Príklady z Lineárnej algebry

1 Komplexné čísla

1.1 Zadania

1. Nájdite výsledok operácie v tvare $a+bi$, kde a,b sú reálne čísla.
   (a) $3+7i-(5-2i)(4-i)$
   (b) $i(1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)$
   (c) $\frac{(1-7i)}{(2+3i)}$
   (d) $\frac{a+bi}{a-bi}$
   (e) $\frac{i(2+3i)}{3+5i}$
2. Nájdite goniometrický tvar komplexného čísla.
   (a) -5
   (b) $1-i$
   (c) $\sqrt{3}-i$
   (d) $-5i$
   (e) $2+3i$
   (f) $-3-7i$
3. Vypočítajte zu, $\frac{z}{u}$, z^n.
   (a) $z=-\sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5})$, $u=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, $n=5$
   (b) $z=3(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, $u=6(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8})$, $n=1991$
4. Nájdite všetky n-té odmocniny z kompl. čísla z, ak
   (a) $n=2$, $z=-1$
   (b) $n=3$, $z=-i$
   (c) $n=4$, $z=81$
   (d) $n=3$, $z=-64-64i$
   (e) $n=4$, $z=1-i\sqrt{3}$
5. Nájdite exponenciálny tvar komplexných čísel z úlohy 2.
6. Nech $z_0,z_1,\ldots,z_{1998}$ sú všetky 1999 odmocniny z komplexného čísla 1. Vypočítajte hodnotu súčinu $z_0z_1\cdots z_{1998}$.

Výsledky

1. (a) $-15+20i$
   (b) $10i$
   (c) $-\frac{19}{13}-\frac{17}{13}i$
   (d) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$
   (e) $\frac{1}{34}+\frac{21}{34}i$
2. (a) $5(\cos\pi+i\sin\pi)$
   (b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$
   (c) $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$
   (d) $5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$
   (e) $\sqrt{13}\left(\cos\left(\arctan\frac{3}{2}\right)+i\sin\left(\arctan\frac{3}{2}\right)\right)$
   (f) $\sqrt{58}\left(\cos\left(\pi+\arctan\frac{7}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\arctan\frac{7}{3}\right)\right)$
3. (a) $-2\sqrt{3}\left(\cos\frac{26\pi}{15}+i\sin\frac{26\pi}{15}\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{-2}\left(\cos\frac{16\pi}{15}+i\sin\frac{16\pi}{15}\right)$, $9\sqrt{3}$
   (b) $18\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$, $3^{1991}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$
4. (a) $\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}$, $k=0,1$
   (b) $\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$
   (c) $3\left(\cos\frac{2k\pi}{4}+i\sin\frac{2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$
   (d) $4\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$
   (e) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)$, $k=0,1,2,3$
5. (a) $5e^{i\pi}$
   (b) $\sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$
   (c) $2e^{i\frac{11}{4}\pi}$
   (d) $5e^{i\frac{3}{5}\pi}$
   (e) $\sqrt{13}e^{i\arctan\frac{3}{2}}$
6. -1

2 Polynómy

2.1 Zadania

1. Vynásobte polynómy:
   (a) $\left(2x^4-6x^3+5x-1\right)\left(x^2-2x+2\right)$

(b) $\left(3x^3+(1-i)\,x^2+ix-2+i\right)$
$\left(3x^3+(1+i)\,x^2-ix-2-i\right)$

2. Pomocou Hornerovej schémy vypočítajte.
   (a) $\left(x^4-2x^3+4x^2-6x+8\right)/\left(x-1\right)$
   (b) $\left(4x^3+x^2\right)/\left(x+1+i\right)$
   (c) $\left(3x^4+(1-3i)\,x^3-2ix^2+ix-i\right)/\left(x-i\right)$
3. Vypočítajte $f\left(c\right)$, ak
   (a) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\ c=4$
   (b) $f(x)=6x^4-7x^3+4x+2,\ c=-\frac{1}{3}$
   (c) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7,\ c=-2-i$
4. Nájdite takú hodnotu parametra a, že c bude koreňom polynómu $f(x)$.
   (a) $f(x)=x^3+2x^2-ax+2,\ c=3$
   (b) $f(x)=2x^6-ax^4-x^3+ax^2+3a,\ c=-1$
5. Nájdite násobnosť koreňa c polynómu $f(x)$.
   (a) $f(x)=x^6-4x^5+6x^4-8x^3+10x^2-8x+8,\ c=2$
   (b) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8,\ c=2$
   (c) $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16,\ c=-2$
   (d) $f(x)=x^6-2ix^5-x^4-x^2+2ix+1,\ c=i$
6. Nájdite všetky racionálne korene polynómu $p(x)$.
   (a) $2x^7-13x^6+6x^5+13x^4-18x^3+29x^2-22x+3$
   (b) $6x^4-11x^3-x^2-4$
   (c) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$
   (d) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$
7. Nájdite všetky korene polynómu.
   (a) $(1+i)x+2i$
   (b) $x^2-(2+i)x-1+7i$
   (c) $ix^2+(1-i)x-5$
   (d) x^4-30x^2+289
   (e) $x^4-(5+4i)x^2+6+8i$
   (f) x^3+i
   (g) x^8-16
8. Nájdite kanonický rozklad polynómu v $P(C)$.
   (a) ix^3+1
   (b) x^4-1
   (c) $3x^5+5x^4+10x^3+14x^2+3x-3$
   (d) $6x^4-11x^3-x^2-4$
9. Nájdite kanonický rozklad polynómu v $P(R)$.
   (a) x^4+4
   (b) x^6-8
   (c) $2x^6+3x^5+x^3+3x^2-1$
   (d) $x^6-2x^5+x^4-8x+4$

