ALGEBRA A ANALYTICKÁ GEOMETRIA

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.
KM FEI STU, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
20. 3. 2003

1. Komplexné čísla

Zo stredoškolského kurzu matematiky je vám známe, že niektoré kvadratické rovnice nemajú riešenie v množine reálnych čísel a iné áno. Napríklad rovnica $x^2 + x - 2 = 0$ má dva korene $x_1 = 1, x_2 = -2$, kým rovnica $x^2 + 1 = 0$ nemá žiadny koreň štvorec žiadneho reaálneho čísla sa nerovná číslu -1). Komplexné čísla boli pôvodne vymyslené preto, aby každá kvadratická rovnica (s reálnymi keoficientami) mala riešenie. Veľmi rýchlo sa ukázalo, že komplexné čísla sa hodia nielen matematikom na zjednodušenie ich teórií, ale že sú užitočné aj vo fyzike a technických vedách.

Zavedenie pojmu komplexného čísla.

Komplexným číslom z nazývame každú usporiadanú dvojicu $z = (a, b)$ reálnych čísel a, b. Číslo a sa nazýva *reálna časť komplexného čísla* z a označuje sa $\mathrm{Re}(z)$. Číslo b sa nazýva *imaginárna časť komplexného čísla* z a označuje sa $\mathrm{Im}(z)$. Komplexné číslo $(0, 1)$ sa nazýva *imaginárna jednotka* a označuje sa i.

Dve komplexné čísla *sú rovnaké*, ak majú rovnaké reálne časti a tiež imaginárne časti, teda

$$(a, b) = (c, d) \text{ práve vtedy, keď } a = c,\ b = d.$$

Na množine všetkých komplexných čísel, ktorú budeme označovať $\mathbf{C}$, definujeme *sčitovanie* a *násobenie* takto: Pre každé $(a, b), (c, d) \in \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

Umocnenie komplexného čísla z na prirodzené číslo k definujeme rekurentne takto:

$$\begin{aligned} z^1 &= z \\ z^k &= z \cdot z^{k-1}, \quad k > 1. \end{aligned}$$

Poznámka 1.1. Symbol operácie násobenia $\cdot$ budeme obvykle vynechávať, a teda namiesto $x \cdot y$ budeme písať xy.

Príklad 1.1. Vypočítajte
(1) $(1, -\sqrt{6}) + (\sqrt{3}, 2)$
(2) $(1, -\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{3}, 2)$
(3) $(x, 0) + (y, 0)$
(4) $(x, 0) \cdot (y, 0)$
(5) $(a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$
(6) i^2

Riešenie
(1) $(1, -\sqrt{6}) + (\sqrt{3}, 2) = (1 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{6})$
(2) $(1, -\sqrt{6}) \cdot (\sqrt{3}, 2) = (\sqrt{3} + 2\sqrt{6}, 2 - \sqrt{6}\sqrt{3}) = (\sqrt{3} + 2\sqrt{6}, 2 - 3\sqrt{2})$
(3) $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$
(4) $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy - 0, x \cdot 0 + 0 \cdot y) = (xy, 0)$
(5) $(a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = (a, 0) + (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 + b) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$

(6) $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0)$

■

Veta 1.1. Pre všetky komplexné čísla x, y, z platí

$$\begin{array}{lll} x+y=y+x, & x\cdot y=y\cdot x & \text{komutatívnosť} \\ (x+y)+z=x+(y+z), & (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z) & \text{asociatívnosť} \\ (x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z) & & \text{distributívnosť} \end{array}$$

□

Algebraický tvar komplexného čísla.

Všimnime si, ako sa sčitujú a násobia komplexné čísla tvaru $(a,0)$. Z predchádzajúceho príkladu vidieť, že súčtom resp. súčinom dvoch komplexných čísel s nulovou imaginárnou časťou je opäť číslo toho istého tvaru, pričom reálna časť súčtu je súčtom ich reálnych častí a analogicky to platí pre súčin. Prvá zložka súčtu resp. súčinu týchto čísel je teda štandartným súčtom resp. súčinom reálnych čísel - prvých zložiek týchto čísel a druhá zložka je nula. Rozdiel medzi reálnym číslom a a komplexným číslom $(a,0)$ je preto len formálny a tieto čísla budeme ďalej považovať za rovnaké. Teda napr. $i^2 = (-1,0) = -1$. Množina $\mathbf{R}$ všetkých reálnych čísel je potom podmnožinou množiny $\mathbf{C}$ všetkých komplexných čísel. Komplexné čísla, ktoré nie sú reálne (ich imaginárna časť je nenulová), sa nazývajú *imaginárne čísla.* Z nich tie, ktoré majú nulovú reálnu časť sa nazývajú *rýdzoimaginárne čísla.*
Na základe prvého príkladu a dohody o stotožnení komplexného čísla $(a,0)$ s reálnym číslom a môžeme pre každé komplexné číslo $z = (a,b)$ písať

