LINEÁRNA ALGEBRA

RNDr. Peter Kaprálik, PhD.
KM FEI STU, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava
24. 2. 2002

1. Determinanty štvorcových matíc

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica stupňa n, potom budeme používať nasledujúce označenia:

$\mathbf{A}_{jk}$ – matica, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vyškrtnutím j-tého riadku a k-tého stĺpca ($n \geq 2$),

$\mathbf{A}_{jk;rs}$ – matica, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vyškrtnutím j-tého a k-tého riadku a r-tého a s-tého stĺpca ($n \geq 3$)

Príklad 1.1. Nech $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{pmatrix}$, potom napr. $\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 5, & 6 \\ 8, & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 7, & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_{12;13} = (8)$.

■

Definícia 1.1. *Determinantom* štvorcovej matice $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$ nazývame číslo, ktoré označujeme $\det \mathbf{A}$ a definujeme takto:

(1) ak $n = 1$, $\det \mathbf{A} = \det (a_{11}) = a_{11}$

(2) ak $n \geq 2$,

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} + a_{13} \det \mathbf{A}_{13} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \mathbf{A}_{1n} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det \mathbf{A}_{1k} \quad \text{– \textit{rozvoj determinantu podľa prvého riadku}}$$

Poznámka 1.1. Determinant matice $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$, ktorá má riadky $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \ldots, \mathbf{R}_n$ a stĺpce $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n$ budeme tiež označovať symbolmi

$$|\mathbf{A}|, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}, \quad |\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_n|$$

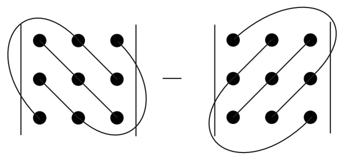
Príklad 1.2.

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23} \\ a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{31}, & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{32}a_{23} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22})$$

■

Poznámka 1.2. Na výpočet determinantu matice tretieho stupňa môžeme použiť *Sarusovo pravidlo*. Je to schéma, v ktorej je naznačené. ktoré prvky matice je potrebné vynásobiť a ako tieto súčiny sčítať. Jednou takou schémou je



v ktorej prvky matice sú znázornené krúžkami. Prvky pospájané čiarami sa vynásobia a od súčtu súčinov prvej skupiny sa odčíta súčet súčinov druhej skupiny.

Príklad 1.3. Vypočítajme Sarusovým pravidlom

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 3, & 2, & 5 \\ 1, & 1, & 2 \end{vmatrix}$$

Riešenie

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 3, & 2, & 5 \\ 1, & 1, & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2) = 2$$

Veta 1.1. Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$, $n \geq 2$, potom

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{21} \det \mathbf{A}_{21} + a_{31} \det \mathbf{A}_{31} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det \mathbf{A}_{n1} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1} \quad - \textit{rozvoj determinantu podľa prvého stĺpca} \end{aligned}$$

Dôkaz (matematickou indukciou vzhľadom na stupeň matice $\mathbf{A}$)

1. $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{21} \det \mathbf{A}_{21}$$

2. Nech veta je pravdivá pre všetky matice stupňa $n-1$, $n \geq 3$. Podľa definície je

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det \mathbf{A}_{1k} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \det \mathbf{A}_{1k}$$

Využime indukčný predpoklad a vyjadrime $\det \mathbf{A}_{1k}$ pre $k \geq 2$ rozvojom podľa prvého stĺpca. Pritom si uvedomme, že j-tý riadok matice $\mathbf{A}$ pre $j \geq 2$ je $(j-1)$-tým riadkom matice $\mathbf{A}_{1k}$ a pre $k \geq 2$ majú všetky matice $\mathbf{A}_{1k}$ rovnaký prvý stĺpec $(a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1})^T$.

$$\det \mathbf{A}_{1k} = \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+(j-1)} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1;1k}$$

Dosaďme to do predchádzajúceho vyjadrenia determinantu matice $\mathbf{A}$.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+(j-1)} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1;1k} = \\ &= a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + \sum_{k=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+k+j} a_{1k} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1;1k} = \\ &= a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} (-1)^{1+k+j} a_{1k} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1;1k} = \\ &= a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k} a_{1k} \det \mathbf{A}_{j1;1k} \end{aligned}$$

Vyjadrime $\det \mathbf{A}_{j1}$ pre $j \geq 2$ rozvojom podľa prvého riadku.

$$\det \mathbf{A}_{j1} = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{1+(k-1)} a_{1k} \det \mathbf{A}_{j1;1k}$$

Na základe toho

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1}$$

čo je rozvoj det **A** podľa prvého stĺpca.