Výsledky

1. (a) $2x^6-10x^5+16x^4-7x^3-11x^2+12x-2$
   (b) $9x^6+6x^5+2x^4-14x^3-6x^2+2x+5$
2. (a) $x^3-x^2+3x-3,\text{zvyšok}\,5$
   (b) $4x^2-(3+i)\,x-1+7i,\text{zvyšok}\,8-6i$
   (c) $3x^3+x^2-ix+1+i$, zvyšok -1
3. (a) 136
   (b) 1
   (c) $-1-44i$
4. (a) $\frac{47}{3}$
   (b) -1
5. (a) 2
   (b) 3
   (c) 4
   (d) 3
6. (a) $1,1,-\frac{3}{2}$
   (b) $-\frac{2}{3},2$
   (c) nie sú rac. korene
   (d) $-1,-1,-1,-1,3$
7. (a) $-1-i$
   (b) $3-i,-1+2i$
   (c) $2-i,-1+2i$
   (d) $\pm4\pm i$
   (e) $\pm\sqrt{2},2+i,-2-i$
   (f) $i,\ \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3}-i\right)$
   (g) $\pm\sqrt{2},\ \pm i\sqrt{2},\ \pm1\pm i$
8. (a) $i(x+i)\left(x-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)\left(x-\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)$
   (b) $(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$
   (c) $3(x+1)^2\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$
   (d) $6(x-2)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)$
9. (a) $\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$
   (b) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+\sqrt{2}x+2)(x^2-\sqrt{2}x+2)$
   (c) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+1\right)^3\left(x^2-x-1\right)$
   (d) $\left(x-1\right)^2\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$

3 Sústavy lineárnych rovníc

3.1 Zadania

1. Riešte systémy lineárnych rovníc.

   (a) $x_1 + 2x_2 = -3$
   $3x_2 = -6$

   (b) $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11$
   $-3x_2 + x_3 = -3$
   $7x_3 = 21$

   (c) $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$
   $-x_2 + x_3 = i$
   $2x_3 = 2 + 2i$

   (d) $3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 3$
   $8x_2 - 3x_3 + x_4 = -1$
   $9x_3 + 2x_4 = -2$
   $4x_4 = -4$

   (e) $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = -9$
   $8x_2 - 3x_3 + x_4 = 12$
   $9x_3 + 2x_4 = -7$
   $4x_4 = 4$

2. Pre systémy z úlohy 1 napíšte maticu systému a rozšírenú maticu systému.

3. Interpretujte každý z nasledujúcich systémov ako 2 priamky v rovine. Pre každý systém nakreslite priamky a určte geometricky počet a hodnoty riešení.

   (a) $2x_1 - x_2 = 4$
   $3x_1 + 5x_2 = -7$

   (b) $2x_1 - 5x_2 = 1$
   $-4x_1 + 10x_2 = 4$

   (c) $3x_1 - 2x_2 = 2$
   $-9x_1 + 6x_2 = 3$

   (d) $2x_1 - 4x_2 = 2$
   $4x_1 - 8x_2 = 3$

   (e) $3x_1 + x_2 = 7$
   $5x_1 - 8x_2 = 2$

   (f) $x_1 + 2x_2 = 3$
   $2x_1 + x_2 = 3$

4. Napíšte systémy lineárnych rovníc korešpondujúce nasledovným maticiam.

   (a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

   (b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$

5. Riešte systémy lineárnych rovníc.

   (a) $x_1 - x_2 = -2$
   $-3x_1 + 2x_2 = 3$

   (b) $12x_1 - x_2 + 5x_3 = 30$
   $3x_1 - 13x_2 + 2x_3 = 21$
   $7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$

   (c) $7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$
   $-x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 2$
   $-10x_1 + 15x_2 - 11x_3 = 4$

   (d) $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 1$
   $x_1 - x_2 + x_3 = 2$
   $4x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$

   (e) $3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2$
   $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12$
   $4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1$
   $5x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 5$

   (f) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1$
   $2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 2$
   $2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3$
   $-6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4$

6. Riešte systémy s komplexnými koeficientami.

   (a) $2x_1 + (2-i)\,x_2 = 9$
   $-x_1 + x_2 = i$

   (b) $3x_1 + 2x_2 + x_2 = 2 + i$
   $x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 14 - 3i$
   $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 - 2i$

7. Riešte dva systémy

   $$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 & \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 & \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 & \quad x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \end{array}$$

   s rovnakou maticou pomocou eliminácie na matici 3×5.

8. Je daný lin. systém

   $x + 2y - 3z = 4$
   $3x - y + 5z = 2$
   $4x + y + \left(\alpha^2 - 14\right) z = \alpha + 2$

   Pre ktoré hodnoty α nemá systém riešenie? Kedy má práve 1 riešenie. Kedy má nekonečne veľa riešení?

9. V ZOO majú pštrosov a žirafy. Ak je tam spolu 60 hláv a 200 nôh, koľko majú pštrosov a koľko žiráf?

Výsledky

1. (a) $(1, -2)$
   (b) $(1, 2, 3)$
   (c) $(-i, 1, 1+i)$
   (d) $(2, 0, 0, -1)$
   (e) $(-1, 1, -1, 1)$

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 21 \end{pmatrix}$

3. (a) $(1,-2)$
   (b) nemá riešenie
   (c) $\left(\frac{2}{3}(t+1), t\right), t \in \mathbb{R}$
   (d) nemá riešenie
   (e) $(2,1)$
   (f) $(1,1)$

4. (a) $x_1+2x_2+3x_3 = 4\ 3x_1-3x_2-5x_3 = 0\ x_1-x_2+x_3 = 0$
   (b) $4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 1\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$

5. (a) $(1,3)$
   (b) $(2,-1,1)$
   (c) $\left(\frac{2}{3}(t+1), t\right)$
   (d) $(t+1, 2t-1, t)$
   (e) $\left(0, 2, \frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$
   (f) nemá riešenie

6. (a) $(2, 2+i)$
   (b) $(i, -i, 2)$

7. $(-1,2,1), (3,1,-2)$

8. Pre $\alpha = 4$ nekonečne veľa, pre $\alpha = -4$ žiadne, pre $\alpha \neq \pm 4$ práve jedno.

4 Riešenie sústav lineárnych rovníc

4.1 Zadania

1. Ktoré z nasledujúcich matíc sú v stupňovitom tvare a v redukovanom stupňovitom tvare?

   (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Nájdite riešenia systémov zadaných rozšírenou maticou sústavy.