$$z = (a,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = a + bi$$

Výraz $a+bi$ sa nazýva *algebraický tvar komplexného čísla z.*

Pre sčitovanie a násobenie komplexných čísel v algebraickom tvare evidentne platí

$$\begin{aligned} (a+bi)+(c+di) &= a+c+(b+d)i \\ (a+bi)(c+di) &= ac-bd+(ad+bc)i \end{aligned}$$

Na výpočet súčinu komplexných čísel môžeme použiť aj distributívnosť násobenia vzhľadom k sčitovaniu a fakt, že $i^2 = -1$:

$$(a+bi)(c+di) = a(c+di) + bi(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad+bc)i$$

Príklad 1.2. Nájdite všetky reálne čísla s, t, pre ktoré $(2-3i)s - 2t(-1+2i) = 4-5i$.

Riešenie

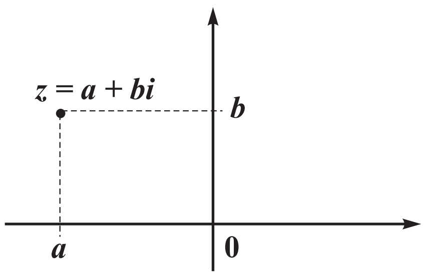
$$\begin{aligned} (2-3i)s - 2t(-1+2i) &= 4-5i \\ 2s - 3si + 2t - 4ti &= 4-5i \\ 2s + 2t + (-3s-4t)i &= 4-5i \\ 2s+2t=4 \quad &\wedge \quad -3s-4t=-5 \\ s=3, \quad &\quad t=-1 \end{aligned}$$

■

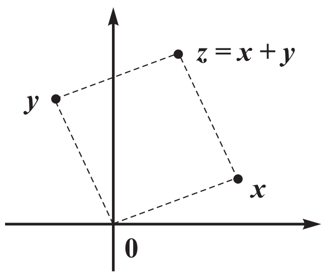
Komplexné čísla môžeme interpretovať graficky. Používame na to rovinu s pravouhlou súradnicovou sústavou, ktorú nazývame *Gaussova rovina.* V nej komplexné číslo $z = a+bi$ zobrazujeme ako bod so súradnicami (a,b) (pozri obr. 1). Reálne čísla ležia na vodorovnej súradnicovej osi, ktorú nazývame tiež *reálna os.* Druhú súradnicovú os nazývame *imaginárna os.* Na nej ležia rýdzoimaginárne čísla a reálne číslo nula.

Komplexné čísla $x = a+bi, y = c+di$ je možné sčitovať aj graficky. Ich súčtom je komplexné číslo z, ktoré v prípade, keď $x \neq 0, y \neq 0$, získame doplnením trojuholníka $0xy$ na rovnobežník $0xzy$ (obr. 2).

Podielom komplexných čísel x, y (v tomto poradí), $y \neq 0$, nazývame komplexné číslo z, pre ktoré platí $x = yz$, a píšeme $z = \frac{x}{y}$ alebo $z = x : y$.



Obr. 1
Grafické znázornenie komplexného čísla.



Obr.2
Grafické sčitovanie komplexných čísel.

Ak číslo y je reálne, tak výpočet podielu $\frac{x}{y}$ je veľmi jednoduchý: nech $x = a + bi, y = c$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}, c \neq 0$, potom

$$\frac{x}{y} = \frac{a+bi}{c} = \frac{1}{c}(a+bi) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i$$

Ako sa postupuje pri delení imaginárnym číslom si ukážeme až po zavedení komplexne združeného čísla.