□

Príklad 1.4. Vypočítajme

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 3, & 2, & 1 \\ 0, & -1, & 2, & 1 \\ 2, & 5, & 2, & 2 \end{vmatrix}$$

Riešenie

V prvom stĺpci je veľa núl, preto na výpočet použijeme rozvoj podľa prvého stĺpca.

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 3, & 2, & 1 \\ 0, & -1, & 2, & 1 \\ 2, & 5, & 2, & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3, & 2, & 1 \\ -1, & 2, & 1 \\ 5, & 2, & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ -1, & 2, & 1 \\ 5, & 2, & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 3, & 2, & 1 \\ 5, & 2, & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 3, & 2, & 1 \\ -1, & 2, & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3, & 2, & 1 \\ -1, & 2, & 1 \\ 5, & 2, & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 3, & 2, & 1 \\ -1, & 2, & 1 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 10 - (10 + 6 - 4) - 2(2 + 6 - 1 - (-2 + 2 + 3)) =$$

$$= 20 - 12 - 2(7 - 3) = 0$$

■

Veta 1.2. Determinat hornej resp. dolnej trojuholníkovej matice sa rovná súčinu prvkov na jej hlavnej diagonále.

Dôkaz

Rozvojom podľa prvého stĺpca pre determinant hornej trojuhoníkovej matice dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1\,n-1}, & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2\,n-1}, & a_{2n} \\ 0, & 0, & a_{33}, & \ldots, & a_{3\,n-1}, & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_{n-1\,n-1}, & a_{n-1\,n} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2\,n-1}, & a_{2n} \\ 0, & a_{33}, & \ldots, & a_{3\,n-1}, & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & a_{n-1\,n-1}, & a_{n-1\,n} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33}, & \ldots, & a_{3\,n-1}, & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \ldots, & a_{n-1\,n-1}, & a_{n-1\,n} \\ 0, & \ldots, & 0, & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22} \ldots a_{n-2\,n-2} \begin{vmatrix} a_{n-1\,n-1}, & a_{n-1\,n} \\ 0, & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \ldots a_{n-2\,n-2}\, a_{n-1\,n-1} a_{nn}$$

V prípade dolnej trojuholníkovej matice by sme postupovali rozvojom podľa prvého riadku.

□

Veta 1.3. Pre každú štvorcovú maticu **A**

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

Dôkaz (matematickou indukciou vzhľadom na stupeň matice $\mathbf{A}$)

Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$.

1. $n = 1$

$$\det \mathbf{A}^T = \det (a_{11})^T = \det (a_{11}) = \det \mathbf{A}$$

2. Nech veta platí pre všetky matice stupňa $n-1$, kde $n \geq 2$. Všimnime si, že transponovaná matica k $\mathbf{A}_{jk}$ je $(\mathbf{A}_{jk})^T = \mathbf{A}_{kj}^T$.

Rozvoj determinantu matice $\mathbf{A}^T$ podľa prvého stĺpca je

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A}^T &= a_{11} \det \mathbf{A}_{11}^T - a_{12} \det \mathbf{A}_{21}^T + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \mathbf{A}_{n1}^T = \\ &= a_{11} \det (\mathbf{A}_{11})^T - a_{12} \det (\mathbf{A}_{12})^T + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det (\mathbf{A}_{1n})^T\end{aligned}$$

Matice $\mathbf{A}_{1k}$ sú stupňa $n-1$, preto podľa indukčného predpokladu je $\det (\mathbf{A}_{1k})^T = \det \mathbf{A}_{1k}$ a pre determinant matice $\mathbf{A}^T$ dostaneme

$$\det \mathbf{A}^T = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \mathbf{A}_{1n} = \det \mathbf{A}$$

□

Poznámka 1.3. Transponovaním matice sa z jej riadkov stanú stĺpce. Preto, na základe predchádzajúcej vety, ak determinant matice závisi určitým spôsobom od jej riadkov, rovnako závisí aj od jej stĺpcov. Z tohto dôvodu budeme vlastnosti determinantov formulovať aj dokazovať len pre riadky. Pre stĺpce si ich dokážete sformulovať sami.

Veta 1.4. Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$, $n \geq 2$, potom pre každé $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= (-1)^{j+1} a_{j1} \det \mathbf{A}_{j1} + (-1)^{j+2} a_{j2} \det \mathbf{A}_{j2} + \cdots + (-1)^{j+n} a_{jn} \det \mathbf{A}_{jn} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det \mathbf{A}_{jk} \quad \text{– \textit{rozvoj determinantu podľa j-tého riadku}}\end{aligned}$$

Dôkaz

Dá sa vykonať matematickou indukciou, podobne ako vo vete o determinante transponovanej matice.