   (a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

   (b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

   (c) $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

3. Riešte systémy.

   (a) $2x_1 - x_2 = 2$
   $-4x_1 + 2x_2 = -4$

   (b) $2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4$
   $x_1 - x_3 + x_4 = 5$
   $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2$

   (c) $3x_1 + 1x_2 - 4x_3 = 1$
   $x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$
   $2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4$

   (d) $x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 2$
   $3x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -8$
   $4x_2 - x_3 - x_4 = 1$
   $x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 7$

   (e) $4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 3$
   $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 10$
   $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -9$
   $2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 19$

   (f) $3x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3$
   $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1$
   $4x_1 + 4x_2 + 12x_3 - 4x_4 + 12x_5 = 4$
   $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2$

   (g) $5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5$
   $11x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4$
   $4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 8$
   $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3$
   $9x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 10$
   $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$

   (h) $x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 21$
   $5x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 21$
   $5x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 21$
   $5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 + 5x_5 = 21$
   $5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 + x_5 = 21$

(i) $4x_1 + 8x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 4x_5 = 9$
$2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 15$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4$
$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 10$

(j) $2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_3 = 1$
$4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -3$
$3x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 4$
$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

4. Riešte systémy v poli $\mathbb{C}$.

(a) $x_1 - 2x_2 = -1 + 3i$
$(1-i)\,x_1 + x_2 = 3 - i$

(b) $ix_1 + (3+i)\,x_2 - ix_3 = 1$
$3x_1 + (-1+i)\,x_2 + 3x_3 = 2 - i$
$x_1 - 2ix_2 + x_3 = i$

5. Nájdite lineárny systém, všetky riešenia ktorého sú

(a) $(-1, 2+s, s-2t, t)\,, s,t \in \mathbb{R}$

(b) $\left(1+s, s, 1, -\frac{7}{4}\right), s \in \mathbb{R}$

6. Nech lineárny systém má rozšírenú maticu v tvare $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & \alpha & 3 \end{array}\right)$. Pre ktoré hodnoty parametra α má systém jediné riešenie?

7. Nájdite všetky riešenia systému s parametrom α.

(a) $x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1$
$x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1$
$\alpha x_1 + x_2 + x_3 = 1$

(b) $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 43$
$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$
$6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7$
$8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \alpha x_4 = 9$

Výsledky

1. Matice v časti *c), e), f)* sú v redukovanom stupňovitom tvare, matice v *c), e)* sú v redukovanom stupňovitom tvare.

2. (a) $(t, 2, 3)\,, t \in \mathbb{R}$
(b) $(2+4t, 1+2t, 5+3t, -t)\,, t \in \mathbb{R}$
(c) nemá riešenie

3. (a) $(1+t, 2t)\,, t \in \mathbb{R}$
(b) $\left(\frac{20}{13} - 4t, -\frac{28}{13} + 3t, -\frac{45}{13} + 9t, 13t\right), t \in \mathbb{R}$
(c) $(1, -2, 0)$
(d) $(-7.6, 2.9, 9, 1.6)$
(e) $(1-18t, 3+2t, -2+11t)\,, t \in \mathbb{R}$
(f) nemá riešenie
(g) $\left(-\frac{6}{7} + 8s, \frac{1}{7} - 13s, \frac{15}{7} - 6s, 7s\right), s \in \mathbb{R}$
(h) $(1, 1, 1, 1, 1,)$
(i) $(s, t, -4.5 - s - 2t, -12.5 - 2s - 4t, -7.5 - 2s - 4t)$, $s, r \in \mathbb{R}$
(j) nemá riešenie

4. (a) $(1+i, 1-i)$

5. (a) $x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 1$
$x_2 - x_3 - 2x_4 = 2$
(b) $x_1 - x_2 = 1$
$x_1 - x_2 + x_3 = 2$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{4}$

6. $\alpha = -2$

7. (a) Pre $\alpha \neq 1, -2$ jedno riešenie $\frac{1}{\alpha+2}\,(1,1,1)$ pre $\alpha = 1$ je $(1-s-t, s, t)\,, s,t \in \mathbb{R}$ pre $\alpha = 2$ nemá riešenie
(b) pre $a = 8$ je $(s, 2t, -1, 2-s-3t)\,, s,t \in \mathbb{R}$ pre $a \neq 8$ je $\left(3s + \frac{4}{3} - 2s, -1, 0\right), s \in \mathbb{R}$

5 Operácie s maticami

5.1 Zadania

1. Sú dané matice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = (-1, 0, 2)$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = (1, 0, -2, 4)$,

$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$N = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Vypočítajte nasledovné matice:

(a) $2D - 5L$, (b) $A = 3F$ (c) $E^\top$, (d) $C^\top$, (e) $2H + 4G^\top$, (f) AC, (g) EJ, (h) JE, (i) HF, (j) N^2, (k) N^8.