Komplexne združeným číslom k číslu $z = a + bi$ nazývame číslo $\overline{z} = a - bi$. Obrazy týchto dvoch čísel v Gaussovej rovine sú súmerne združené podľa reálnej osi. Ľahko si overíte, že súčin komplexne združených čísel je číslo reálne, presnejšie

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

Príklad 1.3. Nájdite všetky komplexné čísla x, pre ktoré

$$x(-2+i) + \overline{x}(3-2i) = -5 - 3i$$

Riešenie

Komplexné číslo x budeme hľadať v algebraickom tvare: $x = a + bi$, kde $a, b \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} (a+bi)(-2+i) + (a-bi)(3-2i) &= -5-3i \\ -2a + ai - 2bi - b + 3a - 2ai - 3bi - 2b &= -5-3i \\ a - 3b + (-a-5b)i &= -5-3i \\ a - 3b = -5 \quad &\wedge \quad -a - 5b = -3 \\ a = -2, \quad &\quad b = 1 \\ x &= -2+i \end{aligned}$$

■

Veta 1.2. Pre všetky komplexné čísla $x, y, z, z \neq 0$, a každé prirodzené číslo n platí

(1) $\overline{\overline{x}} = x$
(2) $x + \overline{x} = 2\,\mathrm{Re}(x),\ x - \overline{x} = 2\,\mathrm{Im}(x)$
(3) $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$
(4) $\overline{x-y} = \overline{x} - \overline{y}$
(5) $\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}$
(6) $\overline{x^n} = (\overline{x})^n$
(7) $\overline{\left(\frac{x}{z}\right)} = \frac{\overline{x}}{\overline{z}}$

□

Vráťme sa k deleniu komplexných čísel. Vydeliť číslo x imaginárnym číslom y môžeme tak, že zlomok $\frac{x}{y}$ rozšírime komplexne združeným číslom k menovateľu, čím dostaneme v menovateli reálne číslo, ktorým deliť už vieme. Nech teda $x = a + bi,\ y = c + di,\ y \neq 0$, potom

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i\end{aligned}$$

Príklad 1.4. Vypočítajte

$$\frac{(1-i)^2+(2-i)(2+3i)}{(1-2i)(3+i)}$$

Riešenie

$$\begin{aligned}\frac{(1-i)^2+(2-i)(2+3i)}{(1-2i)(3+i)} &= \frac{1-2i+i^2+4+6i-2i-3i^2}{3+i-6i-2i^2} = \frac{7+2i}{5-5i} = \\ &= \frac{7+2i}{5(1-i)}\frac{1+i}{1+i} = \frac{7+7i+2i-2}{5\cdot 2} = \frac{5+9i}{10} = \frac{1}{2}+\frac{9}{10}i\end{aligned}$$

■

Príklad 1.5. V množine reálných čísel riešte rovnicu $(a^2-3i)x-1+2i = ax+(a-4)ix$ s parametrom $a \in \mathbf{R}$.

Riešenie

$$\begin{aligned}(a^2-3i)x-ax-(a-4)ix &= 1-2i \\ \left[a^2-a+(1-a)i\right]x &= 1-2i\end{aligned}$$

Číslo $a^2-a+(1-a)i$ je nulové práve vtedy, keď $a^2-a=0 \wedge 1-a=0$, t.j. $a=1$. Potom však pre $a=1$ rovnica nemá riešenie, lebo $0\cdot x = 0 \neq 1-2i$ pre všetky $x \in \mathbf{R}$.
Pre $a \neq 1$ má rovnica jediné riešenie

$$\begin{aligned}x &= \frac{1-2i}{a^2-a+(1-a)i} \\ x &= \frac{(1-2i)[a^2-a-(1-a)i]}{[a^2-a+(1-a)i][a^2-a+(1-a)i]} \\ x &= \frac{[a^2+a-2+(-2a^2+3a-1)i]}{a^4-2a^3+2a^2-2a+1} \\ x &= \frac{a^2+a-2}{a^4-2a^3+2a^2-2a+1} + \frac{-2a^2+3a-1}{a^4-2a^3+2a^2-2a+1}i \\ x &= \frac{(a-1)(a+2)}{(a-1)(a^3-a^2+a-1)} + \frac{(a-1)(-2a+1)}{(a-1)(a^3-a^2+a-1)}i \\ x &= \frac{a+2}{(a^2+1)(a-1)} - \frac{2a-1}{(a^2+1)(a-1)}i\end{aligned}$$

■

Absolútna hodnota a goniometrický tvar komplexného čísla.

