Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Pomocné pojmy

O funkcii budeme hovoriť v tom prípade, keď máme k dispozícii dve množiny A, B a pravidlo (predpis) f, pomocou ktorého je každému prvku $x \in A$ priradený práve jeden prvok $f(x) \in B$. (Zapisujeme $x \longmapsto f(x)$.) Teda funkcia je vlastne trojica (A, B, f), čo budeme zapisovať v tvare

$$f : A \longrightarrow B.$$

V tejto súvislosti množinu A nazývame definičný obor (obor definície) funkcie f. Zvykneme používať aj označenie $A = \mathcal{D}(f)$. Množinu B nazývame koobor funkcie f. Oborom hodnôt funkcie f nazývame množinu

$$\mathcal{H}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Je zrejmé, že vždy platí $\mathcal{H}(f) \subseteq B$. O obore hodnôt má zmysel uvažovať iba v prípade zloženej funkcie a pri inverznej funkcii. Vo zvyšných prípadoch vystačíme s kooborom.

Definícia 1 *Nech $f : A \longrightarrow B$ a $g : B \longrightarrow C$ sú dané funkcie. Potom je definovaná funkcia*

$$h = (g \circ f) : A \longrightarrow C,\ h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

Túto funkciu nazývame zložená funkcia (kompozícia) z funkcií f a g. Funkciu $g : B \longrightarrow C$ nazývame hlavná zložka a funkciu $f : A \longrightarrow B$ vedľajšia zložka zloženej funkcie.

Definícia 2 *Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow B$.*

1. *Nech pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Potom hovoríme, že funkcia f je injekcia.*

2. *Nech $B = \mathcal{H}(f)$. Potom hovoríme, že funkcia f je surjekcia.*

3. *Ak f je injekcia a aj surjekcia súčasne, tak ju nazývame bijekcia.*

Definícia 3 *Nech funkcia $f : A \longrightarrow B$ je bijekcia. Potom je definovaná funkcia*

$$f^{-1} : B \longrightarrow A,\ y \mapsto f^{-1}(y)$$

taká, že

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{práve vtedy, keď} \quad f(x) = y.$$

Funkciu $f^{-1} : B \longrightarrow A$ nazývame inverzná funkcia funkcie f.

Tento semester sa budeme zaoberať len reálnymi funkciami jednej reálnej premennej. To znamená, že $A \subseteq \mathbb{R}$ a aj $B \subseteq \mathbb{R}$. Pretože vo väčšine prípadov nás nebude zaujímať obor hodnôt funkcie, budeme uvažovať o maximálne možnom koobore, a teda položíme $B = \mathbb{R}$. Túto dohodu budeme zapisovať v tvare

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definícia 4 *Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Nech A je taká množina, že pre každé $x \in A$ aj $-x \in A$. Potom:*

1. *Ak pre každé $x \in A$ platí*
$$f(-x) = f(x),$$
tak hovoríme, že funkcia f je párna. (Jej graf je súmerný podľa osi y-ovej.)

2. *Ak pre každé $x \in A$ platí*
$$f(-x) = -f(x),$$
tak hovoríme, že funkcia f je nepárna. (Jej graf je súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy.)

Definícia 5 *Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Nech existuje $T > 0$ také, že*

1. *pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí: $x \in A$ práve vtedy, keď $x + T \in A$,*

2. *pre každé $x \in A$ platí $f(x) = f(x + T)$.*

Potom hovoríme, že f je periodická funkcia a T je jej perióda. Ak existuje najmenšie $T > 0$, ktoré spĺňa podmienky periodičnosti funkcie, tak ho nazývame najmenšia perióda funkcie f.

Poznamenávame, že nie každá periodická funkcia musí mať najmenšiu periódu (viď konštantná funkcia).

Definícia 6 *Nech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ je daná funkcia. Potom množinu*

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

nazývame graf funkcie f.

Definícia 7 *Nech $A \subset \mathbb{R}$ a existuje také $M > 0$, že pre každé $x \in A$ platí $|x| \leq M$. Potom hovoríme, že množina A je ohraničená.*

Definícia 8 *Uvažujme o funkcii $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Ak jej obor hodnôt $\mathcal{H}(f)$ je ohraničená množina, tak hovoríme, že funkcia f je ohraničená.*

1.2 Príklady

Časť I

1. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f, keď

   (a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sin(2x)} + \log(1-x)$. .... $[\langle -1,0) \cup (0,1)]$.

   (b) $f(x) = \sqrt{3 - \log_2 x}$. .... $[(0,8\rangle]$.

   (c) $f(x) = \sqrt{2\cos(3x) - \sqrt{3}}$.
   $\left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \right\rangle, \, k \in \mathbb{Z}\right]$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď

   (a) $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-x-2}}$.
   $[(-\infty,-1) \cup (2,\infty)\,;$ nie je párna, ani nepárna$]$.

   (b) $f(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1}$. .... $[\mathbb{R} \setminus \{0\}\,;$ nepárna$]$.

3. Daná je funkcia $f : f(x) = |x|\sqrt{\frac{x^2-4}{|4-x^2|}}$. Nájdite definičný obor, obor funkčných hodnôt, upravte predpis funkcie a potom načrtnite graf.
   $[\mathcal{D}(f) = (-\infty,-2) \cup (2,\infty); \quad \mathcal{H}(f) = (2,\infty)]$.

4. Zistite, či k funkcii $\sqrt{1 - \log_2(x-1)}$ existuje inverzná funkcia, ak áno, nájdite ju.
   $$\left[\begin{array}{l} f : (1,3\rangle \to \langle 0,\infty) \quad \text{je bijekcia,} \\ f^{-1} : \langle 0,\infty) \to (1,3\rangle,\ f^{-1}(x) = 2^{1-x^2} + 1. \end{array}\right].$$

5. V nasledujúcich príkladoch sú dané funkcie $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$. Nájdite množiny A, B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a potom nájdite jej predpis.

   (a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$.
   $$\left[\begin{array}{l} A = (-\infty,-1\rangle \cup (1,\infty)\,,\ B = \langle 0,\infty) \\ f : (-\infty,-1\rangle \cup (1,\infty) \to \langle 0,\infty)\,,\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \\ g : \langle 0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x}, \\ (g\circ f) : (-\infty,-1\rangle \cup (1,\infty) \to \mathbb{R},\ (g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}. \end{array}\right].$$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
   $$\left[\begin{array}{l} A = \langle 0,1) \cup (1,\infty)\,,\ B = (-\infty,1) \cup (1,\infty)\,, \\ f : \langle 0,1) \cup (1,\infty) \to (-\infty,1) \cup (1,\infty)\,,\ f(x) = \sqrt{x}, \\ g : (-\infty,1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x+1}{x-1}, \\ (g\circ f) : \langle 0,1) \cup (1,\infty) \to \mathbb{R},\ (g\circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}. \end{array}\right].$$

Časť II

1. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f, keď

   (a) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-x^2+6}}$. .... $[(-2,3)]$.

   (b) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x}$. .... $[(-\infty,0) \cup (0,1\rangle \cup \langle 3,\infty)]$.

   (c) $f(x) = \sqrt{-2+\log_3(x-1)}$. .... $[\langle 10,\infty)]$.

   (d) $f(x) = \sqrt{-2+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$. .... $[(1,\frac{10}{9}\rangle]$.

   (e) $f(x) = \sqrt{|x-3|-1}$. .... $[(-\infty,2\rangle \cup \langle 4,\infty)]$.

   (f) $f(x) = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cotg} x}}{\cos x}$.
   $\left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\left(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right\rangle\right\}\right]$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď

   (a) $f(x) = 1-\sqrt{2\cos(2x)}$. .... $[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle$, párna].

   (b) $f(x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$. .... $[(-3,3)$ nepárna].

   (c) $f(x) = \log\left(\frac{x^2-2}{x}\right)$.
   $[\left(-\sqrt{2},0\right) \cup \left(\sqrt{2},\infty\right)$, ani párna, ani nepárna].

   (d) $f(x) = \frac{x^3-x}{\sqrt{x^2-1}}$. .... $[\mathbb{R} \setminus \langle -1,1\rangle$, nepárna].

   (e) $f(x) = \sqrt{1-\operatorname{tg} x}$.
   $\left[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right\rangle\right.$, ani párna, ani nepárna$\left.\right]$.

3. Riešte tieto dve úlohy:

   (a) Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = -5+3\sqrt{x}$.
   $$\left[\begin{array}{l} f:\langle 0,\infty) \to \langle -5,\infty) \quad \text{je bijekcia,} \\ f^{-1}:\langle -5,\infty) \to \langle 0,\infty),\ f^{-1}(x) = \left(\frac{x+5}{3}\right)^2. \end{array}\right].$$

   (b) Daná je funkcia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2-4x$. Nájdite také dve zúženia s maximálnym $\mathcal{D}(f_i)$, $i=1,2$, aby k nim existovali inverzné funkcie. Nájdite ich predpisy a načrtnite grafy danej aj inverznej funkcie v oboch prípadoch.
   $$\left[\begin{array}{l} f_1:(-\infty,2\rangle \to \langle -4,\infty) \quad \text{je bijekcia,} \\ f_1^{-1}:\langle -4,\infty) \to (-\infty,2\rangle,\ f_1^{-1}(x) = 2-\sqrt{4+x}, \\ \\ f_2:\langle 2,\infty) \to \langle -4,\infty) \quad \text{je bijekcia,} \\ f_2^{-1}:\langle -4,\infty) \to \langle 2,\infty),\ f_1^{-1}(x) = 2+\sqrt{4+x}. \end{array}\right].$$

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f, ak

   (a) $f(x) = \arcsin(3x-5)$. .... $[\langle\frac{4}{3},2\rangle]$.

(b) $f(x) = \arcsin \frac{3}{x-2}$. .... $[(-\infty,-1\rangle \cup \langle 5,\infty)]$.

(c) $f(x) = \arccos(x^2 - 2x)$. .... $[\langle 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\rangle]$.

(d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-5}$. .... $[\mathbb{R} \setminus \{5\}]$.

(e) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}}$. .... $[(-\infty,2\rangle \cup \langle 3,\infty)]$.

(f) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{\sqrt{9-x^2}}{|x-1|}$. .... $[\langle -3,3\rangle \setminus \{1\}]$.

5. Dané sú funkcie $f : A \to B$, $g : B \to C$. Nájdite množiny A a B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a nájdite jej predpis , ak:

(a) $f(x) = \ln(5-x)$, $\quad g(x) = 2 + \sqrt{x}$.

$$\left[\begin{array}{l} A = (-\infty,4\rangle,\ B = \langle 0,\infty), \\ f : (-\infty,4\rangle \to \langle 0,\infty),\ f(x) = \ln(5-x), \\ g : \langle 0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = 2+\sqrt{x}, \\ (g\circ f) : (-\infty,4\rangle \to \mathbb{R},\ (g\circ f)(x) = g(f(x)) = 2+\sqrt{\ln(5-x)}. \end{array}\right].$$

(b) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, $\quad g(x) = \ln(5-x)$.

$$\left[\begin{array}{l} A = \langle 0,9),\ B = (-\infty,5), \\ f : \langle 0,9) \to (-\infty,5),\ f(x) = 2+\sqrt{x}, \\ g : (-\infty,5) \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln(5-x), \\ (g\circ f) : \langle 0,9) \to \mathbb{R},\ (g\circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(3-\sqrt{x}). \end{array}\right].$$

Časť III

1. Nakreslite graf funkcie f, ak

(a) $f(x) = \sqrt{x}$,

(b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

(c) $f(x) = 2^x$,

(d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$,

(e) $f(x) = \log_2 x$.

2. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f, keď

(a) $f(x) = \sqrt{3 - \log_2(5-x)}$. .... $[\langle -3,5)]$.

(b) $f(x) = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$. .... $[\langle \frac{7}{2},\infty)]$.

(c) $f(x) = \log_5 \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right)$. .... $[\langle 0,4)]$.

(d) $f(x) = \log_3 \left(\frac{2+\sqrt{x}}{2+x-x^2}\right)$. .... $[\langle 0,2)]$.

(e) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{x}$. .... $[\langle -1,0) \cup (0,3\rangle]$.

(f) $f(x) = \operatorname{arcotg} \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$. .... $[(-\infty,-3\rangle \cup (5,\infty)]$.

(g) $f(x) = \ln[1 - \log_{10}(x^2 - 5x + 16)]$. .... $[(2, 3)]$.

3. V nasledujúcich príkladoch nájdite definičný obor funkcie f a vyšetrite párnosť a nepárnosť funkcie, keď

   (a) $f(x) = x\sqrt{6 - 2|x|}$. .... $[\langle -3, 3\rangle$, nepárna$]$.

   (b) $f(x) = \ln(5 - |2x - 3|)$. .... $[(-1, 4)$ ani párna, ani nepárna$]$.

   (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|3x|}$. .... $[\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, párna$]$.

   (d) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(1-x)}$. .... $[\langle -1, 0) \cup (0, 1)$, ani párna, ani nepárna$]$.

   (e) $f(x) = \frac{|x|}{4-\sqrt{x^2-9}}$. .... $[(-\infty, -3\rangle \cup \langle 3, \infty) \setminus \{-5, 5\}$, párna$]$.

   (f) $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\ (2x)}$. .. $[\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$, ani párna, ani nepárna$]$.

4. Riešte nasledujúce dve úlohy:

   (a) Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = 3 + \arcsin(2x + 1)$.

   $$\left[\begin{array}{l} f : \langle -1, 0\rangle \to \langle 3 - \frac{\pi}{2}, 3 + \frac{\pi}{2}\rangle \quad \text{je bijekcia,} \\ f^{-1} : \langle 3 - \frac{\pi}{2}, 3 + \frac{\pi}{2}\rangle \to \langle -1, 0\rangle,\ f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(x - 3). \end{array}\right].$$

   (b) Vyšetrite, či funkcia $f : (-\infty, 0\rangle \to (-\infty, -7\rangle$, $f(x) = -x^2 + 4x - 7$ je bijekcia. Ak áno nájdite k nej inverznú funkciu.

   $$\left[\begin{array}{l} \text{Daná funkcia je bijekcia,} \\ f^{-1} : (-\infty, -7\rangle \to (-\infty, 0\rangle,\ f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{-x - 3}. \end{array}\right].$$

5. Dané sú funkcie $f : A \to B$, $g : B \to C$. Nájdite množiny A a B tak, aby existovala zložená funkcia $g \circ f$ a nájdite jej predpis , ak:

   (a) $f(x) = 6^x$, $\quad g(x) = \sqrt{x - 1}$.

   $$\left[\begin{array}{l} A = \langle 0, \infty),\ B = \langle 1, \infty), \\ f : \langle 0, \infty) \to \langle 1, \infty),\ f(x) = 6^x, \\ g : \langle 1, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x - 1}, \\ (g \circ f) : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{6^x - 1}. \end{array}\right].$$

   (b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $\quad g(x) = 6^x$.

   $$\left[\begin{array}{l} A = \langle 1, \infty),\ B = \mathbb{R}, \\ f : \langle 1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x - 1}, \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 6^x, \\ (g \circ f) : \langle 1, \infty) \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 6^{\sqrt{x-1}}. \end{array}\right].$$

Kapitola 2

Diferenciálny počet

2.1 Úvodné pojmy.