2. Nájdite všetky

   (a) horné trojuholníkové matice

   (b) dolné trojuholníkové matice

   (c) symetrické matice

   (d) diagonálne matice

   medzi maticami z úlohy 1. Číslo α je reálny parameter

3. Napíšte nasledovné systémy ako maticové systémy

   (a) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$
   $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3$
   $7x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 2$

   (b) $2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1$
   $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 9x_5 = 4$

   (c) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$
   $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 4$
   $4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 1$
   $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1$
   $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 4$

4. Nech $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Vypočítajte A^2, A^3, A^n pre ľubovoľné $n > 3$.
   Návod: Reprezentujte A pomocou vhodnej matice otočenia.

5. Nájdite nenulové matice A, B typu 2×2 také, že $AB = 0$

6. Nájdite nenulové matice A, B, C také, že $AB = AC$ a $B \neq C$

7. Je súčin symetrických matíc opäť symetrická matica?

8. Nech A je matica typu $m \times n$

   (a) Vysvetlite, prečo sú súčiny $A^\top A$, $AA^\top$ definované

   (b) Sú matice $A^\top A$, $AA^\top$ symetrické? Overte alebo nájdite kontrapríklad.

Výsledky

1. (a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 39 \end{pmatrix}$

   (b) nedefin.

   (c) $(1, -3, 0, 7)$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 8 & 12 & -8 & 0 \end{pmatrix}$

   (f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -14 & 28 \end{pmatrix}$

   (h) (29)

   (i) nedefinované

   (j) $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$

   (k) $\begin{pmatrix} \cos 8\alpha & -\sin 8\alpha \\ \sin 8\alpha & \cos 8\alpha \end{pmatrix}$

2. (a) $B, C, G, H, J, K, L, M, N$ pre $\alpha = k\pi$, k je celé číslo

   (b) A, E, N for $\alpha = k\pi$, k je celé číslo

   (c) D, L, N for $\alpha = k\pi$, k je celé číslo

   (d) N for $\alpha = k\pi$, k je celé číslo

3. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $A = A^2 = A^3 = \ldots$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6 Inverzná matica

6.1 Zadania

1. Nájdite maticu E tak, aby platilo $EA = B$

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,
   $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,
   $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Nájdite maticu E tak, aby platilo $AE = B$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

3. Nájdite inverzné matice k nasledujúcim maticiam

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Riešte maticové rovnice

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(f) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(g) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

5. Dokážte, že ak A je regulárna, tak $A^\top$ je regulárna a platí: $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$

6. Popíšte spôsob ako sa nájde inverzná matica k regulárnej diagonálnej matici stupňa n.

7. Nech V je horná trojuholníková matica stupňa n s nenulovými diagonálnymi elementami. Dokážte, že

   (a) V je regulárna

   (b) V^{-1} je horná trojuholníková

Výsledky

1. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) matica nie je regulárna

(d) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(e) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. (a) $\begin{pmatrix} 14 & 24 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}$

(c) nemá riešenie

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

7 Determinanty

7.1 Zadania

1. Vypočítajte nasledujúce determinanty.

   (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

   (b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$

   (c) $\begin{vmatrix} 2+i & 2 \\ 5 & 5-i \end{vmatrix}$

   (d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

   (e) $\begin{vmatrix} a-2 & a+2 \\ b-2 & b+2 \end{vmatrix}$

   (f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$

2. Pomocou determinantu vypočítajte plochu rovnobežníka ABCD, ak

   (a) $A=(0,0)$, $B=(4,1)$, $C=(2,5)$, $D=(6,6)$

   (b) $A=(0,0)$, $B=(4,-2)$, $C=(1,6)$, $D=(5,4)$

3. Pre maticu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Vypočítajte hodnoty $|M_{31}|$, $|M_{32}|$, $|M_{33}|$

   (b) Vypočítajte hodnoty A_{31}, A_{32}, A_{33}

   (c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte $|A|$
   VYSVETLENIE K OZNAČENIU: Nech A je matica stupňa n. Potom M_{ij} je matica stupňa $n-1$, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca. $|M_{ij}|$ je determinant tejto matice — nazýva sa minor prvku a_{ij}. Číslo $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ sa nazýva algebraický doplnok (kofaktor) prvku a_{ij}.

4. Je daná matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Vypočítajte hodnoty $|M_{31}|$, $|M_{32}|$, $|M_{33}|$

(b) Vypočítajte hodnoty A_{31}, A_{32}, A_{33}

(c) Pomocou výsledkov z častí a), b) vypočítajte $|A|$

(d) Bez počítania určte hodnotu determinantu.

i. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(e) Použitím Sarusovho pravidla alebo rozvojom podľa riadku alebo stĺpca vypočítajte determinant. V časti e) použite $\tau = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

i. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

iv. $\begin{vmatrix} 1 & \tau & \tau^2 \\ \tau^2 & 1 & \tau \\ \tau & \tau^2 & 1 \end{vmatrix}$

v. $\begin{vmatrix} \tau^2 & 1 & \tau \\ 1 & \tau^2 & 1 \\ 1 & \tau & 1 \end{vmatrix}$

(f) Rozvojom podľa riadku alebo stĺpca vypočítajte

i. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

ii. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

iii. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

iv. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

(g) Platí $|A+B| = |A| + |B|$? Svoju odpoveď zdôvodnite

Výsledky

1. (a) -4
   (b) 0
   (c) $1+3i$
   (d) $4(a-b)$
   (e) $4(a-b)$
   (f) 1
2. (a) 18
   (b) 12
3. (a) $11, 1, -4$
   (b) $11, -1, -4$
   (c) -3
4. (a) $32, 8, -8$
   (b) $32, -8, -8$
   (c) -120
5. (a) 0
   (b) 0
   (c) -25
6. (a) 0
   (b) 0
   (c) 0
   (d) 0
   (e) -3
7. (a) 2
   (b) -20
   (c) $-8, 0$
8. Nie vo všeobecnosti, napr. neplatí pre $A = I_{2,} B = -I_2$