□

Príklad 1.5. Vypočítajme

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & 1, & 1 \\ 1, & b, & 2, & 1 \\ 1, & c, & 1, & 2 \\ 2, & d, & 1, & 2 \end{vmatrix}$$

Riešenie

Rozviňme podľa druhého stĺpca:

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & 1, & 1 \\ 1, & b, & 2, & 1 \\ 1, & c, & 1, & 2 \\ 2, & d, & 1, & 2 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \\ 2, & 1, & 2 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \\ 2, & 1, & 2 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 2, & 1, & 2 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3a + b + d$$

■

Veta 1.5. Ak niektorý riadok štvorcovej matice $\mathbf{A}$ je nulový, tak $\det \mathbf{A} = 0$.

Dôkaz

Ak $\mathbf{A}$ je prvého stupňa, tak má jediný prvok, ktorý je nulový, a evidentne $\det \mathbf{A} = 0$. Ak je väčšieho stupňa, rozviňme determinant podľa nulového riadku.

□

Veta 1.6. Nech matica $\mathbf{B}$ vznikne zo štvorcovej matice $\mathbf{A}$ vzájomnou zámenou dvoch riadkov, potom $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Dôkaz (matematickou indukciou vzhľadom na stupeň matice $\mathbf{A}$)

Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$.

1. $n = 2$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} a_{21}, & a_{22} \\ a_{11}, & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\det \mathbf{A}$$

2. Nech veta platí pre všetky matice stupňa $n-1$, $n \geq 3$ a nech matica $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ výmenou r-tého a s-tého riadku, $r \neq s$. Matica $\mathbf{B}$ je stupňa aspoň 3, preto v nej existuje ďalší riadok - j-tý, $j \neq r$, $j \neq s$. Uvedomme si, že pre každé $k \in \{1, \dots, n\}$ sa matice $\mathbf{A}_{jk}$, $\mathbf{B}_{jk}$ odlišujú len poradím dvoch riadkov. Preto podľa indukčného predpokladu $\det \mathbf{B}_{jk} = -\det \mathbf{A}_{jk}$. Rozviňme determinant matice $\mathbf{B}$ podľa j-tého riadku:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det \mathbf{B}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} (-\det \mathbf{A}_{jk}) = \\ &= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det \mathbf{A}_{jk} = -\det \mathbf{A} \end{aligned}$$

□

Veta 1.7. Ak štvorcová matica $\mathbf{A}$ má dva riadky rovnaké, tak $\det \mathbf{A} = 0$.

Dôkaz

Nech r-tý a s-tý riadok matice $\mathbf{A}$ sú rovnaké, $r \neq s$. Nech matica $\mathbf{B}$ vnikne z $\mathbf{A}$ zámenou r-tého a s-tého riadku. Potom podľa predchádzajúcej vety $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$. Na druhej strane $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, preto $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$. Teda $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$, odkiaľ $\det \mathbf{A} = 0$.

□

Príklad 1.6.

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & -1 \\ 0, & 3, & 1 \\ 4, & -1, & 0 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{S}_1:\equiv:\mathbf{S}_3}{\equiv} - \begin{vmatrix} -1, & 2, & 1 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & -1, & 4 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{R}_1:\equiv:\mathbf{R}_2}{\equiv} \begin{vmatrix} 1, & 3, & 0 \\ -1, & 2, & 1 \\ 0, & -1, & 4 \end{vmatrix}$$

■

Veta 1.8. Nech matica $\mathbf{B}$ vznikne zo štvorcovej matice $\mathbf{A}$ vynásobením jej j-tého riadku číslom α. Potom $\det \mathbf{B} = \alpha \det \mathbf{A}$, čiže

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \alpha\mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}$$

Dôkaz

Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$. Rozviňme determinant matice $\mathbf{B}$ podľa j-tého riadku:

$$\det \mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \alpha a_{jk} \det \mathbf{A}_{jk} = \alpha \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det \mathbf{A}_{jk} = \alpha \det \mathbf{A}$$

□

Príklad 1.7.

$$6 \begin{vmatrix} \frac{2}{3}, & 1, & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3}, & -1, & 0 \\ 0, & 2, & -2 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{R}_1:\equiv 2\mathbf{R}_1}{\equiv} 3 \begin{vmatrix} \frac{4}{3}, & 2, & 3 \\ -\frac{1}{3}, & -1, & 0 \\ 0, & 2, & -2 \end{vmatrix} \overset{\mathbf{S}_1:\equiv 3\mathbf{S}_1}{\equiv} \begin{vmatrix} 4, & 2, & 3 \\ -1, & -1, & 0 \\ 0, & 2, & -2 \end{vmatrix}$$

■

Veta 1.9.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}'_j + \mathbf{R}''_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}'_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}''_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}$$

Dôkaz

Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}$, $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}'_j + \mathbf{R}''_j$, $\mathbf{R}'_j = (a'_{j1}, \ \ldots, \ a'_{jn})$, $\mathbf{R}''_j = (a''_{j1}, \ \ldots, \ a''_{jn})$.