Definícia 9 *Nech* $a \in \mathbb{R}$ *a* $\varepsilon > 0$. *Epsilonovým okolím bodu a nazývame množinu* $\mathcal{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. *Prstencovým epsilonovým okolím bodu a nazývame množinu* $\mathcal{O}_\varepsilon^o(a) = \mathcal{O}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Množinu $\mathcal{O}_\varepsilon(\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, \infty)$ *nazývame* ε*-ovým okolím bodu* ∞. *Prstencové* ε*-ové okolie* $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty)$ *definujeme predpisom* $\mathcal{O}_\varepsilon^o(\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(\infty)$. *Podobne definujeme epsilonové a prstencové epsilonové okolie mínus nekonečna vzťahom* $\mathcal{O}_\varepsilon^o(-\infty) = \mathcal{O}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Definícia 10 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Definícia 11 *Nech* $A \subseteq \mathbb{R}$ *a* $a \in \mathbb{R}^*$. *Budeme hovoriť, že bod a je hromadným bodom množiny A, ak v každom* $\mathcal{O}_\varepsilon^o(a)$ *leží bod množiny A.*

2.2 Limita a spojitosť funkcie

Definícia 12 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ *a a je hromadným bodom množiny A. Ak pre každé* $\mathcal{O}_\varepsilon(b)$ *existuje* $\mathcal{O}_\delta^o(a)$ *také, že* $f(\mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(b)$, *hovoríme, že funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *má v bode a limitu b. Píšeme* $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Definícia 13 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a* $a \in A$ *je hromadným bodom množiny A. Ak* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, *budeme hovoriť, že funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *je spojitá v bode a.*

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $a \in C \subset A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá na množine C.*

Ak funkcia f je spojitá v každom bode $a \in A$, *tak budeme hovoriť, že funkcia f je spojitá.*

Veta 1 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a* $g : A \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{x \to a} f(x) = b_1 \in \mathbb{R}$ *a* $\lim_{x \to a} g(x) = b_2 \in \mathbb{R}$. *Potom*

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = b_1 + b_2$,

2. $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = b_1.b_2$,

3. *ak* $b_2 \neq 0$ *a aj* $g(x) \neq 0$ *pre každé* $x \in A$, *tak*

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{b_1}{b_2},$$

4. $\lim_{x\to a}|f|(x) = |b_1|$.

Definícia 14 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a* $C \subset A$. *Potom funkciu* $(f|C) : C \to \mathbb{R}$, $(f|C)(x) = f(x)$ *pre každé* $x \in C$, *nazývame zúženie funkcie* f *na množine* C.

Veta 2 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$, $C \subset A$ *a* $a \in \mathbb{R}^*$ *je hromadným bodom množiny* C. *Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = b$. *Potom aj* $\lim_{x\to a}(f|C)(x) = b$.

Definícia 15 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a* $a \in \mathbb{R}$. *Nech* $C = (-\infty, a)\cap A$ *a* $D = (a,\infty)\cap A$. *Ak* a *je hromadným bodom množiny* C, *tak* $\lim_{x\to a}(f|C)(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$ *nazývame limita funkcie* f *v bode* a *zľava.*

Podobne, ak a *je hromadným bodom množiny* D, *tak* $\lim_{x\to a}(f|D)(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$ *nazývame limita funkcie* f *v bode* a *sprava.*

Veta 3 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a* $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Ak $a \in \mathbb{R}$ *je hromadný bod množiny* $C = (-\infty, a)\cap A$, *tak aj* $\lim_{x\to a-} f(x) = b$.

Podobne, ak $a \in \mathbb{R}$ *je hromadný bod množiny* $D = (a,\infty)\cap A$, *potom* $\lim_{x\to a+} f(x) = b$.

Veta 4 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a bod* $a \in \mathbb{R}$ *je hromadný bod množiny* $C = (-\infty, a)\cap A$ *a aj hromadným bodom množiny* $D = (a,\infty)\cap A$. *Potom* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existuje práve vtedy, keď* $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$. *V prípade existencie potom platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x).$$

Definícia 16 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a* $a \in A$. *Nech* $C = (-\infty, a\rangle\cap A$ *a* $D = \langle a,\infty)\cap A$.

Ak a *je hromadným bodom množiny* C *a funkcia* $(f|C)$ *je spojitá v bode* a, *tak hovoríme, že funkcia* f *je spojitá v bode* a *zľava.*

Ak a *je hromadným bodom množiny* D *a funkcia* $(f|D)$ *je spojitá v bode* a, *tak hovoríme, že funkcia* f *je spojitá v bode* a *sprava.*

Veta 5 *Nech* $f : A \to \mathbb{R}$ *a bod* $a \in A$ *je hromadný bod množiny* $C = (-\infty, a\rangle\cap A$ *a aj hromadným bodom množiny* $D = \langle a,\infty)\cap A$. *Potom funkcia* f *je spojitá v bode* a *práve vtedy, keď je spojitá v bode* a *sprava aj zľava.*

Veta 6 *Nech* $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ *a* $g : B \to \mathbb{R}$. *Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *a* $\lim_{x\to b} g(x) = c$. *Nech je splnená aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:*

- *Pre každé* $x \in A \setminus \{a\}$ *je* $f(x) \neq b$.

- *Funkcia g je spojitá v bode b.*

Potom $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

Veta 7 *Nech $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ je spojitá v bode a a funkcia $g : B \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode $f(a)$. Potom funkcia $(g\circ f) : A \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode a.*

Dôsledok 1 *Zložená funkcia zo spojitých funkcií je spojitá.*

Definícia 17 *Nech* $\lim_{x\to a} f(x) \in \{\infty, -\infty\}$. *Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a nevlastnú limitu.*

Veta 8 *Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. *Potom* $\lim_{x\to a}(-f(x)) = -\infty$.

Veta 9 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$. Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $g(x) \geq k$ pre každé $x \in A$. Potom* $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \infty$.

Veta 10 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$. Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *a existuje $k \in \mathbb{R}$ také, že $k > 0$ a $g(x) \geq k$ pre každé $x \in A$. Potom* $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \infty$.

Veta 11 *Nech* $\lim_{x\to a} |f|(x) = \infty$. *Potom* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = 0$.

Veta 12 *Nech* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a pre každé $x \in A$ je $f(x) > 0$. Potom* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = \infty$.

Veta 13 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ a $h : A \to \mathbb{R}$. Potom*

1. *Ak pre každé $x \in A$ je $f(x) \leq g(x)$, tak v prípade existencie vlastných limít* $\lim_{x\to a} f(x)$ *a* $\lim_{x\to a} g(x)$, *platí:* $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

2. *Ak pre každé $x \in A$ je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ a* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$, *tak existuje aj* $\lim_{x\to a} g(x)$ *a platí:* $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

Veta 14 *Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá (na intervale $\langle a, b\rangle$.) Potom:*

1. *Je na intervale $\langle a, b\rangle$ ohraničená.*

2. *Nadobúda na intervale $\langle a, b\rangle$ minimum a aj maximum. To znamená, že existujú $c, C \in \langle a, b\rangle$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(c) \leq f(x) \leq f(C)$.*

3. *Ak $f(a).f(b) < 0$, potom existuje $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$,*

Dôsledok 2 *(Veta o medzihodnotách) Nech I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $a, b \in I$ sú ľubovoľné a $d \in \mathbb{R}$ je také, že* $\min\{f(a), f(b)\} \leq d \leq \max\{f(a), f(b)\}$. *Potom existuje* $c \in \langle \min\{a, b\}, \max\{a, b\}\rangle$ *také, že $f(c) = d$.*

2.2.1 Príklady

Časť I

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2+2x-3}$. .... $[-\frac{3}{2}]$.

   (b) $\lim_{x\to 0} \left[\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(2x)} + \ln(1-x^2)\right]$. .... $[\frac{1}{8}]$.

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{tg}(6x)}$. .... $[\frac{5}{6}]$.

   (d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. .... $[e^6]$.

   (e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3-2x}{2+5x}\right)^{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$. .... $[\sqrt{\frac{3}{2}}]$.

   (f) $\lim_{x\to\infty}(-4x^5+5x^3-7x+10)$. .... $[-\infty]$.

   (g) $\lim_{x\to-\infty}(-4x^5+5x^3-7x+10)$. .... $[\infty]$.

   (h) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-5}{2x^3-4x+1}$. .... $[0]$.

   (i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3-2x^2+7}{7x^3-3x^2-6x+9}$. .... $[\frac{4}{7}]$.

   (j) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5-3x^2+2x-1}{2x^3-x^2+x-1}$. .... $[\infty]$.

   (k) $\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$. .... $[1]$.

   (l) $\lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$. .... $[1]$.

   (m) $\lim_{x\to 1} \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$. .... $[\infty]$.

   (n) $\lim_{x\to-1} \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$. .... $[\infty]$.

   (o) $\lim_{x\to 0}(2^{\operatorname{cotg} x}-1)$. .... [Neexistuje].

   (p) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(2^{\operatorname{cotg} x}-1)$. .... $[1]$.

   (q) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2^{\operatorname{cotg} x}-1)$. .... $[0]$.

   (r) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$. .... $\left[e^{-1}\right]$.

2. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pre } x<0, \\ -\frac{1}{x}\cos x & \text{pre } x>0. \end{cases}$

   Vypočítajte $\lim_{x\to 0} f(x)$. .... $[-\infty]$.

3. Nech $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$. Vypočítajte

   (a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$. .... $[1]$,

   (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. .... $[1]$,

   (c) $\lim_{x\to 3+} f(x)$. .... $[\infty]$,

   (d) $\lim_{x\to 3-} f(x)$. .... $[-\infty]$.

Načrtnite graf funkcie.

4. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

(a) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{1-x} & \text{pre } x \neq 1, \\ -3 & \text{pre } x = 1. \end{cases}$

[$\lim_{x\to 1} f(x) = -3 = f(1)$, teda je v bode a spojitá].

(b) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{pre } x < 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0, \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{pre } x > 0. \end{cases}$

[$\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje, teda nie je v bode a spojitá].

5. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

(a) $a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-4x^2+x+6}{-x^2+3x-2} & \text{pre } x \neq 2 \quad \text{a} \quad x \neq 1, \\ p & \text{pre } x = 2. \end{cases}$ ... [$p = 3$].

(b) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} p\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right) & \text{pre } x < 0, \\ \frac{8-x}{p} & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$ .... [$p \in \{-2, 2\}$].

(c) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{p}{2} & \text{pre } x \leq 1, \\ -x + \frac{5p}{4} & \text{pre } x > 1. \end{cases}$

Potom načrtnite graf funkcie. .... [$p = 4$].

Časť II

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

(a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^2+x-2}$. .... [-1].

(b) $\lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$. .... [$4\sqrt{3}$].

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+3x-4}$. .... [$\frac{1}{5}$].

(d) $\lim_{x\to -4} \frac{x-1}{x^2+3x-4}$. .... [Neexistuje].

(e) $\lim_{x\to\infty}(1 - 3x + 7x^2 - 4x^3)$. .... [$-\infty$].

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{5x^3-3x^2+x+2}$. .... [0].

(g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^3-3x^2+x+2}{2x^2+1}$. .... [$-\infty$].

(h) $\lim_{x\to\infty} \frac{-5x^4+2x-3}{10x^4-4x^3+1}$. .... [$-\frac{1}{2}$].

(i) $\lim_{x\to\infty} x\left[\ln(x+1) - \ln x\right]$. .... [1].

(j) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x-1}$. .... [$e^3$].

2. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{pre } x < 3, \\ (x-3)^2 \sin \frac{1}{x-3} & \text{pre } x > 3. \end{cases}$
Vypočítajte $\lim_{x\to 3} f(x)$. .... [Neexistuje].

3. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x} & \text{pre } \frac{-\pi}{6} < x < 0, \\ 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \text{pre } 0 < x < \frac{\pi}{6}. \end{cases}$
Vypočítajte $\lim_{x\to 0} f(x)$. .... [3].

4. Vypočítajte limity funkcie $f(x)$ v ∞, $-\infty$ a v bodoch, v ktorých $f(x)$ nie je definovaná. Potom načrtnite graf, ak:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x^2+7x+10}$.
   $$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, & \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x\to-2+} f(x) = \infty, & \lim_{x\to-2-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x\to-5+} f(x) = -\infty, & \lim_{x\to-5-} f(x) = \infty \end{array}\right].$$

   (b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.
   $$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, & \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x\to-2+} f(x) = \infty, & \lim_{x\to-2-} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x\to 2+} f(x) = \infty, & \lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty \end{array}\right].$$

   (c) $f(x) = \frac{x^2-x^3}{|x-1|}$.
   $$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, & \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \\ \lim_{x\to 1+} f(x) = -1, & \lim_{x\to 1-} f(x) = 1, \end{array}\right].$$

5. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

   (a) $a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+6x-20}{x^3-3x^2+2x} & \text{pre } x \neq 2,\ x \neq 0,\ x \neq 1, \\ 7 & \text{pre } x = 2. \end{cases}$

   [$\lim_{x\to 2} f(x) = 7 = f(2),$ teda je v bode 2 spojitá].

   (b) $a = 4, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}} & \text{pre } x \neq 4, \\ 2 & \text{pre } x = 4. \end{cases}$

   [$\lim_{x\to 4} f(x) = 4\sqrt{3} \neq f(4) = 2,$ teda nie je v bode 4 spojitá].

   (c) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x\cos(3x)} & \text{pre } x \neq 0, \\ \frac{x+2}{x^2+1} & \text{pre } x = 0. \end{cases}$

   [$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2,$ teda je v bode 0 spojitá].

   (d) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} (x-1)\cos\frac{1}{x-1} & \text{pre } x < 1, \\ 2x^2 - 1 & \text{pre } x \geq 1. \end{cases}$

   [$\lim_{x\to 1} f(x)$ neexistuje, teda nie je v 1 spojitá].

(e) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pre } x \le 0, \\ \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} & \text{pre } x > 0. \end{cases}$

[$\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje, teda nie je v 0 spojitá].

6. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

   (a) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(5x)}{2x} & \text{pre } x \neq 0, \\ p & \text{pre } x = 0. \end{cases}$ .... [$p = \frac{5}{2}$].

   (b) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{pre } x \neq 0, \\ p & \text{pre } x = 0. \end{cases}$ .... [p neexistuje].

7. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá a potom načrtnite graf funkcie:

   (a) $a = 3, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-3} & \text{pre } x \neq 3, \\ p & \text{pre } x = 3. \end{cases}$ .... [$p = 1$].