Absolútna hodnota komplexného čísla $z = a+bi$ je nezáporné reálne číslo

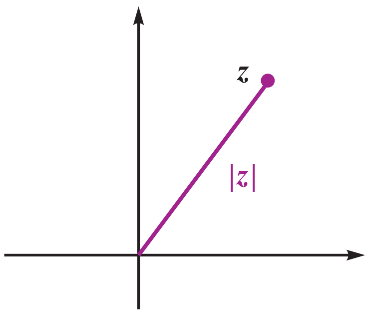
$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Pri grafickom zobrazení v Gaussovej rovine (obr. 3) je to vzdialenosť bodu z od bodu 0.

Každé komplexné číslo, ktorého absolútna hodnota sa rovná 1, nazývame *komplexnou jednotkou.* V Gaussovej rovine všetky komplexné jednotky vytvárajú kružnicu so stredom 0 a polomerom 1.

Veta 1.3. Pre všetky komplexné čísla $x, y, z, z \neq 0$, a každé prirodzené číslo n platí

(1) $x\overline{x} = |x|^2$



Obr. 3 Absolútna hodnota komplexného čísla.

(2) $|x+y| \leq |x|+|y|$ trojuholníková nerovnosť
(3) $|x+y| \geq ||x|-|y||$
(4) $|xy| = |x||y|$
(5) $|x^n| = |x|^n$
(6) $\left|\frac{x}{z}\right| = \frac{|x|}{|z|}$

□

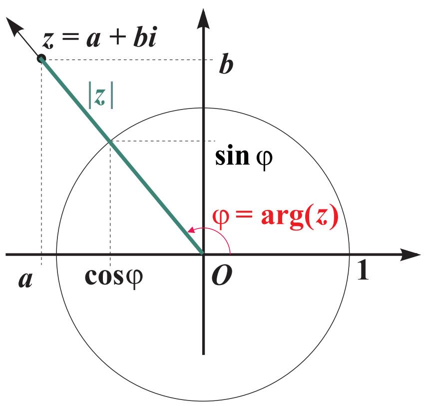
Príklad 1.6. Vypočítajte absolútnu hodnotu čísla $\frac{2+\sqrt{6}i}{1-2i}$.

Riešenie

$$\left|\frac{2+\sqrt{6}i}{1-2i}\right| = \frac{|2+\sqrt{6}i|}{|1-2i|} = \frac{\sqrt{4+6}}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}.$$

■

Ku každému komplexnému číslu $z, z \neq 0$, existuje orientovaný uhol polpriamok 01 (kladná časť reánej osi) a $0z$ (obr. 4). Veľkosť tohto orientovaného uhla sa nazýva *argument* alebo *amplitúda komplexného čísla* z a označuje sa $\arg(z)$.



Obr. 4 Argument komplexného čísla.

Uvedomme si, že ak φ je argument čísla z, tak aj $\varphi + 2k\pi$ je argument čísla z, pre každé $k \in \mathbf{Z}$. Z definície goniometrických funkcií a z podobnosti trojuholníkov pre každé komplexné číslo z, ktorého argumentom je φ, vyplýva (obr. 4):

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= |z|\cos\varphi \\ \mathrm{Im}(z) &= |z|\sin\varphi \end{aligned} \qquad \text{alebo ekvivalentne} \qquad \begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \sin\varphi &= \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{aligned}$$

To nám umožňuje vyjadriť číslo z v tvare

$$z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ktorý sa nazýva *goniometrický tvar komplexného čísla* z.
Pre každé reálne číslo α definujme:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \ (e \text{ je Eulerove číslo})$$

Potom komplexné číslo z s argumentom φ môžeme zapísať v *exponenciálnom tvare*

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

Príklad 1.7. Zapíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare komplexné číslo
(1) $z = -1 + \sqrt{3}i$,
(2) $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Riešenie
(1) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.
Pre argumet φ platí:

$$\cos\varphi = \frac{-1}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Z toho vyplýva, že $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Potom goniometrický tvar čísala z je

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

a exponenciálny tvar je

$$z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

(2) $z = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + 2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$
Ak $\cos\frac{\alpha}{2} \geq 0$, tak goniometrický tvar čísla z je

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

a exponenciálny

$$2\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

Ak $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, tak $\cos\frac{\alpha}{2} = -\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$ a

$$\begin{aligned} z = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|(-1)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) &= 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|(\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \\ = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|\left(\cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)\right) &= 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|e^{i\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