8 Výpočet determinantov

8.1 Zadania

1. Bez počítania určte hodnotu determinantu

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Overte identitu bez vypočítania determinantov na pravej a ľavej strane rovnosti

(a) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a_1+b_1t & a_2+b_2t & a_3+b_3t \\ a_1t+b_1 & a_2t+b_2 & a_3t+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \left(1-t^2\right) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

3. Vypočítajte determinanty

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 5 & -1 & 5 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

4. Vypočítajte determinanty matíc stupňa $n, n > 1$

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ . & . & . & \dots & . & . & n \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

5. Nech A je matica stupňa n, α je skalár. Ukážte, že

$$|\alpha A| = \alpha^n |A|$$

6. Nech A je regulárna matica. Ukážte, že

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

7. Nech A, B sú matice stupňa 3, $|A| = 5, |B| = 2$. Nájdite hodnotu

   (a) $|AB|$
   (b) $|7A|$
   (c) $\left|A^{-1}B\right|$
   (d) $\left|3A^2B^{-1}\right|$
   (e) $\left|2A^{-1}B^{-1}\right|$

Výsledky

1. (a) 5
   (b) -15
   (c) 1
2. ...
3. (a) 0
   (b) $(ad-bc)^2$
   (c) -48
   (d) -2
   (e) 19×6^4
4. (a) $(2n-1)(n-1)^{n-1}$
   (b) ...
   (c) $(-1)^{n-1} n, \dots \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$
7. (a) 10
   (b) 5×7^3
   (c) $\frac{2}{5}$
   (d) $\frac{3 \times 5^2}{2}$
   (e) $\frac{1}{5}$

9 Cramerovo pravidlo

9.1 Zadania

1. Použite determinanty na nájdenie inverznej matice

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Cramerovým pravidlom riešte systémy

(a) $2x_1 + x_2 = -3$
$3x_1 + 8x_2 = 2$

(b) $3x_1 + 2x_2 = 4$
$2x_1 + 3x_2 = 5$

(c) $x_1 + x_2 = 1$
$2x_1 - 3x_2 = 5i - 3$

(d) $4x_1 + 5x_2 = 2$
$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$
$11x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

(e) $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$
$-2x_1 - x_2 + x_3 = 2$
$x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -4$

(f) $x_1 + x_2 = 0$
$x_2 + x_3 - 2x_4 = 1$
$x_1 + 2x_3 + x_4 = 0$
$x_1 + x_2 + x_4 = 0$

(g) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$
$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$
$x_3 + 2x_4 = 1$
$x_4 = 0$

Výsledky

1. (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -3 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. (a) $(-2,1)^T$

(b) $(0,2)^T$

(c) $(i, 1-i)^T$

(d) $\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}, -\frac{1}{11}\right)^T$

(e) $\left(\frac{26}{11}, \frac{25}{11}, \frac{5}{7}\right)^T$

(f) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$

(g) $(1,-2,1,0)^T$

10 VEKTORY V ROVINE A V PRIESTORE

10.1 Zadania

1. Nájdite súradnice vektora s poč. bodom A a koncovým bodom B.

a) $A = (1,2), B = (-1,3)$

b) $A = (-1,2,0), B = (2,1,3)$

2. Nájdite koncový bod vektora u umiestneného v bode A.

a) $u = (-2,5), A = (-3,1)$

b) $u = (-1.2,0), A = (1,2,3)$

3. Nech $u = (1,2,-3)$, $v = (0,-1,5)$, $w = (3,1,1)$. Nájdite súradnice vektorov

a) $2u + v - w$

b) $-u + 3v$

c) $u + 3v + 5w$

4. Nech $A = (1,2,3)$ a $B = (3,2,1)$. Nájdite bod C na úsečke AB tak, že $d(A,C) : d(C,B)$ je

a) 1:1

b) 1:2

c) 2:3

5. Predpokladajte, že xyz-súradnicový systém je posunutý do $x'y'z'$- súradnicového systému, počiatok O' ktorého má xyz-súradnice (-1, 0, 2).

a) Nájdite $x'y'z'$-súradnice bodu A, ktorého xyz-súradnice sú (0, 3, 5).

b) Nájdite xyz-súradnice bodu B, ktorého $x'y'z'$-súradnice sú (1, -4, 3).

6. Vypočítajte normu vektora u.

a) $u = (0,0)$

b) $u = (3,4)$

c) $u = (1,2,2)$

d) $u = (1,-1,1)$

e) $u = (5,12,0)$

7. Vypočítajte vzdialenosť bodov A a B.

a) $A = (1,2), B = (4,6)$

b) $A = (8,2,1), B = (5,5,-1)$

8. Nech u je nenulový vektor. Vypočítajte normu vektora $\frac{u}{||u||}$.

9. Nájdite vektor dĺžky 1, ktorý má rovnaký smer ako vektor u = (1,1,1).

10. Nech $A = (a_1, a_2, a_3)$. Popíšte množinu všetkých bodov $X = (x_1, x_2, x_3)$ takých, že $||(A - X)|| = 1$.
11. Nech ABC je trojuholník v rovine. Označte A', B', a C' stredy úsečiek BC, CA a AB. Dokážte, že

$$(A' - A) + (B' - B) + (C' - C) = 0$$

10.2 Výsledky

1. a) (- 2, 1)
   b) (3, - 1, 3).
2. a) (- 5, 6)
   b) (0, 4, 3)
3. a) (- 1, 2, - 2)
   b) (- 1, - 5, 18)
   c) (1, 4, 17)
4. a) (2, 2, 2)
   b) 1/3 (5, 6, 7)
   c) 1/5 (9, 10, 11)
5. a) (1, 3, 3)
   b) (0, - 4, 5)
6. a) 0
   b) 5
   c) 3
   d) $\sqrt{3}$
   e) 13
7. a) 5
   b) $\sqrt{r22}$
8. 1.
9. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$
10. Sféra so stredom v A aa polomerom $r = 1$.