   (b) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} px^2 & \text{pre } x \le 1, \\ \frac{6}{p} - \frac{px}{2} & \text{pre } x > 1. \end{cases}$ .... [$p = \pm 2$].

   (c) $a = -2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x+2|}x & \text{pre } x \neq -2, \\ p & \text{pre } x = -2. \end{cases}$ .... [p neexistuje].

8. Dá sa funkcia $f(x)$ dodefinovať v bode a tak, aby bola v ňom spojitá? (V prípade kladnej odpovede napíšte jej predpis!)

   (a) $a = 1, \quad f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$. ..... $\left[f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} & \text{pre } x \neq 1, \\ \frac{4}{3} & \text{pre } x = 1. \end{cases} \right]$.

   (b) $a = 2, \quad f(x) = \frac{x}{x-2}$. .. [$\lim_{x\to 2}$ neexistuje, nedá sa dodefinovať].

   (c) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(6x)}{\sin(2x)} & \text{pre } x < 0, \\ \frac{x+9}{x+3} & \text{pre } x > 0. \end{cases}$ .... [áno, $f(0) = 3$].

Časť III

1. Vypočítajte limity v nasledujúcich príkladoch:

   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-x-2}$. .... [1].

   (b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-2x-3}$. .... [0].

   (c) $\lim_{x\to -2} \frac{1-\sqrt{x+3}}{x+2}$. .... [$-\frac{1}{2}$].

   (d) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-5x}{\sqrt{x-1}-2}$. .... [20].

   (e) $\lim_{x\to\infty}(2 + 3x^2 + 7x^3 - 4x^5)$. .... [$-\infty$].

(f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-2x+5}{4x^3+5x^2-3}$. .... $[0]$.

(g) $\lim_{x\to\infty} \frac{-5x^4+x^2+7x+3}{x^2-2x+1}$. .... $[-\infty]$.

(h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2+x-3x^2-4x^3}{5x^3-2x+1}$. .... $[-\frac{4}{5}]$.

(i) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+2}$. .... $[e^2]$.

2. Nech $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-\pi x}{x-\pi} & \text{pre } x < \pi, \\ (x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) & \text{pre } x > \pi. \end{cases}$
   Vypočítajte $\lim_{x\to\pi} f(x)$. .... $[\pi]$.

3. Vypočítajte limity funkcie $f(x)$ v ∞, $-\infty$ a v bodoch, v ktorých $f(x)$ nie je definovaná. Potom načrtnite graf, ak:

   (a) $f(x) = \frac{3}{2+x}$.
   $\left[\begin{array}{ll} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, & \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x\to-2+} f(x) = \infty, & \lim_{x\to-2-} f(x) = -\infty \end{array}\right].$

   (b) $f(x) = \frac{-x}{x^2-9}$.
   $\left[\begin{array}{ll} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, & \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x\to3+} f(x) = -\infty, & \lim_{x\to3-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x\to-3+} f(x) = -\infty, & \lim_{x\to-3-} f(x) = \infty \end{array}\right].$

   (c) $f(x) = \frac{3-x}{x^2-2x-3}$.
   $\left[\begin{array}{ll} \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, & \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \\ \lim_{x\to3} f(x) = -\frac{1}{4}, & \lim_{x\to-1+} f(x) = -\infty, \\ \lim_{x\to-1-} f(x) = \infty, & \end{array}\right].$

4. Je funkcia $f(x)$ v bode a spojitá?

   (a) $a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & \text{pre } x \neq 2, \\ 4 & \text{pre } x = 2. \end{cases}$

   [$\lim_{x\to2} f(x) = 12 \neq f(2)$, teda nie je v bode 2 spojitá].

   (b) $a = \pi, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(2x)^2-4\pi x}{\pi-x} & \text{pre } x < \pi, \\ 4x \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) & \text{pre } x \geq \pi. \end{cases}$

   [$\lim_{x\to\pi} f(x) = -4\pi = f(\pi)$, teda je v bode π spojitá].

   (c) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} (x-1)\text{arccotg}\, \frac{1}{x-1} & \text{pre } x < 1, \\ \pi & \text{pre } x = 1, \\ \frac{\sin(\pi x)}{x} & \text{pre } x > 1, . \end{cases}$

   [$\lim_{x\to1} f(x) = 0 \neq f(1) = \pi$, teda nie je v bode 1 spojitá].

5. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá:

(a) $a = 5, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{(x-3)^2-4}{x-5} & \text{pre } x \neq 5, \\ p & \text{pre } x = 5. \end{cases}$ .... $[p = 4]$.

(b) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} p^2 x & \text{pre } x < 1, \\ p \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} & \text{pre } x \geq 1. \end{cases}$ .... $[p \in \{0, 1\}]$.

(c) $a = 4, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4p} - 1 & \text{pre } x \leq 4, \\ \frac{2x^2-8x}{x-4} & \text{pre } x > 4. \end{cases}$ .... $[p = \frac{1}{9}]$.

6. Nájdite parameter p tak, aby funkcia $f(x)$ bola v bode a spojitá a potom načrtnite graf funkcie:

(a) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} e^{px} & \text{pre } x < 0, \\ p - x & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$ .... $[p = 1]$.

(b) $a = 2, \quad f(x) = \begin{cases} x + p & \text{pre } x < 2, \\ -2 & \text{pre } x = 2, \\ \frac{p}{x} & \text{pre } x > 2. \end{cases}$ .... $[p = -4]$.

7. Zistite, či k funkcii $f : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}; f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ existuje inverzná funkcia, ak áno, nájdite ju.
$\left[\begin{array}{l} f : (-\infty, -1) \to (0, \infty) \quad \text{je bijekcia,} \\ f^{-1} : (0, \infty) \to (-\infty, -1)\,, \ f^{-1}(x) = \frac{-1-\sqrt{1+x^2}}{x}. \end{array} \right].$

2.3 Postupnosti

Definícia 18 *Postupnosť (reálnych čísel) je funkcia* $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. *Hodnotu* $f(n) = a_n$ *nazývame* n*-tý člen postupnosti. V tomto prípade postupnosť zapisujeme v tvare* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ak existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná. Vo zvyšných prípadoch hovoríme, že postupnosť je divergentná.*

Veta 15 *Postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná a* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že pre každé* $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}^+$ *platí*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Definícia 19 *Nech* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je postupnosť reálnych čísel. Ak pre každé* $n \in \mathbb{N}^+$ *je*

- $a_n < a_{n+1}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rýdzo rastúca;*
- $a_n \leq a_{n+1}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rastúca;*
- $a_n > a_{n+1}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je rýdzo klesajúca;*
- $a_n \geq a_{n+1}$, *tak hovoríme, že postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je klesajúca.*

Uvedené postupnosti sa nazývajú monotónne postupnosti.

Veta 16 *Každá rastúca zhora ohraničená postupnosť je konvergentná.*

Definícia 20 *Nech* $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+,\ f(k) = n_k$ *je rýdzo rastúca postupnosť prirodzených čísel a* $g : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R},\ g(n) = a_n$ *je postupnosť reálnych čísel. Potom zloženú funkciu (ktorá je tiež postupnosťou)* $g \circ f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(k) = g(f(k)) = g(n_k) = a_{n_k}$ *nazývame vybraná postupnosť z postupnosti* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *pomocou postupnosti* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$.

Veta 17 *Nech* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *Potom pre každú jej vybranú postupnosť* $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *platí* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Veta 18 *(Bolzano-Cauchyho kritérium konvergencie postupnosti) Postupnosť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je konvergentná práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že pre každé* $m, n > n_0,\ m, n \in \mathbb{N}^+$ *platí*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.3.1 Príklady

Časť I

1. Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n-3}{n+1} = 2$, a nájdite príslušné n_0, ak $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. .... $[n_0 = 4999]$.
2. Nájdite n-tý člen postupnosti $\{0,9; 0,99; 0,999; \dots\}$ a vypočítajte jej limitu. .... $\left[a_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n,\ \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 1\right]$.
3. Zistite, či sú postupnosti konvergentné
   (a) $\{1 + \cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$. .... [Divergentná].
   (b) $\left\{\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. .... [Konverguje k $-\frac{1}{2}$].
4. Vypočítajte limitu postupnosti, ak
   (a) $\left\{\left(3 - \frac{1}{n}\right)\sqrt{\frac{n}{4n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$. .... $[\frac{3}{2}]$.
   (b) $\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right)^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. .... [0].
   (c) $\left\{\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2-4}\right\}_{n=2}^{\infty}$. .... [0].

Časť II

1. Pomocou definície limity postupnosti dokážte, že $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, nájdite príslušné n_0, ak $\varepsilon = \frac{1}{10}$. .... $[n_0 = 19]$.
2. Vypočítajte limitu postupnosti, ak:

(a) $a_n = \sqrt{1+n^2} - n.$ .... $[0]$.

(b) $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$ .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.

(c) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}.$ .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.

(d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{1-3n}.$ .... $\left[e^{-\frac{3}{4}}\right]$.

2.4 Nekonečné rady

Definícia 21 *Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. Potom symbol*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

nazývame nekonečný číselný rad. Číslo a_n nazývame n-tý člen radu.

K radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je priradená taká postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, že platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ nazývame postupnosť čiastočných súčtov radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ak postupnosť $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, tak hovoríme, že rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný. Ak je divergentná, tak aj rad je divergentný.

Definícia 22 *Nech sú dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

nazývame súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ak $c \in \mathbb{R}$, tak rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$$

nazývame súčin radu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a konštanty c.

Veta 19 *Nech rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ je súčtom radov $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nech tieto rady sú konvergentné a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s_2$. Potom aj rad $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ je konvergentný a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s_1 + s_2.$$

Nech $c \in \mathbb{R}$ a $c \neq 0$. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$ je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V prípade konvergencie, ak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n) = cs = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definícia 23 *Rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots$$

nazývame geometrický rad. Číslo q nazývame kvocient geometrického radu.

Veta 20 *Geometrický rad* $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ *je konvergentný práve vtedy, keď* $|q| < 1$*. V prípade konvergencie platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-q}.$$

Veta 21 *(Bolzano-Cauchyho kritérium konvergencie nekonečného radu) Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný práve vtedy, keď pre každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *také, že pre každé* $m > n > n_0,\ m, n \in \mathbb{N}^+$ *platí*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon.$$

Veta 22 *(Nutná podmienka konvergencie nekonečného radu) Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný, tak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Definícia 24 *Rad* $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ *nazývame zvyšok radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *po k-tom člene.*

Veta 23 *Rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentný práve vtedy, keď je konvergentný jeho zvyšok*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$$

po (ľubovoľnom) k-tom člene.

Definícia 25 *Nech rady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú také, že* $|a_n| \leq b_n$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}^+$*. (Je zrejmé, že* $0 \leq b_n$*.) Potom hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je majorantným radom radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. Píšeme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Veta 24 *(Porovnávacie kritérium konvergencie radu) Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je konvergentný, tak je konvergentný aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Dôsledok 3 *Nech*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentný, tak je divergentný aj rad* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Definícia 26 *Ak rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je konvergentný, tak hovoríme, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolútne konvergentný.*

Poznámka 1 *Pretože* $|a_n| \leq |a_n|$, *je zrejmé, že rad* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *je majorantným radom radu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Z toho už vyplýva, ak daný rad je absolútne konvergentný, tak je aj konvergentný. Tvrdenie neplatí v opačnom slede.*

Veta 25 *(d'Alembertovo kritérium konvergencie radu) Nech* $a_n \neq 0$ *pre každé* $n \in \mathbb{N}^+$. *Ak*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

Ak

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentný.*

Veta 26 *(Cauchyho kritérium konvergencie radu) Nech*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Potom je rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolútne konvergentný.*

Ak

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

tak rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentný.*

Veta 27 *(Limitné porovnávacie kritérium konvergencie radu)) Nech rady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sú také, že

$$0 < a_n, \quad 0 \leq b_n \quad \textit{pre každé} \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Nech

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L, \quad 0 < L < \infty.$$

Potom dané rady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *sú buď súčasne konvergentné, alebo sú súčasne divergentné.*

Definícia 27 *Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$. Potom rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

nazývame radom so striedavým znamienkom.

Veta 28 *(Leibnitzovo kritérium konvergencie radu) Nech $a_n > 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}^+$ a postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tak rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ je konvergentný.*

Definícia 28 *Rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

nazývame mocninovým radom. Číslo $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva stred radu. Čísla a_n sa nazývajú koeficienty mocninového radu.

Veta 29 *Pre každý mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ existuje $0 \le \rho \le \infty$ také, že daný rad konverguje pre každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ a diverguje pre každé $x \in (-\infty, a-\rho) \cup (a+\rho, \infty)$. Hodnotu ρ nazývame polomer konvergencie mocninového radu.*

Daný mocninový rad konverguje len pre $x = a$ práve vtedy, keď $\rho = 0$. Rad konverguje pre každé $x \in \mathbb{R}$ práve vtedy, keď $\rho = \infty$.

2.4.1 Príklady

Časť I

1. Pomocou definície nájdite súčet radu

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$. .... $[\frac{13}{36}]$.

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1})$. .... [0].

2. Vyšetrite konvergenciu geometrického radu

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n}$. .... [Konverguje, $s = \frac{5}{6}$].

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n$. .... [Diverguje].

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^{2n}$. .... [Konverguje].

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$. .... [Diverguje].

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+3n}$. .... [Diverguje].

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$. .... [Diverguje].

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\cdot\left(\frac{1}{n}+n\right)\right)$. .... [Konverguje].

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}$. .... [Konverguje].

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^3+5n^2+2n+1}$. .... [Diverguje].

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+2n+5}$. .... [Konverguje].

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-n}$. . [Konverguje. Použite limitné porovnávacie kritérium].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite množinu všetkých čísel, pre ktoré dané rady konvergujú:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+3)}\cdot(x-4)^n$. .... $[\langle 2,6)]$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\cdot x^n$. .... $[\langle -1,1\rangle]$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+3)}\cdot(x-4)^{2n}$. .... $[(4-\sqrt{2},4+\sqrt{2})]$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n\cdot(x+1)^n$. .... $[x\in\{-1\}]$.

Časť II

1. Pomocou definície nájdite súčet radu

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$. .... $[\frac{5}{6}]$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+2}})$. .... $[e+\sqrt{e}-2]$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. .... [Diverguje].

2. Nájdite súčet radu:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{3^{n-1}}$. .... $[\frac{9}{4}]$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3+5(-1)^{n+1}}{4^n}$. .... [0].

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. .... [Konverguje].

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+5}\right)^{2n}$. .... [Konverguje].

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^{3n}$. .... [Diverguje].

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$. .... [Konverguje].

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$. .... [Diverguje].

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{3^n}$. .... [Konverguje].

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$. .... [Konverguje].

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$. .... [Diverguje].

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \sin\frac{\pi}{5n}$. .... [Konverguje].

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$. .... [Diverguje].

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4^n}$. .... [Konverguje].

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4}{n^5+4n^2+2}$. .... [Konverguje].