■

Veta 1.4. Nech $x = |x|(\cos\xi + i\sin\xi)$, $y = |y|(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, $n \in \mathbf{N}$, potom

$$\begin{aligned} xy &= |x||y|[\cos(\xi+\vartheta) + i\sin(\xi+\vartheta)] = |x||y|e^{i(\xi+\vartheta)} \\ \frac{x}{y} &= \frac{|x|}{|y|}[\cos(\xi-\vartheta) + i\sin(\xi-\vartheta)] = \frac{|x|}{|y|}e^{i(\xi-\vartheta)}, \text{ pre } y \neq 0 \\ x^n &= |x|^n(\cos n\xi + i\sin n\xi) = |x|^n e^{in\xi} \quad \text{- Moivreova veta (čítaj Moavrova)} \end{aligned}$$

□

Príklad 1.8. Vypočítajte

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})^4}{[(-1 - i)(-3 + i\sqrt{3})]^2}$$

Riešenie

$$|1-i\sqrt{3}|=2,\ |-1-i|=\sqrt{2},\ |-3+i\sqrt{3}|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$$

Označme $\alpha=\arg(1-i\sqrt{3})$, $\beta=\arg(-1-i)$, $\gamma=\arg(-3+i\sqrt{3})$, potom

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha=\frac{1}{2}, & \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}, & \sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}, & \sin\gamma=\frac{1}{2} \end{array}$$

odkiaľ

$$\alpha=-\frac{\pi}{3},\ \beta=\frac{5\pi}{4},\ \gamma=\frac{5\pi}{6}$$

Goniometrické tvary jednotlivých komplexných čísel sú

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right),\ -1-i=\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{4}+i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right),$$
$$-3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\cos\tfrac{5\pi}{6}+i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right)$$

Teraz počítajme:

$$\frac{(1-i\sqrt{3})^4}{[(-1-i)(-3+i\sqrt{3})]^2}=$$
$$=\frac{\left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\right]^4}{\left\{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]\left[2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]\right\}^2}=$$
$$=\frac{16\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]}{\left[2\sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\frac{25\pi}{12}\right)\right]^2}=\frac{16\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right]}{24\left(\cos\frac{25\pi}{6}+i\sin\frac{25\pi}{6}\right)}=$$
$$=\frac{16}{24}\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{3}-\frac{25\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{11\pi}{2}\right)\right]=\frac{2}{3}\left[\cos\left(-6\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\frac{\pi}{2}\right]=\frac{2}{3}i$$

■

Príklad 1.9. Pre $\alpha\in\mathbf{R}$ vyjadrite $\cos 3\alpha$ a $\sin 3\alpha$ pomocou mocnín $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$.

Riešenie

Úlohu budeme riešiť pomocou komplexných čísel. Umocnením komplexnej jednotky $\cos\alpha+i\sin\alpha$ pomocou binomickej vety dostaneme

$$\begin{aligned}(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3 &= \cos^3\alpha+3i\cos^2\alpha\sin\alpha+3i^2\cos\alpha\sin^2\alpha+i^3\sin^3\alpha= \\ &= \cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha+(3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha)i\end{aligned}$$

Podľa Moivreovej vety však platí

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych častí oboch čísel dostaneme

$$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha$$
$$\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha$$

■

Binomická rovnica.

Rovnica

$$x^n=a$$

kde $a\in\mathbf{C}, n$ je prirodzené číslo, sa nazýva *binomická rovnica stupňa n.*

Pre absolútnu hodnotu riešenia binomickej rovnice platí

$$|x|^n=|a|$$

odkiaľ

$$|x|=\sqrt[n]{|a|}$$

Ak $a = 0$, tak zrejme jediným riešením binomickej rovnice je $x = 0$.