11 SÚČINY VEKTOROV

11.1 Zadania

1. Nájdite $u.v$, ak
   a) $u = (2, 2), v = (-5, 5)$
   b) $u = (1, 2), v = (3, 1)$
   c) $u = (1, 0, -1), v = (2, 2, 2)$
   d) $u = (3, 1, 2), v = (3, 2, -5)$
2. Vypočítajte uhly vektorov u, v z cvičenia 1.
3. Zistite, či uhol medzi vektormi u a v je ostrý, pravý alebo tupý.
   a) $u = (2, 0, -1), v = (3, 2, 5)$
   b) $u = (-2, 3, -2), v = (5, 0, -5)$
   c) $u = (4, 1, -1), v = (-3, 2, 5)$
4. Nájdite ortogonálnu projekciu vektora u do smeru vektora v a nájdite zložku kolmú na v.
   a) $u = (3, -5, 2), v = (-3, 0, 4)$
   b) $u = (-1, 2, 1), v = (2, 2, 1)$
5. Nájdite všetky vektory dĺžky 1 v rovine, ktoré sú kolmé na vektor (1, 2).
6. Vysvetlite, prečo nemá žiadny z nasledujúcich výrazov zmysel(u a v sú vektory, α je skalár).
   a) $(u.v).w$
   b) $u.v + uxv$
   c) $u.v + w$
   d) $||u.v||$
   e) $\alpha \times u$
7. Ukážte, že $A = (2, -1, 1)$, $B = (3, 2, -1)$ a $C = (7, 0, -2)$ sú vrcholy pravoúhleho trojuholníka. Pri ktorom bode je pravý uhol ?
8. Predpokladajme, že $u.w = v.w$ a $w \neq 0$. Vyplýva z toho, že $u = v$?
9. Nech u a v sú vektory v rovine alebo v priestore. Overte platnosť identít:
   a) $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$
   b) $u.v = \frac{1}{4}(||u + v|| - ||u - v||)$
10. Vypočítajte $u \times v$.
    a) $u = (1, -2, -1), v = (0, 1, 1)$
    b) $u = (-2, 1, 3), v = (4, -2, -6)$
11. Nájdite vektor dĺžky 1 kolmý aj na u aj na v.
    a) $u = (1, 1, -1), v = (0, 3, 1)$
    b) $u = (2, 1, 0), v = (0, 1, 2)$
12. Nájdite obsah trojuholníka ABC.
    a) $A = (2, 0, 1), B = (3, -1, 2), C = (-3, 4, 2)$
    b) $A = (1, 3, 2), B = (5, 3, 1), C = (-3, 1, 2)$
13. čo je chybné na výraze $u \times v \times w$ (u, v, w sú vektory) ?
14. Nájdite objem rovnobežnostena vytvoreného vektormi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.
    a) $A = (-2, 3, 1), B = (1, -2, 3), C = (2, 1, 0), D = (3, 2, 1)$
    b) $A = (-1, 4, 2), B = (2, 3, 4), C = (0, 4, 2), D = (3, 6, 3)$

15. Vypočítajte $||a \times b||$, ak

    a) $||a|| = 3, ||b|| = 2$ a uhol medzi a a b je 60

    b) $||a|| = 5, ||b|| = 8$ a $a.b = 24$

16. Vypočítajte $||(3a + b) \times (a - 3b)||$, ak

    a) $||a|| = 3, ||b|| = 5$ a uhol medzi a a b je 30

    b) $||a|| = 2, ||b|| = 3$ a $a.b = -3\sqrt{3}$

11.2 Výsledky

1. a) 0
   b) 5
   c) 0
   d) 1

2. a) 90q
   b) 45q
   c) 90q
   d) $\arccos \frac{1}{4.7.9}$

3. a) Ostrý uhol
   b) pravý uhol
   c) tupý uhol

4. a) $\frac{1}{25}(-3, 0, 4), (3, -5, 2) - \frac{1}{25}(-3, 0, 4)$
   b) $\frac{1}{3}(2, 2, 1), (-1, 2, 1) - \frac{1}{3}(2, 2, 1)$

5. a) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$

6.

7. At B.

8. Napríklad, pre $u = (1, 1)$, $v = (2, 2)$, $w = (-1, 1)$ je $u.w = v.w$, ale $u \neq v$.

9.

10. a) (- 1, - 1, 1),
    b) 0

11. a) $\frac{\pm 1}{\sqrt{26}}(4, -1, 3)$
    b) $\frac{\pm 1}{\sqrt{24}}(2, -4, 2)$

12. a) $\frac{\sqrt{26}}{2}$
    b) $\sqrt{21}$

13. Chýbajú zátvorky.

14. a) 34
    b) 5

15. a) $3\sqrt{3}$
    b) 32

16. a) 75
    b) 30

12 PRIAMKY A ROVINY V PRIESTORE

12.1 Zadania

1. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny s normálovým vektorom n, ktorá prechádza bodom P.

   a) $P = (1, 2, 3), n = (2, -3, 1)$

   b) $P = (-2, 3, 5), n = (3, 7, -2)$

2.