(m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+5}{n^5+3n^4+1}$. .... [Diverguje].

(n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{2\sqrt{n}}$. .... [Konverguje].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré dané rady konvergujú a určte polomer konvergencie:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} \cdot (x-3)^n$. .... [$x \in \langle 2, 4\rangle,\ \rho = 1$].

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-1)^n$. .... [$x \in \mathbb{R},\ \rho = \infty$].

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} \cdot (x-4)^n$. .... [$x \in \left\langle \frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right),\ \rho = \frac{1}{3}$].

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)5^n} \cdot (x+3)^n$. .... $[x \in \langle -8, 2)\,,\ \rho = 5]$.

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot (x-2)^{2n}$. .... $[x \in (0, 4),\ \rho = 2]$.

Časť III

1. Pomocou definície nájdite súčet radu:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$. .... $[\frac{1}{3}]$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$. .... $[\frac{3}{2}]$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$. .... [Diverguje].

2. Nájdite súčet radu:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+4}{5^{n-1}}$. .... $[\frac{25}{6}]$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{6+4(-1)^{n+1}}{3^n}$. .... [6].

3. Vyšetrite konvergenciu nasledujúcich radov:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{5^n}$. .... [Konverguje].

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{5^n}$. .... [Konverguje].

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^3}$. .... [Diverguje].

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6^{n+1}}$. .... [Konverguje].

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^{2n}$. .... [Diverguje].

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$. .... [Konverguje].

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. .... [Diverguje].

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$. .... [Konverguje].

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^2$. .... [Diverguje].

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2+2n}$. .... [Diverguje].

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^4+2n^2+3}$. .... [Konverguje].

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^3+2n+1}$. .... [Diverguje].

4. V nasledujúcich príkladoch nájdite všetky $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré dané rady konvergujú a určte polomer konvergencie:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n n^2 \cdot (x-1)^n$. .... $[x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),\ \rho = \frac{1}{2}]$.

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} \cdot (x-2)^n$. .... $[x \in \mathbb{R},\ \rho = \infty]$.

   (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+5)7^n} \cdot x^n$. .... $[x \in \langle -7, 7),\ \rho = 7]$.

2.5 Diferencovateľnosť funkcie

Definícia 29 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a $a \in A$ je hromadným bodom množiny A. Nech existuje vlastná limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Vtedy hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná v bode a. Hodnotu $f'(a)$ nazývame derivácia funkcie f v bode a.

Ak funkcia f je diferencovateľná v každom bode $a \in M \subseteq A$, potom hovoríme, že funkcia f je diferencovateľná na množine M. Ak funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná na množine A, tak hovoríme, že f je diferencovateľná funkcia.

Definícia 30 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a $A_1 = \{a \in A \mid$ existuje $f'(a)\}$. Potom funkciu $f' : A_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ nazývame derivácia funkcie f.*

Ak funkcia $f' : A_1 \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode a, tak hovoríme, že funkcia f je v bode a spojito diferencovateľná.

Ak funkcia $f' : A_1 \to \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná v každom bode množiny $M \subseteq A_1$, tak hovoríme, že je spojito diferencovateľná na množine M.

Ak $A_1 = A$ a funkcia f je spojito diferencovateľná na množine A, tak zjednodušene hovoríme, že funkcia f je spojito diferencovateľná funkcia.

Veta 30 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom existuje taká funkcia $p : A \to \mathbb{R}$, že:*

1. *$p(a) = 0$,*
2. *funkcia $p : A \to \mathbb{R}$ je spojitá v bode a. To znamená, že $\lim_{x \to a} p(x) = p(a) = 0$,*

3. pre každé $x \in A$ platí

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + p(x)(x-a).$$

Veta 31 *(Nutná podmienka diferencovateľnosti funkcie v bode) Nech $f : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$. Potom je v tomto bode spojitá.*

Veta 32 *Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$ sú diferencovateľné v bode $a \in A$.Potom*

- *Funkcia $(f+g) : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- *Funkcia $(f.g) : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí*

$$(f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- *Funkcia $\left(\frac{f}{g}\right) : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)},$$

  za predpokladu, že funkcia $\left(\frac{f}{g}\right) : A \to \mathbb{R}$ je na množine A definovaná, a teda aj $g(a) \neq 0$.

Veta 33 *(Veta o diferencovateľnosti zloženej funkcie) Nech funkcia $f : A \to B \subset \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $a \in A$ a funkcia $g : B \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode $f(a) \in B$. Potom zložená funkcia $(g \circ f) : A \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná v bode a a platí*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = ((g' \circ f)(a))\, f'(a) = ((g' \circ f).f')(a).$$

Veta 34 *Nech I je interval a funkcia $f : I \to J$ je spojitá bijekcia, ktorá je diferencovateľná v bode $a \in I$. Nech $f'(a) \neq 0$. Potom jej inverzná funkcia $f^{-1} : J \to I$ je diferencovateľná v bode $b = f(a)$ a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(b)}.$$

Definícia 31 *Nech je daný mocninový rad*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots .$$

Potom hovoríme, že rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

vznikol z daného mocninového radu derivovaním člen po člene.

Veta 35 *Nech ρ je polomerom konvergencie mocninového radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Nech pre každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ platí*

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = s(x).$$

Potom ρ je polomerom konvergencie aj radu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$ a pre každé $x \in (a-\rho, a+\rho)$ platí

$$a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots = s'(x).$$

2.6 Priebeh funkcie

2.6.1 Lokálne extrémy

Definícia 32 *Nech $f : A \to \mathbb{R}$ a $a \in A$.*

Nech existuje také prstencové okolie $\mathcal{O}_\delta^o(a)$, že:

1. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A$ je $f(x) < f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a rýdze lokálne maximum.*

2. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta^o(a) \cap A$ je $f(x) > f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a rýdze lokálne minimum.*

Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(a)$, že:

1. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta(a) \cap A$ je $f(x) \leq f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a lokálne maximum.*

2. *Pre každé $x \in \mathcal{O}_\delta(a) \cap A$ je $f(x) \geq f(a)$. Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a lokálne minimum.*

Všetky uvedené pojmy nazývame spoločným termínom lokálne extrémy.

Definícia 33 *Nech I je ľubovoľný interval s koncovými bodmi a, b. Potom vnútrom intervalu I nazývame interval $Int(I) = (a, b) \subseteq I$.*

Veta 36 *(Nutná podmienka pre existenciu lokálneho extrému) Nech A je interval a $f : A \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *$a \in Int(A)$ je bod z vnútra intervalu A.*

2. *Funkcia f je diferencovateľná v bode a.*

3. *Funkcia f má v bode a lokálny extrém.*

Potom $f'(a) = 0$.

2.6.2 Intervalové vlastnosti funkcií

Veta 37 *(Rolleho veta) Nech je daná funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, *o ktorej platí:*

1. *Je spojitá (na uzavretom intervale* $\langle a, b\rangle$*).*
2. *Je diferencovateľná na otvorenom intervale* (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ *také, že* $f'(c) = 0$.

Veta 38 *(Lagrangeova veta) Nech je daná funkcia* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, *o ktorej platí:*

1. *Je spojitá (na uzavretom intervale* $\langle a, b\rangle$*).*
2. *Je diferencovateľná na otvorenom intervale* (a, b).

Potom existuje $c \in (a, b)$ *také, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dôsledok 4 *Nech* I *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je diferencovateľná funkcia. Nech pre každé* $x \in I$ *je* $f'(x) = 0$. *Potom existuje* $c \in \mathbb{R}$ *také, že* $f(x) = c$ *pre každé* $x \in I$.

Veta 39 *(Cauchyho veta) Nech sú dané funkcie* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *a* $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, *o ktorých platí:*

1. *Sú spojité (na uzavretom intervale* $\langle a, b\rangle$*).*
2. *Sú diferencovateľné na otvorenom intervale* (a, b).
3. $g'(x) \neq 0$ *pre každé* $x \in (a, b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ *také, že*

$$\left(\frac{f'}{g'}\right)(c) = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Veta 40 *(l'Hospitalovo pravidlo) Nech sú dané také funkcie* $f : (a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *a* $g : (a, b\rangle \to \mathbb{R}$, *že o nich platí:*

1. *Sú diferencovateľné (na intervale* $(a, b\rangle$*).*
2. $g(x) \neq 0$ *a* $g'(x) \neq 0$ *pre každé* $x \in (a, b\rangle$.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Ak za týchto predpokladov existuje $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, *tak existuje aj* $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ *a platí*

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f'}{g'}\right)(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

Poznámka 2 *Veta platí v tom istom znení, keď v nej tretiu podmienku* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *nahradíme podmienkou* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

2.6.3 Príklady

Časť I

1. Zderivujte funkciu $f(x) = \sin(\cos 2x)$. ...... $[(\cos(\cos 2x))(-\sin 2x)2]$.
2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a, ak:
   (a) $a = 2, \quad f(x) = \frac{1}{x}$. .... $\left[f'(2) = -\frac{1}{4}\right]$.
   (b) $a = 1, \quad f(x) = \sqrt{|x-1|}$. .... $[f'(1)$ neexistuje$]$.
3. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{-x}\cos 2x$ v bode $A = (0, ?)$ .... $[A = (0,1),\ t : x + y - 1 = 0,\ n : x - y + 1 = 0]$.
4. Nájdite rovnice dotyčníc k hyperbole $7x^2 - 2y^2 = 14$, ktoré sú kolmé na priamku $p : 2x + 4y - 3 = 0$.
   $[t_1 : 2x - y - 1 = 0, \quad t_2 : 2x - y + 1 = 0]$.
5. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):
   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$. .... $[-1]$.
   (b) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 5x)}$. .... $[1]$.
   (c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$. .... $\left[-\frac{4}{\pi}\right]$.
   (d) $\lim_{x\to 0+} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$. .... $[1]$.
6. Vyšetrite spojitosť funkcie

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \ln x \cdot \log_{10}(1-x) & \text{pre } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pre } x = 1, \\ x^{\frac{1}{x-1}} & \text{pre } x \in (1,\infty) \end{cases}$$

   v bode 1.
   $\left[\begin{array}{l} \lim_{x\to 1-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = e. \quad \text{Funkcia } f \text{ nemôže byť spojitá} \\ \text{v bode 1, lebo} \lim_{x\to 1} f(x) \text{ neexistuje, a teda sa nerovná } f(1). \end{array}\right]$.

Časť II

1. Zderivujte funkciu $f(x)$, ak:

   (a) $f(x) = \ln\sqrt{\cos x}$. .... $\left[\frac{-\sin x}{2\cos x}\right]$.

   (b) $f(x) = 2^{\mathrm{tg} x}$. .... $\left[2^{\mathrm{tg} x}\frac{\ln 2}{\cos^2 x}\right]$.

   (c) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. .... $\left[x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)\right]$.

   (d) $f(x) = \mathrm{arccotg}^3(\sqrt{x})$. .... $\left[-\frac{3\mathrm{arccotg}^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+x)}\right]$.

   (e) $f(x) = \arcsin(\frac{\ln x}{2})$. .... $\left[\frac{1}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}\right]$.

   (f) $f(x) = \mathrm{arccotg}\frac{x}{1+x^2}$. .... $\left[\frac{x^2-1}{x^2+(1+x^2)^2}\right]$.

   (g) $f(x) = 10^{\sqrt{x}}x$. .... $\left[10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\ln 10\sqrt{x}}{2}\right)\right]$.

   (h) $f(x) = (\ln x)^x$. .... $\left[(\ln x)^x\left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x}\right)\right]$.

2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a, ak:

   (a) $a = 2$, $f(x) = |3x-6|$. .... [neexistuje].

   (b) $a = 4$, $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$. .... $\left[\frac{1}{12}\right]$.

   (c) $a = 0$, $f(x) = \begin{cases} x\sin x & \text{pre } x \le 0, \\ x^2 & \text{pre } x > 0. \end{cases}$ .... $[0]$.

3. Zistite, či je funkcia
   $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0 \end{cases}$

   (a) spojitá v bode $a = 0$,

   (b) diferencovateľná v bode $a = 0$.

   $\left[\begin{array}{l} \text{a) Je spojitá v bode } a = 0, \\ \text{b) Nie je diferencovateľná v bode } 0. \end{array}\right]$.

4. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A, ak
   $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}$, $A = (2, ?)$.
   $[A = (2,2)\,,\ t : x+y-4 = 0,\ n : x-y = 0.]$.

5. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f : f(x) = e^{1-x^2}$, ktorá prechádza priesečníkom grafu funkcie s priamkou $y = 1$.
   $\left[\begin{array}{ll} \text{Priesečníky} \quad A_1 = (1,1), & A_2 = (-1,1) \\ t_1 : 2x+y-3 = 0, & n_1 : x-2y+1 = 0 \\ t_2 : 2x-y+3 = 0, & n_2 : x+2y-1 = 0 \end{array}\right]$.

6. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = x^2 - 2x + 3,$ ak dotyčnica t je rovnobežná s priamkou $p: 3x - y + 5 = 0.$
   $[t: 12x - 4y - 13 = 0, \quad n: 4x + 12y - 61 = 0]$.

7. Zistite, v ktorom bode je dotyčnica ku grafu funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ rovnobežná s osou o_x. .... $\left[\left(e, \frac{1}{e}\right)\right]$.

8. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \ln x,$ ak dotyčnica je kolmá na priamku $p: x + 2y - 2 = 0.$
   $[t: y - 2x + 1 + \ln 2 = 0, \; n: 4y + 2x - 1 + 4\ln 2 = 0]$.

9. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x}$. .... $[-1]$.
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. .... $[2]$.
   (c) $\lim_{x\to 0+} (e^x - 1)\operatorname{cotg} x$. .... $[1]$.
   (d) $\lim_{x\to 0+} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$. .... $[1]$.
   (e) $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. .... $[1]$.
   (f) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$. .... $\left[e^{-\frac{2}{\pi}}\right]$.
   (g) $\lim_{x\to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$. .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.
   (h) $\lim_{x\to 1-} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$. .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.
   (i) $\lim_{x\to 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\operatorname{cotg}(x-3)}$. .... $\left[e^{\operatorname{cotg} 3}\right]$.

10. Vyšetrite spojitosť funkcie

$$f: \left\langle -\frac{\pi}{2}, 1 \right\rangle \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{pre } x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0\right), \\ 0 & \text{pre } x = 0, \\ x^2 \ln x & \text{pre } x \in (0, 1\rangle. \end{cases}$$

   [Funkcia nie je spojitá v bode 0].

11. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode 0, ak:
   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ .... $[0]$.
   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ x^3, & x \leq 0 \end{cases}$ .... $[0]$.

12. Zistite, či funkcia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1} & \text{pre } x\neq 0,\\ \frac{1}{2} & \text{pre } x=0\end{cases}$$

je spojitá a vypočítajte $f'(0)$.
$\left[\text{Funkcia je spojitá,} \quad f'(0)=-\frac{1}{12}\right]$.