Nech teraz $a \neq 0$. V takom prípade číslo a má exponenciálny tvar, povedzme $a = |a|e^{i\alpha}$. Hľadajme riešenie binomickej rovnice v exponenciálnom tvare. Potom

$$x = \sqrt[n]{|a|}e^{i\xi}$$

pričom stačí už len určiť honotu ξ. Dosadením do binomickej rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{|a|}e^{i\xi}\right)^n &= |a|e^{i\alpha}\\ |a|e^{in\xi} &= |a|e^{i\alpha}\\ e^{in\xi} &= e^{i\alpha}\\ n\xi_k &= \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\\ \xi_k &= \frac{\alpha + 2k\pi}{n}\end{aligned}$$

Vidíme, že každé dva susedné argumenty $\xi_k,\ \xi_{k+1}$ sa od seba líšia o konštantnú hodnotu $\frac{2\pi}{n}$ a pre $k = 0, 1, \dots, n-1$ sú všetky argumenty ξ_k navzájom rôzne a ležia v intervale $\langle \frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n} + 2\pi)$. Každý iný argument ξ_k dostaneme z uvedených n argumentov pripočítaním vhodného celočíselného násobku čísla 2π. Tieto zistenia nám umožňujú vysloviť tvrdenie

Veta 1.5. Binomická rovnica

$$x^n = a$$

kde $a \neq 0,\ a = |a|e^{i\alpha},\ n \in \mathbf{N}$ má práve n navzájom rôznych koreňov

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

ktoré v Gaussovej rovine ležia na kružnici so stredom 0, polomerom $\sqrt[n]{|a|}$ a tvoria vrcholy pravidelného n-uholníka.

□

Príklad 1.10. Vyriešte rovnicu
a) $x^3 + i = 0$,
b) $x^2 = 3 - 4i$.

Riešenie

a) $x^3 = -i$
$x^3 = e^{i(-\frac{\pi}{2})}$
$x_k = \sqrt[3]{1}e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}},\ k = 0, 1, 2$
$x_0 = e^{i(-\frac{\pi}{6})} = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
$x_1 = e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
$x_2 = e^{i\frac{-\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Koreňmi rovnice sú čísla $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

b) $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Pre argument α čísla $3 - 4i$ platí $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Číslo α nebudeme vyčísľovať, lebo ako uvidíme, jeho hodnotu nebudeme potrebovať. Všimnime si ešte, že z predchádzajúcich vzťahov vyplýva $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ a odtiaľ $\frac{\alpha}{2} \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$.

Exponenciálny tvar pravej strany rovnice je $5e^{i\alpha}$. Potom pre korene rovnice platí

$$x_k = \sqrt{5}e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{2}},\ k = 0, 1$$

teda

$x_0 = \sqrt{5}e^{i\frac{\alpha}{2}}$
$x_1 = \sqrt{5}e^{i\frac{\alpha+2\pi}{2}} = \sqrt{5}e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\pi} = -\sqrt{5}e^{i\frac{\alpha}{2}} = -x_0$

Vidíme, že korene binomickej rovnice druhého stupňa sú navzájom opačné čísla.
Už sme zistili, že $\frac{\alpha}{2}$ leží v druhom kvadrante, preto

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Potom

$$x_0 = \sqrt{5}(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}i\right) = -2+i$$
$$x_1 = -x_0 = 2-i$$

Koreňmi rovnice sú čísla $-2+i,\ 2-i$.

■

Kvadratická a bikvadratická rovnica.

Rovnica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kde $a, b, c \in \mathbf{C},\ a \neq 0$ sa nazýva *kvadratická rovnica.*

Upravme ľavú stranu kvadratickej rovnice:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

Teraz môžeme kvadratickú rovnicu písať v tvare

$$\begin{aligned} a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] &= 0 \ \Big/ \cdot\frac{1}{a} \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} &= 0 \end{aligned}$$

Komplexné číslo $D = b^2 - 4ac$ sa nazýva *diskriminant kvadratickej rovnice.*
Nech d je komplexné číslo, pre ktoré platí $d^2 = D$. Také čislo d vždy existuje (dokonca pre $D \neq 0$ sú také čísla dve - navzájom opačné), získame ho vyriešením binomickej rovnice $y^2 = D$.
Pokračujme v úprave kvadratickej rovnice:

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{d^2}{4a^2} &= 0 \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{d}{2a}\right)^2 &= 0 \\ \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{d}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{d}{2a}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Súčin koplexných čísel sa rovná nule práve vtedy, keď aspoň jedno z nich je nulové, preto

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{d}{2a} = 0 \quad \text{alebo} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{d}{2a} = 0$$

odkiaľ

$$x = \frac{-b+d}{2a} \quad \text{alebo} \quad x = \frac{-b-d}{2a}$$

Tým sme dokázali tvrdenie:

Veta 1.6. Kvadratická rovnica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kde $a, b, c \in \mathbf{C},\ a \neq 0$ má korene

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm d}{2a}$$

kde d je jeden z koreňov binomickej rovnice $y^2 = b^2 - 4ac$.