Potom

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}'_j + \mathbf{R}''_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det \mathbf{A}_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} (a'_{jk} + a''_{jk}) \det \mathbf{A}_{jk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a'_{jk} \det \mathbf{A}_{jk} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a''_{jk} \det \mathbf{A}_{jk} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}'_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{j-1} \\ \mathbf{R}''_j \\ \mathbf{R}_{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix}$$

□

Príklad 1.8.

$$\begin{vmatrix} 2, & 1, & 3 \\ -1, & -1, & 0 \\ 0, & 2, & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2, & -1, & 3 \\ -1, & 1, & 0 \\ 0, & -2, & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 1-1, & 3 \\ -1, & -1+1, & 0 \\ 0, & 2-2, & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 0, & 3 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -4 \end{vmatrix} = 0$$

■

Veta 1.10. Nech matica $\mathbf{B}$ vznikne zo štvorcovej matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{pmatrix}$ nahradením riadku $\mathbf{R}_j$ riadkom $\alpha\mathbf{R}_j + \beta\mathbf{R}_k$, kde $\alpha, \ \beta$ sú ľubovoľné čísla, $j, k \in \{1, \ldots, n\}, \ j \neq k$. Potom $\det \mathbf{B} = \alpha \det \mathbf{A}$.

Dôkaz

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \alpha\mathbf{R}_j + \beta\mathbf{R}_k \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \alpha\mathbf{R}_j \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \beta\mathbf{R}_k \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_j \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \\ \vdots \\ \mathbf{R}_k \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A} + \beta\, 0 = \alpha \det \mathbf{A}$$

□

Príklad 1.9. Vypočítajme

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 3, & 1 \\ 4, & -3, & 4, & 2 \\ 3, & 5, & -1, & 2 \\ 6, & 10, & 1, & 3 \end{vmatrix}$$

Riešenie
Pomocou ERO a ESO vytvoríme v niektorom riadku alebo stĺpci čo najviac núl a potom rozvinieme podľa neho:

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & 3, & 1 \\ 4, & -3, & 4, & 2 \\ 3, & 5, & -1, & 2 \\ 6, & 10, & 1, & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_2:=\mathbf{R}_2-2\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_4:=\mathbf{R}_4-2\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_3:=2\mathbf{R}_3-3\mathbf{R}_1}}{=} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2, & -1, & 3, & 1 \\ 0, & -1, & -2, & 0 \\ 0, & 13, & -11, & 1 \\ 0, & 0, & 3, & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\, 2 \begin{vmatrix} -1, & -2, & 0 \\ 13, & -11, & 1 \\ 0, & 3, & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\mathbf{S}_2:=\mathbf{S}_2+3\mathbf{S}_3}{=} \begin{vmatrix} -1, & -2, & 0 \\ 13, & -8, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1, & -2 \\ 13, & -8 \end{vmatrix} = -(8+26) = -34$$

■

Príklad 1.10. Vypočítajme

$$\begin{vmatrix} a, & x, & x, & x, & x \\ x, & b, & x, & x, & x \\ x, & x, & c, & x, & x \\ x, & x, & x, & d, & x \\ x, & x, & x, & x, & e \end{vmatrix}$$

Riešenie
Pomocou ERO upravíme maticu na hornú trojuholníkovú.

$$\begin{vmatrix} a, & x, & x, & x, & x \\ x, & b, & x, & x, & x \\ x, & x, & c, & x, & x \\ x, & x, & x, & d, & x \\ x, & x, & x, & x, & e \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_j:=\mathbf{R}_j-\mathbf{R}_5 \\ j=1,2,3,4}}{=} \begin{vmatrix} a-x, & 0, & 0, & 0, & x-e \\ 0, & b-x, & 0, & 0, & x-e \\ 0, & 0, & c-x, & 0, & x-e \\ 0, & 0, & 0, & d-x, & x-e \\ x, & x, & x, & x. & e \end{vmatrix} =$$

Pokračujme úpravou $\mathbf{R}_5 := \mathbf{R}_5 - \frac{x}{a-x}\mathbf{R}_1 - \frac{x}{b-x}\mathbf{R}_2 - \frac{x}{c-x}\mathbf{R}_3 - \frac{x}{d-x}\mathbf{R}_4$ za predpokladu, že $x \neq a, b, c, d$.