Časť III

1. Zderivujte funkciu $f(x)$, ak:

   (a) $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{x}}$. .... $\left[\dfrac{(-\sin 2x)\sqrt[5]{x}-\frac{\cos^2 x}{5\sqrt[5]{x^4}}}{\sqrt[5]{x^2}}\right]$.

   (b) $f(x)=3^{\operatorname{cotg} x}\arcsin x$. .... $\left[3^{\operatorname{cotg} x}\left(-\frac{(\ln 3)\arcsin x}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]$.

   (c) $f(x)=\log_5(\operatorname{tg} x^3)$. .... $\left[\frac{3x^2}{(\operatorname{tg} x^3)(\ln 5)(\cos^2 x^3)}\right]$.

   (d) $f(x)=\ln\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{5x})\right)$. .... $\left[\frac{5}{2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{5x}\right)(1+5x)\sqrt{5x}}\right]$.

   (e) $f(x)=(3x)^{\sin x}$. .... $\left[(3x)^{\sin x}\left((\cos x)(\ln 3x)+\frac{\sin x}{x}\right)\right]$.

   (f) $f(x)=(\operatorname{cotg} x)^{\arccos x}$.
   $\left[(\operatorname{cotg} x)^{\arccos x}\left(\frac{-\ln(\operatorname{cotg} x)}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arccos x}{(\operatorname{cotg} x)(\sin^2 x)}\right)\right]$.

   (g) $f(x)=e^{x^3}\operatorname{arccotg} x$. .... $\left[e^{x^3}\left(3x^2\operatorname{arccotg} x-\frac{1}{1+x^2}\right)\right]$.

2. Pomocou definície vypočítajte deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a, ak:

   (a) $a=2,\quad f(x)=\sqrt{4x+1}$. .... $\left[f'(2)=\frac{2}{3}\right]$.

   (b) $a=3,\quad f(x)=|x-3|$. .... $[f'(3)\quad \text{neexistuje}]$.

3. Zistite, či je funkcia
   $$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2\cos\frac{1}{x-1} & \text{pre } x\neq 1,\\ 0 & \text{pre } x=1\end{cases}$$

   (a) spojitá v bode $a=1$,

   (b) diferencovateľná v bode $a=1$.

   $$\left[\begin{array}{l}\text{a) Je spojitá v bode } \ a=1,\\ \text{b) Je diferencovateľná v bode } \ 1 \quad \text{a} \quad f'(1)=0.\end{array}\right]$$

4. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x)=x^2-3x+5$, ak t je rovnobežná s priamkou $p: x-y+1=0$.
   $[A=(2,3),\ t: x-y+1=0,\ n: x+y-5=0]$.

5. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x) = \operatorname{tg} x$ v bode $A = \left(\frac{\pi}{4}, ?\right)$.
   $\left[A = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right),\ t : y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2},\ n : y = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{\pi}{8}\right]$.
6. Nájdite rovnicu dotyčnice t a normály n ku grafu funkcie $f(x) = \ln(x-2)$, ak dotyčnica t je kolmá na priamku $p : x + y = 0$.
   $[A = (3, 0),\ t : y = x - 3,\quad n : y = -x + 3.]$.
7. V nasledujúcich príkladoch vypočítajte limity (aj s použitím L' Hospitalovho pravidla):
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. .... $\left[\frac{1}{3}\right]$.
   (b) $\lim_{x\to 1-} (x-1)\ln(1-x)$. .... $[0]$.
   (c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x}\right)$. .... $[0]$.
   (d) $\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$. .... $[1]$.
   (e) $\lim_{x\to 0} \left(e^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$. .... $\left[e^3\right]$.
   (f) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$. .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.
8. Daná je funkcia
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} & \text{pre } x \in \left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\ln\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x} & \text{pre } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right). \end{cases}$$
   Vypočítajte $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$.
   $\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x) = \frac{5}{3},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) \quad \text{neexistuje}\right]$.
9. Zistite, či funkcia $f(x)$ je spojitá v bode $a = 0$, ak:
   (a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} & \text{pre } x \neq 0, \\ 0 & \text{pre } x = 0. \end{cases}$ .... [Je].
   (b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{pre } x \leq 0, \\ (\sin x)^x & \text{pre } x > 0. \end{cases}$
   [Nie je, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 \neq f(0) = 3$].

2.6.4 Monotónnosť

Definícia 34 *Nech I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Nech pre každé $x_1, x_2 \in I$ také, že $x_1 < x_2$ je*

1. *$f(x_1) < f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rýdzo rastúca funkcia.*
2. *$f(x_1) > f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rýdzo klesajúca funkcia.*

3. *$f(x_1) \leq f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je rastúca funkcia.*

4. *$f(x_1) \geq f(x_2)$. Potom hovoríme, že f je klesajúca funkcia.*

Všetky uvedené funkcie nazývame monotónne funkcie. Funkcie uvedené v prvých dvoch bodoch sa nazývajú rýdzo monotónne funkcie.

Definícia 35 *Nech je daná funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ a interval $I \subset A$. Ak zúženie $f|I : I \to \mathbb{R}$ je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca) funkcia, tak budeme hovoriť, že funkcia f je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca) na intervale I.*

Veta 41 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I.*

2. *Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $Int(I)$ intervalu I.*

3. *Pre každé $x \in Int(I)$ je $f'(x) \geq 0$.*

Potom je $f : I \to \mathbb{R}$ rastúca funkcia (na celom intervale I).

Veta 42 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I.*

2. *Funkcia f je diferencovateľná na vnútri $Int(I)$ intervalu I.*

3. *Pre každé $x \in Int(I)$ je $f'(x) \geq 0$.*

4. *Nech neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že $f'(x) = 0$ pre každé $x \in J$.*

Potom je $f : I \to \mathbb{R}$ rýdzo rastúca funkcia (na celom intervale I).

2.6.5 Konvexnosť, konkávnosť, inflexný bod

Definícia 36 *Nech I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$. Nech pre každé $x_1, x_2, x_3 \in I$ také, že $x_1 < x_2 < x_3$ platí:*

1. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je rýdzo konvexná funkcia.*

2. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží nad priamkou určenou bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je rýdzo konkávna funkcia.*

3. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží pod, alebo na priamke určenej bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je konvexná funkcia.*

4. *Bod $(x_2, f(x_2))$ leží nad, alebo na priamke určenej bodmi $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$. Potom hovoríme, že f je konkávna funkcia.*

Definícia 37 *Nech je daná funkcia* $f : A \to \mathbb{R}$ *a interval* $I \subset A$. *Ak zúženie* $f|I : I \to \mathbb{R}$ *je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia, tak budeme hovoriť, že funkcia* f *je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) na intervale* I.

Veta 43 *Nech* I *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$.

1. *Funkcia* f *je rýdzo konvexná práve vtedy, keď pre každé* $x_1, x_2, x_3 \in I$ *také, že* $x_1 < x_2 < x_3$ *je*
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$
2. *Funkcia* f *je rýdzo konkávna práve vtedy, keď pre každé* $x_1, x_2, x_3 \in I$ *také, že* $x_1 < x_2 < x_3$ *je*
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$
3. *Funkcia* f *je konvexná práve vtedy, keď pre každé* $x_1, x_2, x_3 \in I$ *také, že* $x_1 < x_2 < x_3$ *je*
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$
4. *Funkcia* f *je konkávna práve vtedy, keď pre každé* $x_1, x_2, x_3 \in I$ *také, že* $x_1 < x_2 < x_3$ *je*
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Veta 44 *Nech* I *je interval a je daná funkcia* $f : I \to \mathbb{R}$. *Nech*

1. *Funkcia* f *je spojitá na intervale* I.
2. *Funkcia* f *je diferencovateľná na vnútri* $Int(I)$ *intervalu* I.
3. *Nech* $f' : Int(I) \to \mathbb{R}$ *je rýdzo rastúca (rýdzo klesajúca, rastúca, klesajúca)*

Potom $f : I \to \mathbb{R}$ *je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia (na celom intervale* I*).*

Veta 45 *Nech* I *je interval a je daná funkcia* $f : I \to \mathbb{R}$. *Nech*

1. *Funkcia* f *je spojitá na intervale* I.
2. *Funkcia* f *je dva razy diferencovateľná na vnútri* $Int(I)$ *intervalu* I.
3. *Nech* $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0, f''(x) \geq 0, f''(x) \leq 0)$ *pre každé* $x \in Int(I)$.

Potom $f : I \to \mathbb{R}$ *je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna, konvexná, konkávna) funkcia (na celom intervale* I*).*

Veta 46 *Nech I je interval a je daná funkcia $f : I \to \mathbb{R}$. Nech*

1. *Funkcia f je spojitá na intervale I.*
2. *Funkcia f je dva razy diferencovateľná na vnútri $Int(I)$ intervalu I.*
3. *Nech $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pre každé $x \in Int(I)$.*
4. *Nech neexistuje podinterval $J \subset I$ taký, že $f''(x) = 0$ pre každé $x \in J$.*

Potom $f : I \to \mathbb{R}$ je rýdzo konvexná (rýdzo konkávna) funkcia (na celom intervale I).

Definícia 38 *Nech I je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkcia, ktorá je diferencovateľná v bode $a \in Int(I)$. Nech existuje také okolie $\mathcal{O}_\delta(a) \subset Int(I)$, že je splnená jedna z nasledujúcich podmienok*

1. *Funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ je na intervale $(a-\delta, a\rangle$ rýdzo konvexná a na intervale $\langle a, a+\delta)$ rýdzo konkávna.*
2. *Funkcia $f : I \to \mathbb{R}$ je na intervale $(a-\delta, a\rangle$ rýdzo konkávna a na intervale $\langle a, a+\delta)$ rýdzo konvexná.*

Potom hovoríme, že funkcia f má v bode a inflexný bod.

Veta 47 *Nech I je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná funkcia a $a \in Int(I)$ je jej inflexný bod. Ak je f v bode a dva razy diferencovateľná, tak $f''(a) = 0$.*

Veta 48 *(Taylorova veta) Nech n je prirodzené číslo a funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je*

1. *n-razy spojito diferencovateľná (na intervale $\langle a, b\rangle$),*
2. *$(n+1)$-razy diferencovateľná na (a, b).*

Potom existuje $c \in (a, b)$ také, že

$$f(b)-f(a) = \frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

2.6.6 Príklady

Časť I

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

1. $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \mathbb{R} \\ \searrow \text{ na} & : & - \\ \bigcup \text{ na} & : & (-\infty, -\sqrt{3}\rangle \text{ a } \langle 0, \sqrt{3}\rangle \\ \bigcap \text{ na} & : & \langle -\sqrt{3}, 0\rangle \quad \text{a} \quad \langle \sqrt{3}, \infty) \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y = 2x \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

2. $f(x) = 16x(x-1)^3$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle \frac{1}{4}, \infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty, \frac{1}{4}\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (-\infty, \frac{1}{2}\rangle \text{ a } \langle 1, \infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & \langle \frac{1}{2}, 1\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

3. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & (0, \infty) \\ \nearrow \text{ na} & : & (0, e^2\rangle \\ \searrow \text{ na} & : & \langle e^2, \infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle e^{\frac{8}{3}}, \infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (0, e^{\frac{8}{3}}\rangle \\ \text{ABS} & : & x = 0 \\ \text{ASS} & : & y = 0 \quad \text{v} \quad \infty \end{array}\right].$$

4. $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & (-2, 2), \quad \text{párna} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-2, 0\rangle \\ \searrow \text{ na} & : & \langle 0, 2) \\ \bigcup \text{ na} & : & - \\ \bigcap \text{ na} & : & (-2, 2) \\ \text{ABS} & : & x = -2,\ x = 2, \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

5. $f(x) = x - 2\text{arctg}\, x$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-\infty, -1\rangle \quad \text{a} \quad \langle 1, \infty) \\ \searrow \text{ na} & : & \langle -1, 1\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle 0, \infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty, 0\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá}, \\ \text{ASS} & : & y = x - \pi \quad \text{v} \quad \infty, \quad y = x + \pi \quad \text{v} \quad -\infty \end{array}\right].$$

6. $f(x) = \arcsin\,(\sin x)$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{nepárna}, \quad \text{periodická s periódou } 2\pi \\ \nearrow \text{ na} & : & \left\langle (4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2} \right\rangle,\ k \in \mathbb{Z} \\ \searrow \text{ na} & : & \left\langle (4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2} \right\rangle,\ k \in \mathbb{Z} \\ \bigcup \text{ na} & : & - \\ \bigcap \text{ na} & : & - \\ \text{ABS} & : & \text{nemá}, \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

7. $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-\infty,-4\rangle \quad \text{a} \quad \langle 0,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & \langle -4,-1) \quad \text{a} \quad (-1,0\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (-1,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,-1) \\ \text{ABS} & : & x=-1, \\ \text{ASS} & : & y=x-3 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

Časť II

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

1. $f(x) = \frac{10x}{(x+2)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{-2\} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-2,2\rangle \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,-2) \text{ a } \langle 2,\infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle 4,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,-2) \quad \text{a} \quad (-2,4\rangle \\ \text{ABS} & : & x=-2 \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

2. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-\infty,-1) \quad \text{a} \quad \langle 1,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (-1,1\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (-\infty,-1) \text{ a } (-1,2\rangle \\ \bigcap \text{ na} & : & \langle 2,\infty) \\ \text{ABS} & : & x=-1 \\ \text{ASS} & : & y=1 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

3. $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & (0,\infty) \\ \nearrow \text{ na} & : & (0,1\rangle \\ \searrow \text{ na} & : & \langle 1,\infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle \sqrt{e},\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (0,\sqrt{e}\rangle \\ \text{ABS} & : & x=0 \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad \infty \end{array}\right].$$

4. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-\infty,1) \text{ a } \langle 5,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (1,5\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle -1,1) \text{ a } (1,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,-1\rangle \\ \text{ABS} & : & x=1 \\ \text{ASS} & : & y=x+5 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

5. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \nearrow \text{ na} & : & \left\langle \frac{1}{2},\infty\right) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,0) \text{ a } \left(0,\frac{1}{2}\right\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (-\infty,0) \text{ a } (0,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & - \\ \text{ABS} & : & x=0 \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

6. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \langle 0,\infty) \\ \nearrow \text{ na} & : & - \\ \searrow \text{ na} & : & \langle 0,\infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle 0,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & - \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y=-\frac{\pi}{2} \quad \text{v} \quad \infty \end{array}\right].$$

7. $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle 0,1) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,0\rangle \quad \text{a} \quad (1,\infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & \left\langle -\frac{1}{2},1\right) \text{ a } (1,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \text{ABS} & : & x=1 \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

8. $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-\infty,-3\rangle \quad \text{a} \quad (-1,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & \langle -3,-1) \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle 0,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,-1) \text{ a } (-1,0\rangle \\ \text{ABS} & : & x=-1 \\ \text{ASS} & : & y=\frac{x}{2}-1 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

9. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle -1, 1\rangle \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty, -1\rangle \text{ a } \langle 1, \infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle -\sqrt{3}, 0\rangle \text{ a } \langle \sqrt{3}, \infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty, -\sqrt{3}\rangle \text{ a } \langle 0, \sqrt{3}\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y = 0 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

10. $f(x) = x\ln(x^2)$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right\rangle \text{ a } \left\langle \frac{1}{e}, \infty\right) \\ \searrow \text{ na} & : & \left\langle -\frac{1}{e}, 0\right) \text{ a } \left(0, \frac{1}{e}\right\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (0, \infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty, 0) \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

11. $f(x) = \cos x + \ln(\cos x)$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad \text{párna}, \quad \text{periodická s periódou } 2\pi \\ \nearrow \text{ na} & : & \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0 + 2k\pi\right\rangle,\ k\in\mathbb{Z} \\ \searrow \text{ na} & : & \left\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z} \\ \bigcup \text{ na} & : & - \\ \bigcap \text{ na} & : & \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ABS} & : & x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

12. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{0\}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & - \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & (0, \infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty, 0) \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y = 0 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

13. $f(x) = x\operatorname{arctg} x$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{párna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle 0, \infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty, 0\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & \mathbb{R} \\ \bigcap \text{ na} & : & - \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y = \frac{\pi x}{2} - 1 \quad \text{v} \quad \infty, \quad y = -\frac{\pi x}{2} - 1 \quad \text{v} \quad -\infty \end{array}\right].$$

14. $f(x) = \frac{2}{e^x - 3}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{\ln 3\} \\ \nearrow \text{ na} & : & - \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,\ln 3) \text{ a } (\ln 3,\infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & (\ln 3,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,\ln 3) \\ \text{ABS} & : & x=\ln 3 \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad \infty, \quad y=\frac{-2}{3} \quad \text{v} \quad -\infty \end{array}\right].$$

15. $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{párna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle -1,0\rangle \text{ a } \langle 1,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,-1\rangle \text{ a } \langle 0,1\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (-\infty,-\sqrt{3}\rangle \text{ a } \langle\sqrt{3},\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & \langle -\sqrt{3},-1\rangle \text{ a } \langle -1,1\rangle \text{ a } \langle 1,\sqrt{3}\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

Poznámka 3 *f' a f'' neexistujú v bodoch $x=\pm 1$.*

Časť III

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$, ak:

1. $f(x)=\frac{x^3}{x^2+4}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \mathbb{R} \\ \searrow \text{ na} & : & - \\ \bigcup \text{ na} & : & (-\infty,-\sqrt{12}\rangle \text{ a } \langle 0,\sqrt{12}\rangle \\ \bigcap \text{ na} & : & \langle -\sqrt{12},0\rangle \quad \text{a} \quad \langle\sqrt{12},\infty) \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y=x \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

2. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle -1,1\rangle \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,-1\rangle \text{ a } \langle 1,\infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle -\sqrt{3},0\rangle \text{ a } \langle\sqrt{3},\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,-\sqrt{3}\rangle \text{ a } \langle 0,\sqrt{3}\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

3. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}, \quad \text{párna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle 0,1) \text{ a } (1,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,-1) \text{ a } (-1,0\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (-1,1) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,-1) \text{ a } (1,\infty) \\ \text{ABS} & : & x=-1,\ x=1 \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{-2,2\}, \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & - \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,-2) \text{ a } (-2,2) \text{ a } (2,\infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & (-2,0\rangle \text{ a } (2,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,-2) \text{ a } \langle 0,2) \\ \text{ABS} & : & x=-2,\ x=2 \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

5. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle 0,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,-1) \text{ a } (-1,0\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (-1,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,-1) \\ \text{ABS} & : & x=-1 \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad -\infty \end{array}\right].$$

6. $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{párna} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-\infty,0\rangle \\ \searrow \text{ na} & : & \langle 0,\infty) \\ \bigcup \text{ na} & : & \left(-\infty,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right\rangle \text{ a } \left\langle\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right) \\ \bigcap \text{ na} & : & \left\langle\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

7. $f(x) = (1-3x)e^{2x}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R} \\ \nearrow \text{ na} & : & \left(-\infty,\frac{-1}{6}\right\rangle \\ \searrow \text{ na} & : & \left\langle\frac{-1}{6},\infty\right) \\ \bigcup \text{ na} & : & \left(-\infty,\frac{-2}{3}\right\rangle \\ \bigcap \text{ na} & : & \left\langle\frac{-2}{3},\infty\right) \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y=0 \quad \text{v} \quad -\infty \end{array}\right].$$

8. $f(x) = x\ln x$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & (0,\infty) \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle e^{-1},\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (0,e^{-1}\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (0,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & - \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

9. $f(x) = 1 + (x^2-1)^3$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R}, \quad \text{párna} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle 0,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty,0\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & (-\infty,-1\rangle \text{ a } \left\langle \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle; \text{a } \langle 1,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & \left\langle -1, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle; \text{a } \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 \right\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

10. $f(x) = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-\infty,3); \text{a } (3,\infty) \\ \searrow \ - & & \\ \bigcup \text{ na} & : & (-\infty,3) \\ \bigcap \text{ na} & : & (3,\infty) \\ \text{ABS} & : & x=3 \\ \text{ASS} & : & y = x-3 \quad \text{v} \quad \pm\infty \end{array}\right].$$

11. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & (-1,1), \quad \text{nepárna} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-1,1) \\ \searrow \ - & & \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle 0,1) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-1,0\rangle \\ \text{ABS} & : & x=1,\ x=-1 \\ \text{ASS} & : & \text{nemá} \end{array}\right].$$

12. $f(x) = x + 2\text{arccotg}\, x$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R} \\ \nearrow \text{ na} & : & (-\infty,-1\rangle \text{ a } \langle 1,\infty) \\ \searrow \text{ na} & : & \langle -1,1\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle 0,\infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty,0\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y = x \quad \text{v} \quad \infty, \quad y = x+2\pi \quad \text{v} \quad -\infty \end{array}\right].$$

13. $f(x) = xe^x$.

$$\left[\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(f) & = & \mathbb{R} \\ \nearrow \text{ na} & : & \langle -1, \infty) \\ \searrow \text{ na} & : & (-\infty, -1\rangle \\ \bigcup \text{ na} & : & \langle -2, \infty) \\ \bigcap \text{ na} & : & (-\infty, -2\rangle \\ \text{ABS} & : & \text{nemá} \\ \text{ASS} & : & y = 0 \quad \text{v} \quad -\infty \end{array}\right].$$

Kapitola 3

Integrálny počet

3.1 Určitý integrál

3.1.1 Definícia určitého integrálu

Definícia 39 *1. Nech $\langle a, b\rangle$ je uzavretý interval. Nech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ sú také, že $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$. Potom $k+1-$ticu $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ nazývame delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nazývame deliace intervaly.*

2. *Nech $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom číslo $\|D\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ nazývame norma delenia D.*

3. *Nech $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$. Ak $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že postupnosť $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ je normálna postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$.*

4. *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a $D = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ je ľubovoľné delenie intervalu $\langle a, b\rangle$. Nech body $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ sú ľubovoľne zvolené pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Potom číslo*

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazývame integrálny súčet funkcie f pre dané delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ a voľbu bodov $c_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Definícia 40 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Ak pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a každú voľbu bodov c_i v integrálnych súčtoch $S_{D_n}(f)$, postupnosť $(S_{D_n}(f))_{n=1}^{\infty}$ konverguje k tomu istému číslu J, tak hovoríme, že funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Číslo*

$$J = \lim_{n\to\infty} S_{D_n}(f)$$

nazývame určitý integrál funkcie f na intervale $\langle a,b\rangle$ a označujeme

$$J = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Veta 49 *(Prvá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

Definícia 41 *Nech sú splnené nasledujúce podmienky:*

1. *Funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je ohraničená na intervale $\langle a,b\rangle \subseteq A$.*
2. *V intervale $\langle a,b\rangle$existuje len konečný počet bodov, v ktorých táto funkcia nie je spojitá.*
3. *V každom bode z intervalu (a,b) existuje vlastná limita funkcie f sprava a aj zľava.*
4. *Existujú vlastné limity $\lim_{x\to a+} f(x)$ a $\lim_{x\to b-} f(x)$.*

Potom hovoríme, že funkcia f je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$.

Veta 50 *(Druhá postačujúca podmienka integrovateľnosti) Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je po čiastkach spojitá na intervale $\langle a,b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale integrovateľná.*

3.1.2 Vlastnosti určitého integrálu

Veta 51 *Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a,b\rangle \subseteq A$ a $c \in \mathbb{R}$ je ľubovoľná konštanta. Potom*

1. *Funkcia $(f+g) : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. *Funkcia $(cf) : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b (cf) = c\int_a^b f.$$

3. *Funkcia $|f| : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a,b\rangle$ a platí*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

Veta 52 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na každom intervale $\langle c, d\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$.*

Veta 53 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a aj na intervale $\langle b, c\rangle \subseteq A$. Potom je integrovateľná aj na intervale $\langle a, c\rangle$ a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Veta 54 *Nech funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ a $g : A \to \mathbb{R}$ sú integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$ a pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$. Potom platí*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

3.1.3 Veta o strednej hodnote

Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom je na tomto intervale ohraničená. To znamená, že existujú $k, K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $k \leq f(x) \leq K$. Preto platí

$$\int_a^b k\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b K\,dx.$$

Z toho dostávame

$$k(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq K(b-a).$$

A ďalej

$$k \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq K.$$

Číslo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

nazývame stredná hodnota funkcie f na intervale $\langle a, b\rangle$.

Veta 55 *Nech funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subseteq A$. Potom existuje $c \in \langle a, b\rangle$ také, že*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

To znamená, že spojitá funkcia dosahuje na intervale $\langle a, b\rangle$ svoju strednú hodnotu.

3.1.4 Hlavná veta integrálneho počtu

Definícia 42 *Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom funkciu*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt$$

nazývame funkcia hornej hranice integrálu funkcie f.

Veta 56 *Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je spojitá.

Veta 57 *(Hlavná veta integrálneho počtu) Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá. Potom funkcia*

$$F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

je diferencovateľná (na intervale $\langle a, b\rangle$) a navyše

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{pre každé} \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Definícia 43 *Nech je daná funkcia $f : I \to \mathbb{R}$, kde I je interval. Nech existuje funkcia $F : I \to \mathbb{R}$ taká, že*

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{pre každé} \quad x \in I.$$

Potom funkciu $F : I \to \mathbb{R}$ nazývame primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$.

Veta 58 *Nech funkcia $F_1 : I \to \mathbb{R}$ je primitívnou funkciou funkcie $f : I \to \mathbb{R}$. Potom funkcia $F_2 : I \to \mathbb{R}$ je primitívnou funkciou funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ práve vtedy, ak existuje $c \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $x \in I$ je $F_2(x) = F_1(x) + c$. To znamená, že dve primitívne funkcie tej istej funkcie sa líšia iba o konštantu.*

Veta 59 *(Newtonov - Leibnitzov vzorec) Nech funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá a $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je jej ľubovoľná primitívna funkcia. Potom*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,.$$

Poznámka 4 *Definíciu určitého integrálu zovšeobecňujeme nasledujúcim spôsobom:*

1. $\int\limits_a^a f = 0$.

2. *Ak* $a > b$, *definujeme* $\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$.

3. *Nech* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia. Môžeme definovať funkciu*

$$G : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R},\ G(x) = \int_x^b f(t)dt.$$

Táto funkcia je diferencovateľná (*na intervale* $\langle a, b\rangle$) *a platí*

$$G'(x) = -f(x) \quad \textit{pre každé} \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

4. *Nech* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia,* I *je interval a bod* $a \in I$. *Definujme funkciu* $G : I \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. *Nie je problém ukázať, že táto funkcia je diferencovateľná a* $G'(x) = f(x) \quad$ *pre každé* $\quad x \in I$.

Veta 60 *Nech* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkcia na intervale* I. *Potom k nej existuje primitívna funkcia.*

3.2 Neurčitý integrál

3.2.1 Definícia

Definícia 44 *Nech* I *je interval a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je funkcia. Potom jej ľubovoľnú primitívnu funkciu* $F : I \to \mathbb{R}$ *nazývame neurčitý integrál funkcie* f. *Označujeme* $F(x) = \int f(x)\, dx$.

Poznámka 5 1. *Je zrejmé, že označením* $\int f(x)\, dx$ *nie je výsledok jednoznačne určený. Je to jedna z primitívnych funkcií funkcie* f. *Teda* $\int \sin x\, dx = -\cos x$ *rovnako dobre, ako* $\int \sin x\, dx = -\cos x + 356$. *Teda tieto výsledky sa môžu líšiť o koštantu. Preto, keď napíšeme*

$$\int \sin x\, dx = \int \sin x\, dx,$$

nebude to znamenať, že

$$-\cos x = -\cos x + 356,$$

ale že existuje konštanta $c \in \mathbb{R}$ *taká, že*

$$-\cos x + c = -\cos x + 356.$$

2. *Označenie $F(x) = \int f(x)\ dx$ nie je možné chápať ako rovnosť funkčných hodnôt. Rovnosť $\int sin3d3 = -\cos 3$ nedáva žiaden zmysel. Označenie $\int f(x)\ dx$ treba chápať ako úlohu o nájdení jednej z primtívnych funkcií funkcie f a rovnosť $F(x) = \int f(x)\ dx$ ako jeden z možných výsledkov uvedenej úlohy.*

3.2.2 Metóda per partes

Veta 61 *Nech funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ a $g : I \to \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I. Nech $H : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(f'g) : I \to \mathbb{R}$. Potom $(fg - H) : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $(fg') : I \to \mathbb{R}$. V symbolike neurčitých integrálov to znamená, že*

$$\int (fg') = fg - \int (f'g).$$

Dôsledok 5 *Nech funkcie $f : I \to \mathbb{R}$ a $g : I \to \mathbb{R}$ sú spojito diferencovateľné na intervale I a body $a, b \in I$ sú ľubovoľne zvolené. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$

3.2.3 Substitučná metóda

Veta 62 *(Prvá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $F : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$. Potom $(F \circ \varphi) : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 6 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I \subseteq \mathbb{R}$ je spojito diferencovateľná a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $\alpha, \beta \in J$ sú ľubovoľné. Potom*

$$\int_\alpha^\beta ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Veta 63 *(Druhá veta o substitučnej metóde) Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Nech $G : J \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $((f \circ \varphi)\varphi') : J \to \mathbb{R}$. Potom $(G \circ \varphi^{-1}) : I \to \mathbb{R}$ je primitívna funkcia funkcie $f : I \to \mathbb{R}$.*

Dôsledok 7 *Nech I a J sú intervaly, $\varphi : J \to I$ je spojito diferencovateľná bijekcia a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom pre každé $a, b \in I$ platí:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\ dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} ((f \circ \varphi)\varphi') = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

3.2.4 Niektoré význačné substitúcie

I. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt[k_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[k_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots, \sqrt[k_s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Vypočítame najmenší spoločný násobok $k = \operatorname{lcm}\{k_1, k_2, \ldots, k_s\}$.
2. Položíme
$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t = \varphi^{-1}(x).$$
3. Potom
$$x = \frac{b-dt^k}{ct^k-a} = \varphi(t).$$
4. Ďalej
$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{ad-bc}{(ct^k-a)^2} kt^{k-1}\, dt.$$
5. Ešte máme
$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \quad \text{preto} \quad \sqrt[k_i]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t^{\frac{k}{k_i}}.$$
6. Je zrejmé, že $\frac{k}{k_i}$ je celé číslo. Preto po dosadení do pôvodného integrálu dostávame integrál
$$\int R\left(c, \frac{b-dt^k}{ct^k-a}, t^{\frac{k}{k_1}}, t^{\frac{k}{k_2}}, \ldots, t^{\frac{k}{k_s}}\right) \frac{ad-bc}{(ct^k-a)^2} kt^{k-1}\, dt,$$
čo je integrál z racionálnej funkcie.

II. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx,$$

kde $a > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x.$$

2. Potom
$$ax^2 + bx + c = t^2 \pm 2\sqrt{a}xt + ax^2.$$
V tejto rovnosti vypadne druhá mocnina x. Preto môžeme vypočítať x.

3. Dostávame
$$x = \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t} = \varphi(t).$$

4. Potom
$$dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\,dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x = \pm t \pm \sqrt{a}\frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}.$$

6. Preto daný integrál
$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\,dx$$
je prevedený na integrál z racionálnej funkcie
$$\int R\left(c,\ \frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}\ ,\ \pm t \pm \sqrt{a}\frac{t^2 - c}{b \pm 2\sqrt{a}t}\right)\left(\frac{\pm 2\sqrt{a}t^2 + 2tb \pm 2c\sqrt{a}}{(b \pm 2\sqrt{a}t)^2}\right)\,dt.$$

III. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\,dx,$$

kde $c > 0$ a funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$
Pre jednoduchosť budeme uvažovať len o jednej zo štyroch možností
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt.$$

2. Potom
$$ax^2 + bx + c = c - 2\sqrt{c}xt + x^2t^2.$$
V tejto rovnosti vypadne c, preto môžeme krátiť x−om. Vypočítame x.

3. Dostávame

$$x = \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a} = \varphi(t).$$

4. Potom

$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{c}a)}{(t^2 - a)^2}\, dt.$$

5. Treba si ešte uvedomiť, že

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} - xt = \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}\right) t.$$

6. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\, dx$$

je prevedený na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c,\ \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a},\ \sqrt{c} - \left(\frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a}\right) t\right) \left(\frac{-2(t^2\sqrt{c} + tb + \sqrt{c}a)}{(t^2 - a)^2}\right) dt.$$

IV. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, \sin x, \cos x\right)\, dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame

$$x = 2\operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom

$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{2}{1 + t^2}\, dt.$$

4. Ďalej

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, \sin x, \cos x\right)\, dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c,\ \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

V. **Integrály typu**

$$\int R\left(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x\right)\, dx,$$

kde funkcia R vznikla pomocou konečného počtu racionálnych operácií (sčítania, odčítania, násobenia a delenia) na vedľajších zložkách.

Takéto integrály riešime nasledujúcim postupom:

1. Položíme

$$\operatorname{tg} x = t = \varphi^{-1}(x).$$

2. Dostávame

$$x = \operatorname{arctg} t = \varphi(t).$$

3. Potom

$$dx = \varphi'(t)\, dt = \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

4. Ďalej

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{a} \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

5. Preto daný integrál

$$\int R\left(c, \operatorname{tg} x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x\right)\, dx$$

prevedieme na integrál z racionálnej funkcie

$$\int R\left(c, t, \frac{t^2}{1+t^2}\, , \frac{1}{1+t^2}\, , \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

3.2.5 Príklady

Časť I

1. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme (jednoduché) integrály:

   (a) $\int \frac{1}{3+4x^2}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]$.

   (b) $\int \frac{x}{3+4x^2}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{8}\ln(3+4x^2)\right]$.

   (c) $\int \frac{x}{(x^2+5)^4}\,dx$. .... $\left[-\frac{1}{6(x^2+5)^3}\right]$.

   (d) $\int e^x \operatorname{tg} e^x\,dx$. .... $[-\ln|\cos e^x|]$.

   (e) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}\,dx$. .... $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2+4x+5)-4\operatorname{arctg}(x+2)\right]$.

   (f) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx$. .... $\left[\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\right]$.

   (g) $\int \frac{5x-1}{x^2+2x+3}\,dx$. .... $\left[\frac{5}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right]$.

2. Počítajme integrály z racionálnych funkcií:

   (a) $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx$.

   $[5x+2\ln|x|+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|]$.

   (b) $\int \frac{-2x+19}{x^2+x-6}\,dx$. .... $\left[\ln\frac{|x-2|^3}{|x+3|^5}\right]$.

   (c) $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3}\,dx$. .... $\left[2\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-2\ln|x+1|\right]$.

   (d) $\int \frac{5x^2-7x+10}{x^3-x^2-4x-6}\,dx$.

   $\left[2\ln|x-3|+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)-5\operatorname{arctg}(x+1)\right]$.

   (e) $\int \frac{4x^2+x-13}{2x^3+12x^2+11x+5}\,dx$.

   $[2\ln|x+5|-3\operatorname{arctg}(2x+1)]$.

   (f) $\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$.

   $\left[\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}(2x-1)\right]$.

   (g) $\int \frac{x^5+x^4-7x^3+8x-3}{x^3+x^2-6x}\,dx$.

   $\left[\frac{x^3}{3}-x+\frac{1}{2}\ln|x(x-2)|\right]$.

   (h) $\int \frac{6x-13}{(4x^2+4x+17)}\,dx$.

   $\left[\frac{3}{4}\ln\left(4x^2+4x+17\right)-2\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{4}\right]$.

3. Počítajme metódou "Per partes":

   (a) $\int x\sin x\,dx$. .... $[\sin x-x\cos x]$.

(b) $\int xe^{2x}\,dx$. .... $\left[\frac{(2x-1)e^{2x}}{4}\right]$.

(c) $\int(x^3-x+1)e^{2x}\,dx$. .... $\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x^3-\frac{3x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\right]$.

(d) $\int\limits_0^{\pi}(2x^2+3)\cos 2x\,dx$. .... $[\pi]$.

(e) $\int \ln x\,dx$. .... $[x\ln x - x]$.

(f) $\int x\log_{10}2x\,dx$. .... $\left[\frac{x^2}{2}\left(\log_{10}2x-\frac{1}{2\ln 10}\right)\right]$.

(g) $\int e^x\sin x\,dx$. .... $\left[\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)\right]$.

(h) $\int\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$. .... $[x\mathrm{tg}\,x+\ln|\cos x|]$.

(i) $\int \mathrm{arccotg}\,x\,dx$. .... $\left[x\mathrm{arccotg}\,x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]$.

(j) $\int x\ln(x^2+3x-10)\,dx$.

$\left[\frac{x^2}{2}\ln(x^2+3x-10)-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-2\ln|x-2|-\frac{25}{2}\ln|x+5|\right]$.

(k) $\int\ln(x^2-4x+6)\,dx$.

$\left[(x-2)\ln(x^2-4x+6)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{(x-2)}{\sqrt{2}}\right]$.

(l) $\int x\mathrm{arctg}(x+3)\,dx$.

$\left[\frac{(x^2-8)}{2}\mathrm{arctg}(x+3)-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\ln(x^2+6x+10)\right]$.

4. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

(a) $\int\frac{2^x}{(2^x+3)^7}\,dx$. .... $\left[-\frac{1}{6\ln 2(2^x+3)^6}\right]$.

(b) $\int\frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]$.

(c) $\int\frac{x}{\sqrt{3-4x^2}}\,dx$. .... $\left[-\frac{1}{4}\sqrt{3-4x^2}\right]$.

(d) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{(e^x-2)e^x}{e^{2x}+2e^x+7}\,dx$.

$\left[\frac{1}{2}(\ln 42-\ln 15)-\frac{3}{\sqrt{6}}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{6}{\sqrt{6}}-\mathrm{arctg}\,\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\right]$.

(e) $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x+5\sin x-6}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{7}\ln\left|\frac{1-\sin x}{6+\sin x}\right|\right]$.

(f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x+1}{\cos^4 x+\cos^3 x}\sin x\,dx$. .... $\left[\frac{1}{2}+2\ln\frac{3}{2}\right]$.

(g) $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\cos^2 x-5\cos x+6}\,dx$. .... $\left[\ln\frac{4}{3}\right]$.

(h) $\int\frac{2}{x(\ln x-2)(\ln^2 x-2\ln x+2)}\,dx$. .. $\left[\ln\frac{|\ln x-2|}{\sqrt{(\ln x-1)^2+1}}-\mathrm{arctg}\,(\ln x-1)\right]$.

5. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

(a) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx.$ .... $\left[\frac{12}{\sqrt[12]{x}} - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|\right].$

(b) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right),\ t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\right].$

(c) $\int\limits_1^{64} \frac{2\sqrt{x}}{x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)}\,dx.$ .... $\left[12\ln\frac{3}{2}\right].$

(d) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}}\,dx.$ .. $\left[\frac{3t}{2} - \frac{\ln|1-2t|}{2} - \frac{33}{4(1-2t)},\ t=-x+\sqrt{x^2+x+3}\right].$

(e) $\int \sqrt{x^2+4x+3}\,dx.$

$\left[-\frac{t^2}{8} - \frac{t}{2} + \frac{\ln|t+2|}{2} + \frac{1}{8(t+2)^2},\ t = x - \sqrt{x^2+4x+3}\right].$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{4-3x-x^2}}\,dx.$ .... $\left[-2\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{4-3x-x^2}-2}{x}\right)\right].$

(g) $\int\limits_0^1 \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$ .... $[-8,345].$

(h) $\int \frac{1}{\cos x}\,dx.$ .... $\left[\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}\right|\right].$

(i) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{5}}{5}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(3\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right].$

(j) $\int \frac{1}{\sin x-\cos x}\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}\right|\right].$

(k) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{tg}\,x+1}\,dx.$ .... $\left[\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right].$

(l) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx.$ .... $\left[\frac{\pi}{4}\right].$

(m) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx.$ .... $[1,246].$

(n) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}\,dx.$ .... $\left[\frac{\pi}{4}\right].$

(o) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5+2\cos x}\,dx.$ .... $[0,152].$

(p) $\int \cos(\ln x)\,dx.$ .... $\left[\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)\right].$

6. Vypočítajme $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\,dx.$

$\left[\left(2\left(\sqrt{x}\right)^5 - 10x^2 + 40\left(\sqrt{x}\right)^3 - 120x + 240\sqrt{x} - 240\right)e^{\sqrt{x}}\right].$

7. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

(a) $y = x\ln x,\ x=\frac{1}{2},\ x=2,\ y=0.$ .... $\left[-\frac{9}{16} + \frac{15}{8}\ln 2\right].$

(b) Parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jej dotyčnicami v bodoch $A = [1, 3]$, $B = [4, 0]$. .... $\left[\frac{9}{4}\right]$.

8. Vypočítajme objem zrezaného kužeľa, ktorý vznikne rotáciou elementárnej oblasti okolo osi o_x. Polomery jeho podstáv sú $r = 1$, $R = 2$ a výška $v = 3$. .... $[7\pi]$.

Časť II

1. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme (jednoduché) integrály:

   (a) $\int \frac{1}{4+3x^2}\, dx$. .... $\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{arctg}\, \frac{\sqrt{3}x}{2}\right]$.

   (b) $\int \frac{x}{4+3x^2}\, dx$. .... $\left[\frac{1}{6}\ln(4 + 3x^2)\right]$.

   (c) $\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\, dx$. .... $\left[-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right]$.

   (d) $\int \frac{3x-3}{x^2+2x+2}\, dx$. .... $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2 + 2x + 2) - 6\text{arctg}\,(x + 1)\right]$.

   (e) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+7}\, dx$. .... $\left[\frac{3}{2}\ln(x^2 + 4x + 7) - \frac{4}{\sqrt{3}}\text{arctg}\, \frac{x+2}{\sqrt{3}}\right]$.

   (f) $\int e^x \text{cotg}\, e^x\, dx$. .... $[\ln|\sin e^x|]$.

2. Počítajme integrály z racionálnych funkcií:

   (a) $\int \frac{2}{9x^2-1}\, dx$. .... $\left[\frac{1}{3}\ln\frac{|3x-1|}{|3x+1|}\right]$.

   (b) $\int \frac{1-x}{x^2+x}\, dx$. .... $[\ln|x| - 2\ln|x + 1|]$.

   (c) $\int \frac{x^3-2x^2+9}{x^2-x-2}\, dx$. .... $\left[\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x - 2| - 2\ln|x + 1|\right]$.

   (d) $\int \frac{x}{x^3-3x+2}\, dx$. .... $\left[\frac{2}{9}\ln|x - 1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9}\ln|x + 2|\right]$.

   (e) $\int \frac{x^2+x+12}{x^3+7x^2+11x+5}\, dx$. .... $\left[2\ln|x + 5| - \ln|x + 1| - \frac{3}{x+1}\right]$.

   (f) $\int \frac{x+2}{x^3+x^2+5x-7}\, dx$.

   $\left[\frac{3}{10}\ln|x - 1| - \frac{3}{20}\ln\left(x^2 + 2x + 7\right) + \frac{\sqrt{6}}{15}\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right]$.

   (g) $\int \frac{5x^3-5x^2-11x+5}{x^2-x-2}\, dx$. .... $\left[\frac{5x^2}{2} + \ln|x - 2| - 2\ln|x + 1|\right]$.

   (h) $\int \frac{7-x}{x^3-x^2+3x+5}\, dx$.

   $\left[\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \frac{1}{2}\text{arctg}\,\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]$.

   (i) $\int \frac{2x^3-2x^2+4x-4}{x^4+4}\, dx$.

   $\left[\frac{1}{2}\ln\left[\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(x^2 + 2x + 2\right)\right] - 2\text{arctg}\,(x + 1)\right]$.

3. Počítajme metódou "Per partes":

   (a) $\int x\text{arctg}x\, dx$. .... $\left[\frac{1}{2}x^2\text{arctg}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{arctg}x\right]$.