□

Poznámka 1.2. Ak diskriminant kvadratickej rovnice $D = b^2 - 4ac$ je reálne nezáporné číslo, tak jedným koreňom binomickej rovnice $y^2 = D$ je reálne číslo $\sqrt{D}$ a korene kvadratickej rovnice majú tvar

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Ak D je záporné reálne číslo, tak jedným koreňom binomickej rovnice $y^2 = D$ je imaginárne číslo $i\sqrt{|D|}$ a korene kvadratickej rovnice majú tvar

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

Príklad 1.11. Vyriešte kvadratickú rovnicu $x^2 - 2x - 2 + 4i = 0$

Riešenie

Vypočítame najpr diskriminant:

$$D = (-2)^2 - 4(-2 + 4i) = 4 + 8 - 16i = 12 - 16i = 4(3 - 4i)$$

Pre argument δ diskriminantu D platí

$$\cos\delta = \frac{3}{5},\ \sin\delta = -\frac{4}{5},\ \delta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right),\ \frac{\delta}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$$

Jedným riešením binomickej rovnice $y^2 = 4(3 - 4i)$ je

$$d = \sqrt{4 \cdot 5}\left(\cos\frac{\delta}{2} + i\sin\frac{\delta}{2}\right) = 2\sqrt{5}\left(-\sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}\right) = -4 + 2i$$

Pre korene kvadratickej rovnice platí

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm (-4 + 2i)}{2} = \begin{cases} -1 + i \\ 3 - i \end{cases}$$

Kvadratická rovnica má dva korene $-1 + i$ a $3 - i$.

■

Bikvadratickou rovnicou nazývame rovnicu

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a, b, c \in \mathbf{C},\ c \neq 0$$

Riešime ju pomocou substitúcie $z = x^2$, čím dostaneme kvadratickú rovnicu $az^2 + bz + c = 0$, ktorú vieme riešiť.

Príklad 1.12. Vyriešte bikvadratickú rovnicu $x^4 - 2x^2 - 2 + 4i = 0$.

Riešenie

Po substitúcii $z = x^2$ dostaneme kvadratickú rovnicu $z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$, ktorej korene sme vypočítali v predchádzajúcom príklade. Teda $z_1 = -1 + i,\ z_2 = 3 - i$. Stačí už len vyriešiť binomické rovnice

$$x^2 = -1 + i \qquad\qquad x^2 = 3 - i$$
$$|-1+i| = \sqrt{2},\ \cos\alpha = -\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ \alpha \in \left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right) \qquad |3-i| = \sqrt{10},\ \cos\beta = \tfrac{3}{\sqrt{10}},\ \beta \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$
$$\cos\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} \qquad \cos\tfrac{\beta}{2} = -\sqrt{\tfrac{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}{2}} = -\sqrt{\tfrac{\sqrt{10}+3}{2\sqrt{10}}}$$
$$\sin\tfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\tfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \qquad \sin\tfrac{\beta}{2} = \sqrt{\tfrac{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}{2}} = \sqrt{\tfrac{\sqrt{10}-3}{2\sqrt{10}}}$$
$$x^2 = \sqrt{2}e^{i\alpha} \qquad\qquad x^2 = \sqrt{10}e^{i\beta}$$
$$x_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\alpha}{2}} \qquad\qquad x_0 = \sqrt[4]{10}e^{i\frac{\beta}{2}}$$
$$x_0 = \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right) \qquad x_0 = \sqrt[4]{10}\left(-\sqrt{\tfrac{\sqrt{10}-3}{2\sqrt{10}}} + i\sqrt{\tfrac{\sqrt{10}+3}{2\sqrt{10}}}\right)$$
$$x_0 = \sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \qquad x_0 = -\sqrt{\tfrac{\sqrt{10}+3}{2}} + i\sqrt{\tfrac{\sqrt{10}-3}{2}}$$
$$x_1 = -x_0 = -\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \qquad x_1 = -x_0 = \sqrt{\tfrac{\sqrt{10}+3}{2}} - i\sqrt{\tfrac{\sqrt{10}-3}{2}}$$

Koreňmi bikvadratickej rovnice sú čísla

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \qquad -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},$$
$$-\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}, \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}.$$

■

Cvičenie 1.1.