$$= \begin{vmatrix} a-x, & 0, & 0, & 0, & x-e \\ 0, & b-x, & 0, & 0, & x-e \\ 0, & 0, & c-x, & 0, & x-e \\ 0, & 0, & 0, & d-x, & x-e \\ 0, & 0, & 0, & 0. & e-\frac{x(x-e)}{a-x}-\frac{x(x-e)}{b-x}-\frac{x(x-e)}{c-x}-\frac{x(x-e)}{d-x} \end{vmatrix} =$$

$$= (a-x)(b-x)(c-x)(d-x)\left(e+\tfrac{x(e-x)}{a-x}+\tfrac{x(e-x)}{b-x}+\tfrac{x(e-x)}{c-x}+\tfrac{x(e-x)}{d-x}\right)$$

Ostáva nám vypočítať determinant v prípadoch, keď $x \in \{a,b,c,d\}$. Urobíme to napr. pre $x = b$, v ostatných prípadoch by sme postupovali rovnako:

$$\begin{vmatrix} a, & b, & b, & b, & b \\ b, & b, & b, & b, & b \\ b, & b, & c, & b, & b \\ b, & b, & b, & d, & b \\ b, & b, & b, & b, & e \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathbf{R}_j:=\mathbf{R}_j-\mathbf{R}_2 \\ j=1,3,4,5}}{=} \begin{vmatrix} a-b, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ b, & b, & b, & b, & b \\ 0, & 0, & c-b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & d-b, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & e-b \end{vmatrix} \overset{\mathbf{S}_1:=\mathbf{S}_1-\mathbf{S}_2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & b, & b, & b, & b \\ 0, & 0, & c-b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & d-b, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & e-b \end{vmatrix} = (a-b)b(c-b)(d-b)(e-b)$$

■

Veta 1.11. Ak sú riadky štvorcovej matice $\mathbf{A}$ lineárne závislé, tak $\det \mathbf{A} = 0$.

Dôkaz

Nech riadky matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{pmatrix}$ sú lineárne závislé, potom jeden z nich je lineárnou kombináciou ostatných. Nech je to napr. $\mathbf{R}_1$ (keby to bol iný, postupovali by sme podobne). Existujú teda čísla $\beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_n$ tak, že

$$\mathbf{R}_1 = \beta_2\mathbf{R}_2 + \beta_3\mathbf{R}_3 + \cdots + \beta_n\mathbf{R}_n$$

Potom

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \beta_2\mathbf{R}_2 + \beta_3\mathbf{R}_3 + \cdots + \beta_n\mathbf{R}_n \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2\mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_3\mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} \beta_n\mathbf{R}_n \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} =$$

$$= \beta_2 \begin{vmatrix} \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \beta_3 \begin{vmatrix} \mathbf{R}_3 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} + \cdots + \beta_n \begin{vmatrix} \mathbf{R}_n \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n \end{vmatrix} = \beta_2\, 0 + \beta_3\, 0 + \cdots + \beta_n\, 0 = 0$$

□

Veta 1.12. Matica $\mathbf{A}$ je regulárna práve vtedy, keď $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Dôkaz

Nech $\det \mathbf{A} \neq 0$, potom podľa predchádzajúcej vety sú riadky matice $\mathbf{A}$ lineárne nezávislé, a teda matica $\mathbf{A}$ je regulárna.

Predpokladajme teraz, že $\mathbf{A}$ je regulárna matica. V tom prípade je riadkovo ekvivalentá s jednotkovou maticou. Uvedomme si, čo sa deje s determinantom, ak maticu $\mathbf{A}$ pomocou ERO upravíme na jednotkovú: výmena riadkov zmení znamienko determinantu; vynásobenie riadku nenulovým číslom znamená vynásobenie determinantu týmto číslom; tretia ERO dterminant nemení. Z toho vyplýva, že determinant matice $\mathbf{A}$ je nenulovým násobkom determinantu jednotkovej matice, a teda číslom rôznym od nuly, lebo $\det \mathbf{I} = 1$.

□

Príklad 1.11. Zistime, či sú pätice $(1,1,1,1,1)$, $(1,2,3,4,5)$, $(1,4,9,16,25)$, $(1,8,27,64,125)$, $(1,16,81,256,625)$ lineárne závislé alebo nezávislé.