(b) $\int x^2 e^{3x}\, dx.$ .... $\left[\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)\right].$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(2x)\sin x\, dx.$ .... $\left[\frac{2}{5}e^{\pi}+\frac{1}{5}\right].$

(d) $\int x\ln x^2\, dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2}(\ln x^2-1)\right].$

(e) $\int \ln(x^2+1)\, dx.$ .... $\left[x\ln(x^2+1)-2x+2\mathrm{arctg}\, x\right].$

(f) $\int\limits_1^e \ln^2 x\, dx.$ .... $[(e-2)].$

(g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(3x)\, dx.$ .... $\left[-\frac{3}{13}\left(e^{\pi}+\frac{2}{3}\right)\right].$

(h) $\int x\ln(x^2-2x+5)\, dx.$

$\left[\frac{1}{2}(x^2+3)\ln(x^2-2x+5)-\frac{x^2}{2}-x+4\mathrm{arctg}\,\frac{(x-1)}{2}\right].$

(i) $\int \ln(x^2+x-2)\, dx.$

$\left[x\ln(x^2+x-2)-2x-\ln|x-1|+2\ln|x+2|\right].$

(j) $\int x^2\ln(x^2+4x+4)\, dx.$

$\left[\frac{x^3}{3}\ln(x^2+4x+4)-\frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln|x+2|\right)\right].$

(k) $\int x^2\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\, dx.$ .... $\left[\frac{x^3}{3}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{6}\ln(x^2+1)\right].$

(l) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx.$ .... $\left[2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\right].$

(m) $\int \mathrm{arctg}\frac{1}{x-1}\, dx.$. $\left[x\mathrm{arctg}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right|+\mathrm{arctg}\,(x-1)\right].$

(n) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\, dx.$ .... $\left[\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+4\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}-4\right].$

4. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

(a) $\int \frac{e^x+10}{(e^{2x}-2e^x+5)}\, dx.$ ...... $\left[2x-\ln\left|e^{2x}-2e^x+5\right|+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)\right].$

(b) $\int \frac{e^x(e^x-1)}{e^{2x}+1}\, dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-\mathrm{arctg}\,(e^x)\right].$

(c) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+2e^x-3}{e^{2x}+e^x-6}\, dx.$ .... $\left[\ln\sqrt{5}\right].$

(d) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2}e^x\, dx.$ .... $[\ln 2+\mathrm{arctg}\, 3-\mathrm{arctg}\, 2].$

(e) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x+3}\, dx.$

$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\sin^2 x+\sin x+3\right)-\frac{\sqrt{11}}{11}\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{11}}{11}(2\sin x+1)\right)\right].$

(f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(5-\cos x)\sin x}{\cos^2 x-\cos x-2}\, dx.$ .... $[-3\ln 2].$

(g) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x+\sin^2 x+\sin x}\, dx$.

$\left[\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x + \sin x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+\sin x\right)\right)\right]$.

5. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

(a) $\int x\sqrt[3]{x+2}\, dx$. .... $\left[\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}\right]$.

(b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})}\, dx$. .... $[6\ln(1+\sqrt[6]{x})]$.

(c) $\int \frac{x}{(1+\sqrt{x-1})}\, dx$.

$\left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} - x + 1 + 4\sqrt{x-1} - 4\ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)\right]$.

(d) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\, dx$. .... $[7+\ln 4]$.

(e) $\int \frac{1-\sqrt[6]{x+1}}{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^4}}\, dx$.

$\left[\ln|x+1| - 3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right| - 6\mathrm{arctg}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)\right]$.

(f) $\int \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\, dx$. .... $\left[2\ln\left(1+\sqrt{2x-1}\right) + \frac{2}{1+\sqrt{2x-1}}\right]$.

(g) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x-1}}\, dx$. .... $\left[2\sqrt{x-1} - \ln\left(1+\sqrt{x-1}\right)^4 - \frac{2}{1+\sqrt{x-1}}\right]$.

(h) $\int\limits_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\, dx$. .... $\left[8+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\right]$.

(i) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x-2x^2}}\, dx$. .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)\right)\right]$.

(j) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$. .... $\left[\ln\left|\frac{-x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{1-x-\sqrt{x^2+x+1}}\right|\right]$.

(k) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$. .... $[2\pi]$.

(l) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\, dx$. .... $\left[-2\mathrm{arctg}\, t,\ t = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-\sqrt{3}}{x}\right]$.

(m) $\int\limits_0^4 \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\, dx$. .... $\left[\frac{4}{45}\right]$.

(n) $\int \frac{1}{\sin x}\, dx$. .... $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|\right]$.

(o) $\int \frac{1}{3-\cos x}\, dx$. .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)\right]$.

(p) $\int \frac{1}{3+\cos x+\sin x}\, dx$. .... $\left[\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{7}\left(2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)}{7}\right)\right]$.

(q) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x-2\sin x+3}\, dx$. .... $\left[-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\right]$.

(r) $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\, dx$. .... $\left[2(\ln|t-1| - \ln|t| - \mathrm{arctg}\, t),\ t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right]$.

(s) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}\, dx.$ .... $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right].$

(t) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x+2}.$ .... $\left[\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right)\right].$

6. Vypočítajme $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 5x \cos x\, dx.$ .... $[\frac{1}{6}].$

7. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = \frac{27}{x^2+9},\ y = \frac{x^2}{6}.$ .... $\left[\frac{3}{2}(3\pi - 2)\right].$

   (b) $y = \ln x,\ y = \ln^2 x.$ .... $[3 - e].$

8. Kruh $x^2+y^2 = 8$ je rozdelený parabolou $y = \frac{x^2}{2}$ na dve časti. Vypočítajme plošný obsah menšej z nich. .... $\left[2\pi + \frac{4}{3}\right].$

9. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \frac{2x}{\pi},\ y = \sin x,\ x \geq 0.$ .... $\left[\frac{\pi^2}{12}\right].$

Časť III

1. Pomocou priameho integrovania, využívajúc len vzorce integrálov elementárnych funkcií, vypočítajme:

   (a) $\int 3x^3 + 2x - 4\, dx.$ .... $\left[\frac{3}{4}x^4 + x^2 - 4x\right].$

   (b) $\int \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{5}\right) dx.$ .... $\left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{10}\right].$

   (c) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$ .... $\left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - 2x^{\frac{1}{2}}\right].$

   (d) $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}\, dx.$ .... $\left[\ln|x| - \frac{1}{4x^4}\right].$

   (e) $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{x} - x\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[4]{x}}\, dx.$ .... $\left[-\frac{12\sqrt[12]{x^{37}}}{37} + \frac{12\sqrt[12]{x^{25}}}{25}\right].$

   (f) $\int \frac{x^3-1}{x-1}\, dx.$ .... $\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right].$

   (g) $\int e^x a^x\, dx.$ .... $\left[\frac{e^x a^x}{1+\ln a}\right].$

   (h) $\int \left(5\cos x - 2x^5 + \frac{3}{1+x^2}\right) dx.$ .... $\left[5\sin x - \frac{x^6}{3} + 3\operatorname{arctg} x\right].$

   (i) $\int \left(10^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+1}\right) dx.$ .... $\left[-\frac{10^{-x}}{\ln 10} + x + 2\operatorname{arctg} x\right].$

   (j) $\int (2\sin x - 3\cos x)\ dx.$ .... $[-2\cos x - 3\sin x].$

   (k) $\int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}}\, dx.$ .... $\left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{3}}\right].$

   (l) $\int \frac{3.2^x - 2.3^x}{2^x}\, dx.$ .... $\left[3x - \frac{3^x}{2^{x-1}(\ln 3 - \ln 2)}\right].$

(m) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)}\,dx$. .... $\left[\frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x}{2}\right]$.

(n) $\int \frac{\cos(2x)}{(\cos^2 x)\sin^2 x}\,dx$. .... $[-\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x]$.

(o) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$. .... $[\operatorname{tg} x - x]$.

(p) $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$. .... $[-\operatorname{cotg} x - x]$.

(q) $\int \frac{1}{\cos(2x)+\sin^2 x}\,dx$. .... $[\operatorname{tg} x]$.

(r) $\int \frac{\left(1+2x^2\right)}{x^2(1+x^2)}\,dx$. .... $\left[-\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x\right]$.

(s) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$. .... $[\ln|x| + 2\operatorname{arctg} x]$.

2. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme (jednoduché) integrály:

(a) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$. .... $\left[\frac{-1}{2\sin^2 x}\right]$.

(b) $\int \frac{x^2}{5+x^3}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{3}\ln|5+x^3|\right]$.

(c) $\int \frac{1}{3+9x^2}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)\right]$.

(d) $\int \frac{x}{3+9x^2}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{18}\ln(3+9x^2)\right]$.

(e) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5}\,dx$. .... $\left[\ln\left(x^2+2x+5\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$.

(f) $\int \frac{x-1}{x^2-4x+7}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+7) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right]$.

(g) $\int \frac{\sin x}{\cos x - 1}\,dx$. .... $[-\ln|\cos x - 1|]$.

(h) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[4]{\sin x + \cos x}}\,dx$. .... $\left[-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(\sin x + \cos x)^3}\right]$.

3. Počítajme integrály z racionálnych funkcií:

(a) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$. .... $\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2|x-2|^5}{|x+2|^3}\right]$.

(b) $\int \frac{x^2-x+2}{(x-3)(x-1)^2}\,dx$. .... $\left[2\ln|x-3| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right]$.

(c) $\int \frac{3x^2-11x+7}{(x-3)(x^2-4x+4)}\,dx$. .... $\left[2\ln|x-2| + \ln|x-3| - \frac{3}{x-2}\right]$.

(d) $\int \frac{x^3+3x^2+1}{x^2+x}\,dx$. .... $\left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| - 3\ln|x+1|\right]$.

(e) $\int \frac{3x^2-x-14}{x^3+x^2-5x+3}\,dx$. .... $\left[\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \frac{3}{x-1}\right]$.

(f) $\int \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x^2+2x+3)}\,dx$.

$\left[\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]$.

(g) $\int \frac{x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{4}\ln|1+x| - \frac{1}{4}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right]$.

(h) $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx$. .... $\left[\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right]$.

(i) $\int\limits_3^4 \frac{2x^2-3x+10}{x^3-7x^2+10x}\,dx.$ .... $\left[\ln\frac{1}{24}\right]$.

(j) $\int\limits_1^2 \frac{x^3-3x^2-10x+6}{x^2-4x-5}\,dx.$ .... $\left[\frac{5}{2}-\ln 3\right]$.

(k) $\int\limits_2^3 \frac{x^2+2}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx.$ .... $\left[\ln 2+\frac{17}{8}\right]$.

4. Počítajme metódou "Per partes":

(a) $\int x\ln x\,dx.$ .... $\left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\right]$.

(b) $\int xe^{-x}\,dx.$ .... $\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]$.

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,dx.$ .... $\left[\frac{(1+2e^{\pi})}{5}\right]$.

(d) $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$ .... $\left[x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$.

(e) $\int x^2 3^x\,dx.$ .... $\left[\frac{3^x}{\ln 3}\left(x^2-\frac{2x}{\ln 3}+\frac{2}{(\ln 3)^2}\right)\right]$.

(f) $\int x\operatorname{arccotg} x\,dx.$ .... $\left[\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arccotg} x+\frac{x}{2}\right]$.

(g) $\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx.$ .... $\left[\pi^2-4\right]$.

(h) $\int\limits_0^1 x\operatorname{arccotg} x\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.

(i) $\int \arccos x\,dx.$ .... $\left[x\arccos x-\sqrt{1-x^2}\right]$.

(j) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx.$ .... $\left[\frac{5\pi}{12}-\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\right]$.

(k) $\int \ln(x^2-2x-3)\,dx.$

$\left[x\ln(x^2-2x-3)-2x+\ln|x+1|-3\ln|x-3|\right]$.

(l) $\int \ln(x^2-6x+9)\,dx.$

$\left[x\ln(x^2-6x+9)-2x-6\ln|x-3|\right]$.

(m) $\int \ln(x^2+2x+3)\,dx.$

$\left[(x+1)\ln(x^2+2x+3)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\right]$.

(n) $\int x^2\operatorname{arctg}(x-1)\,dx.$

$\left[\frac{1}{3}\left((x^3+2)\operatorname{arctg}(x-1)-\frac{x^2}{2}-2x-\ln(x^2-2x+2)\right)\right]$.

5. Pomocou prvej vety o substitúcii počítajme integrály:

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}}\,dx.$ .... $\left[-\frac{1}{5}\sqrt{2-5x^2}\right]$.

(b) $\int \frac{e^x}{4e^{2x}-8e^x+13}\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)\right)\right]$.

(c) $\int \frac{2e^{2x}-3e^x+10}{e^{2x}-7e^x+10}\,dx.$ .... $[x - 2\ln|e^x-2| + 3\ln|e^x-5|]$.

(d) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+2\cos x+5}\,dx.$ $\left[-\ln\left(\cos^2 x+2\cos x+5\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x+1}{2}\right)\right]$.

(e) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\sin x-2}\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln|\sin x-1|+\frac{2}{3}\ln(\sin x+2)\right]$.

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x+\sin x-6}\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{5}\ln\frac{3}{8}\right]$.

(g) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\cos x-6}\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{5}\ln\frac{16}{27}\right]$.

6. Pomocou druhej vety o substitúcii počítajme integrály:

(a) $\int \frac{e^x+10}{e^{2x}-2e^x+5}\,dx.$ .... $\left[2x-\ln\left(e^{2x}-2e^x+5\right)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x-1}{2}\right]$.

(b) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$ .... $\left[6\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\right)\right]$.

(c) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$ .... $\left[\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1}\right|+2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right]$.

(d) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx.$ .... $\left[2\sqrt{1+x}+\ln|\sqrt{1+x}-1|-\ln|1+\sqrt{1+x}|\right]$.

(e) $\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx.$.

$\left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|,\ t=\sqrt{2x+3}\right]$.

(f) $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$ .... $[\ln 9]$.

(g) $\int \frac{1}{\sqrt{8-6x-9x^2}}\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\left(\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)\right)\right]$.

(h) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx.$ .... $\left[\ln\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right]$.

(i) $\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\,dx.$

$\left[2\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1},\ t=\sqrt{x^2-x+1}-x\right]$.

(j) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+\cos x}\,dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right]$.

(k) $\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx.$ .... $\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)\right]$.

(l) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{4-5\sin x}\,dx.$ .... $\left[\frac{1}{3}\ln 2\right]$.

(m) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx.$ .... $\left[\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2\right]$.

(n) $\int \frac{1}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}\,dx.$ .... $\left[\frac{\sqrt{14}}{14}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\operatorname{tg} x\right)\right]$.

7. Vypočítajme $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$ .... $[4-\pi]$.

8. Vypočítajme $\int\limits_0^{2\pi} \cos 3x \cos 4x \, dx$. .... $[0]$.

9. Vypočítajme plošný obsah rovinnej oblasti ohraničenej krivkami:

   (a) $y = x - 1, y^2 = 2x + 1$. .... $\left[\frac{16}{3}\right]$.

   (b) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2$. .... $\left[\frac{8}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$.

10. Vypočítajme objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x. Oblasť je určená čiarami $y = \sin x$, $y = \frac{2x}{\pi}$. .... $\left[\frac{\pi^2}{6}\right]$.

✠