(1) Nájdite reálne čísla $r,\ s$ tak, aby platilo
  (a) $(2-4i)r + (3-5i)s = 2i$ $[r=-3,\ s=2]$
  (b) $(-3-2i)r + (-1+2i)si = -6-5i$ $[r=4,\ s=-3]$

(2) Kedy je súčet komplexných čísel $a+bi,\ c+di$ číslo a) reálne, b) imaginárne, c) rýdzoimaginárne?
[a) $b=-d$, b) $b \neq -d$ c) $a=-c,\ b\neq -d$]

(3) Vypočítajte
  (a) $(2+3i)(3-4i)-(5-4i)$ $[13+5i]$
  (b) $(-2+3i)^3$ $[46+9i]$
  (c) $i^n,\ n \in \mathbf{N}$ $\left[\begin{array}{l} i \text{ pre } n=1+4k, \\ -1 \text{ pre } n=2+4k \\ -i \text{ pre } n=3+4k \\ 1 \text{ pre } n=4k \end{array}\right]$
  (d) $\dfrac{2}{-1+3i}$ $[-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i]$
  (e) $\dfrac{(1-i)^3}{(2+i)(1+2i)}$ $[-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}i]$

(4) Pre ktoré komplexné čísla $z=a+bi$ platí
  (a) $z=\overline{z}$ $[a\in\mathbf{R},\ b=0]$
  (b) $z^2=\overline{z}$ $[0,1,-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}]$

(5) Vypočítajte absolútnu hodnotu komplexných čísel
  (a) $3-4i$ $[5]$
  (b) $\dfrac{(1+i)^{12}}{(1-i)^{10}}$ $[2]$

(6) Napíšte v goniometrickom a exponenciálnom tvare

(a) 5 $[5(\cos 0 + i\sin 0) = 5e^{i0}]$

(b) -3 $[3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3e^{i\pi}]$

(c) $2i$ $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$

(d) $-i$ $\left[\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = e^{i\frac{3\pi}{2}}\right]$

(e) $-\sqrt{3} - 3i$ $\left[2\sqrt{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}\right]$

(f) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ $\left[2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\right]$

(g) $1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$ $\left[\begin{array}{l} 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)},\ \text{ak } \alpha \in \langle 4k\pi, 2\pi + 4k\pi\rangle \\ 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| e^{i\left(\frac{3\pi-\alpha}{2}\right)},\ \text{ak } \alpha \in (2\pi + 4k\pi, 4\pi + 4k\pi) \end{array}\right]$

(7) Vypočítajte

(a) $\dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}$ $[\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha]$

(b) $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1 - i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{12}\right)\right)\right]$

(c) $\dfrac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \dfrac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$ $[-64]$

(8) Vyjadrite $\cos 5x,\ \sin 5x$ pomocou mocnín $\sin x,\ \cos x$.

$$\left[\begin{array}{l} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x \\ \sin 5x = \sin^5 x - 10\sin^3 x\cos^2 x + 5\sin x\cos^4 x \end{array}\right]$$

(9) Riešte binomickú rovnicu

(a) $x^2 = 2i$ $[\pm(1 + i)]$

(b) $x^2 = -8i$ $[\pm(2 - 2i)]$

(c) $x^2 = -8 - 6i$ $[\pm(1 - 3i)]$

(d) $x^3 = -i$ $\left[i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\right]$

(e) $x^4 = -4$ $[1 \pm i, -1 \pm i]$

(f) $(\sqrt{3} + i)x^6 = 1 - i$ $\left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19+24k}{72}\pi + i\sin\frac{19+24k}{72}\pi\right) \\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \end{array}\right]$

(10) Riešte kvadratickú rovnicu

(a) $x^2 - (2 + i)x - 1 + 7i = 0$ $[3 - i, -1 + 2i]$

(b) $x^2 - (3 - 2i)x + 5 - 5i = 0$ $[2 + i, 1 - 3i]$

(c) $(2 + i)x^2 - (5 + i)x + 2 - 2i = 0$ $\left[2, \frac{1-3i}{5}\right]$

(11) Riešte bikvadratickú rovnicu

(a) $x^4 + (4 + 2i)x^2 + 8i = 0$ $[\pm 2i, \pm(1 - i)]$

(b) $x^4 - (5 + 4i)x^2 + 6 + 8i = 0$ $[\pm\sqrt{2}, \pm(2 + i)]$