Riešenie

Zapíšme pätice ako riadky matice $\mathbf{A}$ a vypočítajme jej determinant.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \\ 1, & 4, & 9, & 16, & 25 \\ 1, & 8, & 27, & 64, & 125 \\ 1, & 16, & 81, & 256, & 625 \end{vmatrix} \overset{\substack{\mathbf{S}_k := \mathbf{S}_k - \mathbf{S}_{k-1} \\ k=5,4,3,2}}{=} \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9 \\ 1, & 7, & 19, & 37, & 61 \\ 1, & 15, & 65, & 175, & 369 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 3, & 5, & 7, & 9 \\ 7, & 19, & 37, & 61 \\ 15, & 65, & 175, & 369 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 3, & 2, & 2, & 2 \\ 7, & 12, & 18, & 24 \\ 15, & 50, & 110, & 194 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2, & 2, & 2 \\ 12, & 18, & 24 \\ 50, & 110, & 194 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 12, & 6, & 6 \\ 50, & 60, & 84 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6, & 6 \\ 60, & 84 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6, & 0 \\ 60, & 24 \end{vmatrix} = 288$$

Determinant matice $\mathbf{A}$ je rôzny od nuly, čiže $\mathbf{A}$ je regulárna matica, preto dané pätice sú lineárne nezávislé.

■

Veta 1.13. Nech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú štvorcové matice stupňa n a nech $\mathbf{D}$ je regulárna matica, potom
(1) $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$
(2) $\det \mathbf{D}^{-1} = (\det \mathbf{D})^{-1}$

□

Veta 1.14. Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})$ je štvorcová matica stupňa n a nech $r, s \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, potom

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{sk} \det \mathbf{A}_{rk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, \text{ ak } r = s \\ 0, \text{ ak } r \neq s \end{cases}$$

Dôkaz

Ak $r = s$, uvedený výraz je rozvojom determinantu matice $\mathbf{A}$ podľa jej r-tého riadku. Ak $r \neq s$, je to rozvoj determinantu matice $\mathbf{B}$ podľa jej r-tého riadku, pričom matica $\mathbf{B}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahradením r-tého riadku jej s-tým riadkom. Matica $\mathbf{B}$ má dva riadky rovnaké, preto jej determinant sa rovná nule.

□

Veta 1.15. Nech $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$ je regulárna matica, $\mathbf{A}^{-1} = (c_{jk})_n^n$ je k nej inverzná matica, potom pre každé $j, k \in \{1,\ \ldots,\ n\}$

$$c_{jk} = (-1)^{j+k} \frac{\det \mathbf{A}_{kj}}{\det \mathbf{A}}$$

Dôkaz

Stačí dokázať, že súčin matíc $(a_{jk})_n^n$, $(c_{jk})_n^n$ je jednotková matica. Označme d_{jk} prvok na (j,k)-tom mieste súčinu týchto matíc. Potom

$$d_{jk} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} c_{rk} = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} (-1)^{r+k} \frac{\det \mathbf{A}_{kr}}{\det \mathbf{A}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{jr} \det \mathbf{A}_{kr} = \begin{cases} 1, \text{ ak } j = k \\ 0, \text{ ak } j \neq k \end{cases}$$

□

Príklad 1.12. Vypočítajme $\mathbf{A}^{-1}$ (pokiaľ existuje), ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2, & -6, & -3 \\ -2, & -7, & -2 \\ 1, & 2, & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2, & -6, & -3 \\ -2, & -7, & -2 \\ 1, & 2, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2, & -6, & -1 \\ -2, & -7, & 0 \\ 1, & 2, & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2, & -7 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = -(-4+7) = -3 \neq 0$$

Matica $\mathbf{A}$ je regulárna, preto inverzná matica k nej existuje.

$$\det \mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} -7, & -2 \\ 2, & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad \det \mathbf{A}_{12} = \begin{vmatrix} -2, & -2 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \det \mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} -2, & -7 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\det \mathbf{A}_{21} = \begin{vmatrix} -6, & -3 \\ 2, & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \det \mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} -2, & -3 \\ 1, & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \det \mathbf{A}_{23} = \begin{vmatrix} -2, & -6 \\ 1, & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\det \mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} -6, & -3 \\ -7, & -2 \end{vmatrix} = -9, \quad \det \mathbf{A}_{32} = \begin{vmatrix} -2, & -3 \\ -2, & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad \det \mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} -2, & -6 \\ -2, & -7 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} \det \mathbf{A}_{11}, & -\det \mathbf{A}_{12}, & \det \mathbf{A}_{13} \\ -\det \mathbf{A}_{21}, & \det \mathbf{A}_{22}, & -\det \mathbf{A}_{23} \\ \det \mathbf{A}_{31}, & -\det \mathbf{A}_{32}, & \det \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3, & 0, & 3 \\ 0, & 1, & -2 \\ -9, & 2, & 2 \end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3, & 0, & 9 \\ 0, & -1, & -2 \\ -3, & 2, & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 3 \\ 0, & -\frac{1}{3}, & -\frac{2}{3} \\ -1, & \frac{2}{3}, & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

