\begin{aligned}3x_1-2x_2+3x_3&=3\\ -2x_1+3x_2-5x_3&=-3\\ x_1+7x_2-3x_3&=16\end{aligned}$ [$(1,3,2)$]

(b) $\begin{aligned}-2x_1+3x_2+5x_3&=3\\ 3x_1+x_2-4x_3&=5\\ 4x_1+5x_2-3x_3&=8\end{aligned}$ [nemá riešenie]

(c) $\begin{aligned}5x_1+2x_2+4x_3+x_4&=9\\ -2x_1+x_2-x_3-x_4&=5\\ -4x_1+4x_2-2x_4&=18\\ 7x_1+3x_2+7x_3+2x_4&=12\\ 3x_1+2x_2+2x_3&=10\end{aligned}$ [$\left(\frac{2}{3},\ \frac{31}{6}+t,\ -\frac{7}{6}-t,\ 2t\right),\ t\in\mathbf{R}$]

(d) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -2 \\ -x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$ [nemá riešenie]

(e) $$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 4x_5 &= 11 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -7 \\ 5x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 11x_5 &= 18 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$ $[(1+a+b,\, a,\, -2,\, 3+2b,\, b)\,,\ a,b \in \mathbf{R}]$

(f) $$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 - 6x_3 - 5x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$ $\left[\left(\frac{a-2b-5c}{3},\, a,\, \frac{-b+3c}{2},\, b,\, c\right)\,,\ a,b,c \in \mathbf{R}\right]$