æ

Komplexné čísla

Najprv pripomenieme niektoré známe vlastnosti reálnych čísel.

Veta 1. *Nech $a, b, c \in R$ potom platí:*
(i) $a + b = b + a$ *(komutatívnosť sčítania)*
(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(asociatívny zákon)*
(iii) $a + 0 = a$
(iv) $a + (-a) = 0$
(v) $ab = ba$ *(komutatívnosť násobenia)*
(vi) $a(bc) = (ab)c$ *(asociatívny zákon)*
(vii) $1 \cdot a = a$
(viii) *Ak $a \neq 0$, tak $\exists \frac{1}{a} \in R$ a platí $a \cdot \frac{1}{a} = 1$*
(ix) $a(b + c) = ab + ac$ *(distributívny zákon)*

Vieme, že neexistuje $x \in R$, pre ktoré by $x^2 = -1$. Tento „nedostatok” reálnych čísel odstránili matematici tak, že si také číslo vymysleli. Volá sa imaginárna jednotka a označovať ho budeme písmenom i (v elektrotechnických aplikáciách je zaužívané aj označenie j).

Definícia 2. Nech $x, y \in R$. Výraz tvaru iy sa nazýva *imaginárne číslo*, výraz tvaru $x + iy$ sa nazýva *komplexné číslo* (*algebraický tvar* komplexného čísla). Množinu všetkých komplexných čísel budeme označovať C.

V množine všetkých komplexných čísel sú operácie sčítania a násobenia určené vzťahom $i^2 = -1$ a vlastnosťami (i)–(ix). Teda ak $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$, tak

$$\begin{aligned} a + ib = 0 &\iff a = b = 0 \\ (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) \\ -(a + ib) &= (-a) + i(-b) \\ (a + ib)(a - ib) &= a^2 + b^2 \in R \\ \text{ak } a + ib \neq 0 \text{ tak } \frac{1}{a + ib} &= \frac{1}{a + ib}\frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Predchádzajúce vzťahy sa ľahko overia priamym výpočtom, napr.:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1(a_2 + ib_2) + ib_1(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = \\ (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

Ukázali sme, že sčítaním, násobením a delením dvoch komplexných čísel dostaneme znova komplexné číslo (t.j. výraz tvaru $x + iy$, kde $x, y \in R$ a tieto operácie sme definovali tak, že aj komplexné čísla spĺňajú vlastnosti (i)–(ix) reálnych čísel.

Definícia 3. Nech $x, y \in R$, $z = x+iy \in C$. Potom sa x nazýva *reálna časť* a y *imaginárna časť* komplexného čísla z, označujeme: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, číslo $\overline{z} = x - iy$ sa nazýva číslo *komplexne združené* s číslom z.

Priamym výpočtom sa dá overiť, že platí

Veta 4. *Nech $z, z_1, z_2 \in C$. Potom platí*
(i) $\overline{\overline{z}} = z$,
(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
(iii) $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,
(iv) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Príklad. Vypočítajte (t.j. napíšte v tvare $x + iy$, $x \in R, y \in R$) čísla
a) i^{23} b) $\frac{1}{i}$ c) $\frac{2+3i}{i}$
d) $\frac{1+i}{2-i}$ e) $\frac{(2-i)^2}{1+i}$ f) $(1 - i)^6$

Riešenie. a) Všimnime si, že $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, potom dostaneme $i^{23} = i^{5\cdot 4+3} = (i^4)^5 i^3 = 1^5(-i) = -i$,
b) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$,
c) $\frac{2+3i}{i} = \frac{1}{i}(2+3i) = -i(2+3i) = -2i - 3i^2 = 3 - 2i$,
d) $\frac{1+i}{2-i} = \frac{1+i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2+i)}{4+1} = \frac{2+i+2i+i^2}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$,
e) $\frac{(2-i)^2}{1+i} = \frac{4-4i+i^2}{1+i} = \frac{(3-4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-3i-4i+4i^2}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{7}{2}$
f) $(1-i)^6 = ((1-i)^2)^3 = (1-2i+i^2)^3 = (-2i)^3 = (-2)^3 i^3 = -8(-i) = 8i$.

Geometrická interpretácia komplexných čísel.