■

Veta 1.16. (Cramerovo pravidlo) Nech $\mathbf{A}$ je regulárna matica stupňa n, $\mathbf{B}$ je matica typu $n \times 1$. Potom sústava lineárnych rovníc $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ má jediné riešenie:

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}} (\det \mathcal{A}_1, \ \det \mathcal{A}_2, \ \ldots, \ \det \mathcal{A}_n)$$

kde $\mathcal{A}_j$ je matica, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahradením j-tého stĺpca pravou stranou $\mathbf{B}$ sústavy.

Dôkaz

Nech $\mathbf{B} = (b_1, \ \ldots, \ b_n)^T$. Matica $\mathbf{A} = (a_{jk})_n^n$ je regulárna, teda jej hodnosť a tiež hodnosť matice sústavy je n, čo je zároveň počet neznámych. Z toho vyplýva, že sústava má jediné riešenie. Toto riešenie môžeme získať aj tak, že maticovú rovnicu $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ vynásobíme zľava maticou $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, pričom pre j-tú zložku platí

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{j+k} \frac{\det \mathbf{A}_{kj}}{\det \mathbf{A}} \right] b_k = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} b_k \det \mathbf{A}_{kj} = \frac{\det \mathcal{A}_j}{\det \mathbf{A}}$$

□

Príklad 1.13. Riešme sústavu lineárnych rovníc s parametrom $\beta \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} \beta x + \ \ y + \ \ z &= 1 \\ x + \beta y + \ \ z &= \beta \\ x + \ \ y + \beta z &= \beta^2 \end{aligned}$$

Riešenie

V prípadoch, kedy je matica sústavy regulárna, vyriešime sústavu Cramerovým pravidlom, v ostatných prípadoch Gaussovou eliminačnou metódou.

$$D = \begin{vmatrix} \beta, & 1, & 1 \\ 1, & \beta, & 1 \\ 1, & 1, & \beta \end{vmatrix} = \beta^3 - 3\beta + 2$$

Pre racionálne korene $\frac{p}{q}$ rovnice $\beta^3-3\beta+2=0$ platí $\frac{p}{q} \in \{\pm 1,\ \pm 2\}$. Hornerovou schémou zistíme, že 1 je dvojnásobným a -2 jednoduchým koreňom. Potom $D = \beta^3 - 3\beta + 2 = (\beta-1)^2(\beta+2)$.

1. Nech $\beta \neq 1, -2$.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1, & \beta, & 1 \\ \beta, & \beta, & 1 \\ \beta^2, & 1, & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 + \beta + \beta^3 - \beta^3 - 1 - \beta^3 = -\beta^3 + \beta^2 + \beta - 1 = -(\beta-1)^2(\beta+1)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \beta, & 1, & 1 \\ 1, & \beta, & 1 \\ 1, & \beta^2, & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 - 2\beta + 1 = (\beta-1)^2$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \beta, & 1, & 1 \\ 1, & \beta, & \beta \\ 1, & 1, & \beta^2 \end{vmatrix} = \beta^4 - 2\beta^2 + 1 = (\beta^2-1)^2 = (\beta-1)^2(\beta+1)^2$$

Riešením sústavy je trojica

$$\left(\frac{D_1}{D},\ \frac{D_2}{D},\ \frac{D_3}{D}\right) = \left(-\frac{\beta+1}{\beta+2},\ \frac{1}{\beta+2},\ \frac{(\beta+1)^2}{\beta+2}\right)$$

2. Nech $\beta = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & 1, & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 1 & 1 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \\ 0, & 0, & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Riešením sú všetky trojice $(1-s-t,\ s,\ t)$, kde $s, t \in \mathbf{R}$.

3. Nech $\beta = -2$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2, & 1, & 1 & 1 \\ 1, & -2, & 1 & -2 \\ 1, & 1, & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & -2 & 4 \\ 0, & 3, & -3 & 9 \\ 0, & -3, & 3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & -2 & 4 \\ 0, & 3, & -3 & 9 \\ 0, & 0, & 0 & 3 \end{array}\right)$$

V tomto prípade sústava nemá riešenie.

■

Cvičenie 1.