3. Napíšte parametrické rovnice rovín z cvičenia 1.

4. Nájdite všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcu cez body A, B, C.

   a) $A = (1, 0, -1), B = (0, 2, 3), C = (-2, 1, 1)$

   b) $A = (-1, 3, 2), b = (2, 1, -1), C = (3, 2, 1)$

5. Rozhodnite, či roviny sú rovnobežné.

   a) $2x - y + 3z + 3 = 0, -4x + 2y + 9z + 1 = 0$

   b) $-x + 3y + 2z + 1 = 0, 2x - 6y - 4z + 5 = 0$

6. Rozhodnite, či priamka a rovina sú rovnobežné.

   a) $x = 1+2t, y = 3-t, z = -1-4t; 3x+2y+5z-7 = 0$

   b) $x = t, y = 2t, z = 2t; 2x + 4y - 5z + 3 = 0$

7. Rozhodnite, či sú priamka a rovina kolmé.

   a) $x = 1+2t, y = 3-t, z = -1-4t; -4x+2y+8z+3 = 0$

   b) $x = 4+3t, y = 1-2t, z = -1+4t; x-5y+2z-7 = 0$

8. Nájdite parametrické rovnice priamky, ktorá je priesečnicou rovín

   a) $-2x + 3y + 7z + 2 = 0, x + 2y - 3z + 5 = 0$

   b) $3x - 5y + 2z = 0, x + z = 0$

9. Nájdite rovnice dvoch rovín, ktorých priesečnicou je daná priamka

   a) $x = 3 + 4t, y = -7 + 2t, z = 6 - t$

   b) $x = 5t, y = 3t, z = 6t$

10. Nájdite rovnicu roviny prechadzajúcej cez bod (- 1, 4, - 3), torá je kolmá na priamku $x = 2 + t$, $y = -3 + 2t$, $z = -t$.

11. Nájdite rovnicu roviny prechadzajúcej cez bod (- 1, 2, 4), ktorá je rovnobežná s

    a) xy-rovinou

    b) xz-rovinou

    c) yz-rovinou

    d) $x + y + z + 1 = 0$

12. Nájdite rovnicu roviny, prechádzajúcej cez bod (- 1, 4, 2), ktorá obsahuje priesečnicu rovín $4x - y + z - 2 = 0a2x + +y - 2z - 3 = 0$.

13. Dokážte, že body (1, 0, - 1), (5, 10, -3), (0, 1, 3), (0, 0, 2) ležia v jednej rovine. Nájdite všeobecnú rovnicu tejto roviny.

14. Nájdite parametrické rovnice priamky prechádzajúcej cez bod (5, 0, -2), ktorá je rovnobežná s rovinami $x - 4y + 2z = 0$ a $2x + 3y - z + 1 = 0$.

15. Nájdite rovnicu roviny prechádzajúcej cez (1, 2, -1), ktorá je kolmá na priesečnicu rovín $2x + y + z = 2$, $x + 2y + z = 3$.

16. Ukážte, že priamky $x = -2 + t$, $y = 3 + 2t$, $z = 4 - t$ a $x = 3 - t$, $y = 4 - 2t$, $z = t$ sú rovnobežné a nájdite všeobecnú rovnicu roviny, ktorú určujú.

17. Nájdite rovnicu roviny, ktorá obsahuje bod (2, 0, 3) a priamku $x = -1 + t$, $y = t$, $z = -4 + 2t$.

18. Nájdite rovnicu roviny, ktorá je rovinou súmernosti bodov (2, - 1, 1) a (3, 1, 5).

19. Nájdite rovnicu roviny, ktorá obsahuje priamku $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2t$ a je rovnobežná s priesečnicou rovín $2x - y + z = 0$ a $y + z + 1 = 0$.

20. Nájdite priesečník priamok $x = -1 + +4t$, $y = 3 + t$, $z = 1$ a $x = -13 + 12t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2 + 3t$.

21.

22. Bez použitia vzorca nájdite vzdialenosť bodu od priamky.

    a) $(2, 1, 3), x = 1 + t, y = -3 + 2t, z = -t$
    b) $(3, -1, 0), x = 2 + 3t, y = -1 + t, z = 1 - t$

23. Bez použitia vzorca nájdite vzdialenosť medzi bodom a rovinou

    a) $(1, -2, 3), 2x - 2y + 4 = 4$
    b) $(0, 1, 5), 3x + 6y - 2z - 5 = 0$

24. Nájdite vzdialenosť medzi dvoma rovnobežnými rovinami.

    a) $2x - 3y + 4z = 7, 4x - 6y + 8z = 3$
    b) $-2x + y + z = 0, 6x - 3y - 3z - 5 = 0$

25. Nájdite body A, B tak, že sú splnené podmienky a) - d).

    a) Úsečka AB je kolmá na rovinu $x - y - z = 0$
    b) Body A, B sú symetrické vzhľadom na rovinu z a)
    c) Dĺžka AB je 4.
    d) Stred úsečky AB je počiatok súradnicovej sústavy.

26. Nájdite bod Q symetrický s bodom $P = (9, -6, 6)$ vzhľadom na rovinu $2x - y + z - 12 = 0$.

27. Nech $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 0, 3)$. Nájdite rovinu kolmú na priamku $p : x + y + z + 1 = 0$, $x - y + 2z - 1 = 0$, prechádzajúcu cez bod X ležiaci na úsečke AB tak, že $||\vec{AX}|| == 2||\vec{BX}||$.

28.

29. Nájdite priamku kolmú na rovinu $x = 1 + u, y = t, z = 1 + u + t, u, t \in R$, prechádzajúcu bodom $A = (0, 1, 2)$.

30. Nájdite parametrické rovnice priamky, ktorá je rovnobežná s priamkou $x + y + z = 1, y - y + 2z = 2$ a prechádza cez bod $A = (1, 2, 3)$.

31.

32. Nájdite bod Q súmerný s bodom $P = (3, -4, 1)$ vzhľadom na priamku $x = -7 + 4t, y = -4 + 3t, z = 7 - t$.

33. Nájdite rovinu súmernosti úsečky AB, ak $A = (3, 3, 1), B = (-1, -2, -3)$.

12.2 Výsledky

1. a) $2x - 3y + z + 1 = 0$
   b) $3x + 7y - 2z - 5 = 0$

2.