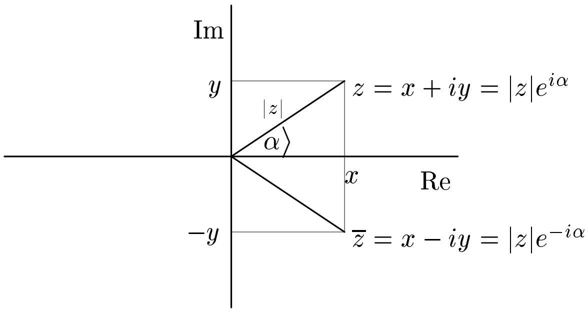
Komplexné číslo je určené usporiadanou dvojicou reálnych čísel. Teda k $z \in C$ môžeme priradiť dvojicu reálnych čísel ($x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$) a tej zasa bod v rovine. Je tým tiež určený vektor v rovine, ktorého počiatočný bod je $(0,0)$ a koncový bod je (x,y).

Komplexné číslo $z = x + iy$ stotožníme s týmto vektorom. Pritom aj obvyklé sčítanie vektorov v rovine zodpovedá sčítaniu komplexných čísel. Používame pravouhlé súradnice v rovine, ale na zdôraznenie, že v nej kreslíme komplexné čísla budeme os x nazývať reálna os a os y imaginárna os.

Dĺžka tohoto vektora sa nazýva absolútna hodnota komplexného čísla z. Ak je $z \neq 0$ je tento vektor jednoznačne určený svojou dĺžkou a orientovaným uhlom, ktorého počiatočným ramenom je vektor $(1,0)$ (teda kladná časť reálnej osi) a koncovým ramenom je vektor $z = (x,y)$ Pripomeňme, že orientácia uhla je kladná ak sa jeho počiatočné rameno dostane do koncového rameno otáčaním okolo vrchola proti smeru hodinových ručičiek. Veľkosť orientovaného uhla $\varphi > 0$ budeme určovať v oblúkovej miere, radiánoch, teda je určená dĺžkou cesty, ktorú prejde koncový bod vektora dĺžky 1 pri otáčaní o uhol φ proti smeru hodinových ručičiek, záporné uhly rovnako zodpovedajú otáčaniu v smere hodinových ručičiek.

Tabuľka hodnôt $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$

stupne	α	360	180	90	60	45	30
radiány	$\frac{2\pi}{360}\alpha$	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$
cos	$\cos\alpha$	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
sin	$\sin\alpha$	0	0	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$



Obr. 1 Geometrická interpretácia komplexného čísla.

Definícia 1. Nech $z = x + iy \in C$, $x, y \in R$.
(i) Nezáporné číslo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sa nazýva *absolútna hodnota* komplexného čísla z,
(ii) Ak je navyše $z \neq 0$, tak orientovaný uhol φ, pre ktorý $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, nazývame *argument* komplexného čísla z.
(iii) $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sa nazýva *goniometrický tvar* komplexného čísla z.

Poznamenajme, že ak φ je argument čísla z, tak je $\varphi + 2k\pi$ pre $\forall k \in Z$ tiež argumentom čísla z. Vyjadrenie čísla z v goniometrickom tvare je vlastne len preformulovaním definície funkcie $\sin\varphi$ a $\cos\varphi$ pre orientované uhly. Goniometrický tvar komplexného čísla sa skrátene zapisuje v exponenciálnom tvare:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad \text{kde číslo } e \text{ je základ prirodzeného logaritmu.}$$

Oprávnenosť tohoto zápisu je vidieť z geometrickej interpretácie násobenie komplexných čísel:

Veta 2. *Ak $\alpha, \beta \in R$, tak*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\,.$$

Toto tvrdenie sa dá dokázať pomocou geometrických úvah a je ekvivalentné so súčtovými vzorcami známymi zo strednej školy (overte si to):

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,, \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,, \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,.$$

Geometrická interpretácia vety 2 hovorí: pri násobení komplexných čísel sa ich argumenty sčítajú. Absolútne hodnoty sa násobia, čo je jedným z tvrdení nasledujúcej vety:

Veta 3. *Pre $\forall z, w \in C$ platí:*
(i) $|z+w| \le |z| + |w|$ *(trojuholníková nerovnosť)*
(ii) $|zw| = |z||w|$.

Obe tvrdenia sa dajú ľahko overiť výpočtom. Ak nie sú vektory z, w rovnobežné, tak je vektor $z + w$ uhlopriečka vo vhodnom rovnobežníku (nakreslite ho) nerovnosť (i) je známe tvrdenie, že strana trojuholníka je kratšia ako súčet dĺžok zvyšných dvoch strán.