(1) Vypočítajte:

(a) $\begin{vmatrix} 3, & -2 \\ 4, & -5 \end{vmatrix}$ $[-7]$

(b) $\begin{vmatrix} 2-i, & -i \\ 3+i, & 1-i \end{vmatrix}$ $[0]$

(c) $\begin{vmatrix} 3, & -2, & 3 \\ 4, & -5, & 0 \\ -1, & 0, & 2 \end{vmatrix}$ $[-29]$

(2) Vyriešte rovnicu ($x \in \mathbf{C}$)

$$\begin{vmatrix} x, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & -x \\ 3, & x, & 2 \end{vmatrix} = 0$$ $\left[x \in \left\{1,\ \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}\right]$

(3) Napíšte rozvoj podľa 2. stĺpca:

(a) $\begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{vmatrix}$ $\left[-2\begin{vmatrix} 4, & 6 \\ 7, & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 7, & 9 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 4, & 6 \end{vmatrix}\right]$

(b) $\begin{vmatrix} 2, & -2, & 3, & 1 \\ 4, & -1, & 0, & 5 \\ 3, & 0, & -2, & 1 \\ 3, & 6, & -1, & -2 \end{vmatrix}$ $\left[2\begin{vmatrix} 4, & 0, & 5 \\ 3, & -2, & 1 \\ 3, & -1, & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 3, & -2, & 1 \\ 3, & -1, & -2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2, & 3, & 1 \\ 4, & 0, & 5 \\ 3, & -2, & 1 \end{vmatrix}\right]$

(4) Vypočítajte:

(a) $\begin{vmatrix} 2, & -2, & 3, & a \\ 4, & -1, & 0, & b \\ 3, & 0, & -2, & c \\ 3, & 6, & -1, & d \end{vmatrix}$ $[-51a + 84b - 75c - 3d]$

(b) $\begin{vmatrix} 5, & 2, & -2, & 3 \\ 4, & 2, & 1, & 1 \\ 3, & 6, & -9, & 6 \\ -4, & -1, & 1, & -2 \end{vmatrix}$ $[-6]$

(c) $\begin{vmatrix} 2, & 3, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 3, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 2, & 3 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}$ $[-10]$

(d) $\begin{vmatrix} 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 3, & -2, & 7, & 5, & 4 \\ 7, & 8, & 9, & 10, & 11 \\ 5, & 5, & 1, & -4, & 8 \\ -2, & -1, & 0, & 1, & 2 \end{vmatrix}$ $[0]$

(e) $\begin{vmatrix} 5, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3 \\ 2, & 7, & 2, & 2, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 5, & 3, & 3, & 3 \\ 2, & 2, & 2, & 7, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 3, & 3, & 5, & 3 \\ 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 7 \end{vmatrix}$ $[2^4 3^4 7]$

(5) Pomocou determinaqntov vypočítajte, pre aké hodnoty parametrov $a, b \in \mathbf{C}$ je matica $\mathbf{A}$ regulárna:

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a, & -2, & b \\ -2, & b, & -2 \\ 1, & -1, & 1 \end{pmatrix}$ $[a \neq b, b \neq 2]$

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1, & -a \\ 1, & 1, & -a, & 1 \\ 1, & -a, & 1, & 1 \\ -a, & 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ $[a \neq -1,\ 3]$

(c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a, & 0, & 0, & 0, & 0, & b \\ 0, & a, & 0, & 0, & b, & 0 \\ 0, & 0, & a, & b, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & b, & a, & 0, & 0 \\ 0, & b, & 0, & 0, & a, & 0 \\ b, & 0, & 0, & 0, & 0, & a \end{pmatrix}$ $[a \neq \pm b]$

(6) Pomocou determinantov vypočítajte inverznú maticu k matici:

(a) $\begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}\right]$

(b) $\begin{pmatrix} 2, & -2, & -3 \\ 5, & 1, & -2 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5, & -4, & 7 \\ -11, & 11, & -11 \\ 7, & -10, & 12 \end{pmatrix}\right]$

(7) Riešte sústavu lineárnych rovníc (použite Cramerove pravidlo, pokiaľ je to možné):

(a) $\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= -1 \\ 3x - 5y - z &= 2 \end{aligned}$ $[(-59,\ -37,\ 6)]$

(b) $\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x + by + z &= 3 \\ x + 2by + z &= 4 \end{aligned}$; $a, b \in \mathbf{R}$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 1,\ b \neq 0\ :\ \left\{\frac{1}{b(1-a)}(1-2b, 1-a, 4b-2ab-1)\right\} \\ a = 1,\ b = \frac{1}{2}\ :\ \{(2-t, 2, t); t \in \mathbf{R}\} \\ a \in \mathbf{R}, b = 0\ :\ \emptyset \\ a = 1, b \neq \frac{1}{2}\ :\ \emptyset \end{array}\right]$$