Veta dva má nasledujúci dôsledok, ktorý je známy ako

Moivreova veta. *Ak $r\phi \in R$, $r > 0$, $n \in N$, tak*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]\,.$$

Moivreova veta sa používa na riešenie rovnice $z^n = c$, kde $c \neq 0$ je známe komplexné číslo, $n \in N$ a neznáma z sa hľadá v množine C. Popíšeme teraz ako sa binomická rovnica rieši:

1. pravú stranu vyjadríme v goniometrickom tvare a riešime rovnicu

$$z^n = |c|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |c|[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)]\,, \quad k \in Z\,.$$

2. Neznámu z budeme hľadať v goniometrickom tvare, teda hľadáme kladné číslo r a uhol $\alpha \in R$, tak aby $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ bolo riešenie rovnice $z^n = c$, t.j.

$$r^n[\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = |c|[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)]\,, \quad k \in Z\,.$$

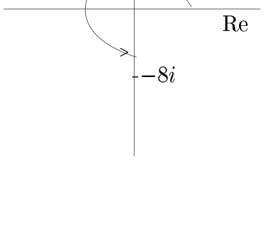
3. Vidieť, že predchádzajúca rovnosť platí pre $r = \sqrt[n]{|c|}$ a $\alpha = \frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$, $k \in Z$ a teda

$$z_k = \sqrt[n]{|c|}\Big[\cos\big(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\big) + \sin\big(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\big)\Big]\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

je n rôznych riešení danej binomickej rovnice.

4. $\frac{\varphi}{n} + (k+n)\frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} + 2\pi \implies z_{n+k} = z_k$, teda takto viac riešení nevyrátame. Platí tvrdenie, že riešenie iného tvaru rovnica nemá, ale nebudeme ho teraz dokazovať. Poznamenajme ešte, že riešenia binomickej rovnice ležia na kružnici so stredom v bode 0 a polomerom $\sqrt[n]{|c|}$ a tvoria vrcholy pravidelného n-uholníka.

Príklad. Riešte rovnicu $z^3 = -8i$ a výsledok napíšte v algebraickom tvare a znázornite.



Najprv pravú stranu znázorníme a z obrázku určíme absolútnu hodnotu $|-8i| = 8$ a argument $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ a teda riešime rovnicu

$$z^3 = 8\big[\cos\big(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\big) + i\sin\big(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\big)\big]$$

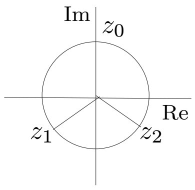
Odmocnením absolútnej hodnoty a delením argumentu dostaneme riešenie:

$$z_k = 2\big[\cos\frac{1}{3}\big(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\big) + i\sin\frac{1}{3}\big(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\big)\big]\,, k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = 2\big[\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi\big] = 2i$$

$$z_1 = 2\big[\cos\big(\frac{1}{2}\pi + \frac{2\pi}{3}\big) + i\sin\big(\frac{1}{2}\pi + \frac{2\pi}{3}\big)\big] = 2\big[\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\big] = -\sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2\big[\cos\big(\frac{1}{2}\pi + \frac{4\pi}{3}\big) + i\sin\big(\frac{1}{2}\pi + \frac{4\pi}{3}\big)\big] = 2\big[\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\big] = \sqrt{3} - i$$



1. Úlohy

1. Nájdite výsledok operácie v tvare $x + yi$, kde $x, y \in R$.
   a. $3 + 7i - (5 - 2i)(4 - i)$
   b. $i(1 + i)(1 - i)(1 + 2i)(1 - 2i)$
   c. $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
   d. $\frac{a+bi}{a-bi}$, $a, b \in R$
   e. $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
2. Nájdite všetky $x, y \in R$ také, že
   a. $(2x + 3y) + i(x - y) = -1 + 2i$
   b. $(ix + y)(2x - 3iy) = 2i$
   c. $\dfrac{-y + ix}{1 - 2i} + \dfrac{x + iy}{2 + 3i} = 1$
3. Dané komplexné číslo znázornite a nájdite jeho goniometrický tvar.
   a. -5 b. $1 - i$ c. $\sqrt{3} - i$ d. $-5i$ e. $2 + 3i$ f. $-3 - 7i$
4. Vypočítajte zu, $\frac{z}{u}$, z^n.
   a. $z = \sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5})$, $u = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, $n = 5$
   b. $z = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, $u = 6(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8})$, $n = 2004$
5. V obore komplexných čísel riešte rovnicu. Výsledok vyjadrite v algebraickom aj goniometrickom tvare a znázornite.
   a. $z^4 = 4$
   b. $z^4 = -4$
   c. $z^3 = -8i$
   d. $z^4 = -1 - i\sqrt{3}$
6. Vypočítajte.
   a. i^{101} b. $(1 + i)^4$ c. $\big(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\big)^8$