3. a) $x = 3s - t, y = s, z = -1 + t$
   b) $x = 1 - 7s + 2t, y = 3s, z = -1 + 3t$

4. a) $2y - z - 1 = 0$
   b) $x + 9y - 5z - 16 = 0$

5. a) Nie rovnobežné
   b) rovnobežné

6. a) Nie rovnobežné
   b) rovnobežné

7. a) Kolmé
   b) nie kolmé

8. a) $x = -\frac{11}{7} + 23t, y = -\frac{12}{7} - t, z = 7t$
   b) $x = -5t, y = -t, z = 5t$

9. Nekonečne veľa riešení. Napríklad:

   a) $x - 2y - 17 = 0, y + 2z - 5 = 0$
   b) $3x - 5y = 0, 2y - z = 0$

10. $x + 2y - z = 10$

11. a) $z - 4 = 0$
    b) $y - 2 = 0$

c) $x+1=0$

d) $x+y+z-5=0$

12. $4x-13y+21z+14=0$

13. $3x-y+z-2=0$

14. $x=5-2z, y=5t, z=-2+11t$

15. $x+y-3z-6=0$

16. $7x+y+9z-25=0$

17. $7x-y-3z-5=0$

18. $2x+4y+8z-29=0$

19. $3x-5y-2z+5=0$

20. (- 17, - 1, 1).

21.

22. a) $2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{\frac{6}{11}}$

23. a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{9}{7}$

24. a) $\frac{11}{\sqrt{116}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{54}}$

25. $A=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}), B=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

26. $Q=(-3,0,0)$

27. $3x+y+2z-12=0$

28.

29. $x=t, y=1+t, z=2-t, t\in R$

30. $x=1-3t, y=2+t, z=3+2t, t\in R$

31.

32. $Q=(-1,5,6)$

33. $4x+5y+4z+2,5=0$

13 KVADRATICKÉ PLOCHY

13.1 Zadania

1. Popíšte rezy kvadratickej plochy rovinami rovnobežnými so súradnicovými rovinami. Na základe toho určte typ kvadratickej plochy.

   a) $x^2-y^2-2z^2+4=0$

   b) $y^2-z^2+2x+2y+2z-2=0$

   c) $x^2-y^2-2z^2-2y+4z-3=0$

2. Pomocou posunutia súradnicového systému nájdite typ kvadratickej plochy.

   a) $2x^2+2y^2+2z^2-4x+4y+8z+9=0$

   b) $-x^2+y^2-4z^2-4x-2y-8z-5=0$

   c) $4x^2-2y^2+z^2+8x+4y+6z+7=0$

   d) $9y^2-4z^2+18y-16z-43=0$

   e) $3x^2-4z^2-12x-16z-4=0$

   f) $4x^2+9y^2+z^2+16x-18y-4z+28=0$

   g) $x^2+4z^2+2x+8y-8z+5=0$

   h) $2x^2-y^2+12x+4z+18=0$

   i) $4x^2+y^2-4z^2-8x+2y+8z+5=0$

   j) $y^2+4z^2+2y-8z+1=0$

3. Zistite, či kvadratická plocha je stredová. Ak je, nájdite jej stred.

   a) $x^2+2y^2+13z^2-2xy+4xz+2yz-x+6y-2z-10=0$

   b) $14x^2+28y^2+32z^2+14xy-42xz-14yz+56y=0$

   c) $x^2+2y^2+9z^2+4xy-6xz+2yz+6x-6y-4z+2=0$

   d) $2x^2-3z^2+2xz+4yz+4x-16y+22z-1=0$

   e) $x^2+4y^2+4xy-2xz-4yz+6x+12y=0$

13.2 Výsledky

1. a)
   * $x=k$:
     elipsa $\frac{y^2}{k^2+4}+\frac{z^2}{\frac{k^2+4}{4}}=1$
   * $y=k$:
     pre $k=2$ dve priamky $(x-\sqrt{2}z=0, y=k)$,$(x-\sqrt{2}z=0, y=k)$
     pre $|k|>2$ hyperbola $\frac{y^2}{4-k^2}+\frac{z^2}{\frac{4-k^2}{4}}=1$
     pre $|k|<2$ hyperbola $\frac{y^2}{4-k^2}+\frac{z^2}{\frac{4-k^2}{4}}=1$
   * $z=k$:
     pre $k=\sqrt{2}$ dve priamky $(x-y=0, z=k)$, $(x+y=0, z=k)$
     pre $|k|>>\sqrt{2}$ hyperbola $\frac{y^2}{2k^2-4}+\frac{z^2}{2k^2-4}=1$
     pre $|k|<<\sqrt{2}$ hyperbola $\frac{y^2}{4-2k^2}+\frac{z^2}{4-2k^2}=1$.
     Kvadratická plocha je jednodielny hyperboloid.

   b)
   * $x=k$:
     pre $k=1$ dve roviny $y-z+2=0, y+z=0$
     pre $k\neq 1$ hyperbola $(y+1)^2-(z-1)^2=2-2k$
   * $y=k$:
     parabola $2x=(z-1)^2-(k+1)^2+2$
   * $z=k$:
     parabola $2x=2+(k-1)^2-(y+1)^2$.
     Kvadratická plocha je hyperbolický paraboloid.

   c)
   * $x=k$:
     pre $k=0$ bod (0, - 1, 1)
     pre $k\neq 0$ elipsa $(y+1)^2+2(z-1)^2=k$

* $y = k$:
  pre $k = -1$ dve rôznobežné priamky $x - \sqrt{2}z + \sqrt{2} = 0, x + \sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0$
  pre $k \neq -1$ hyperbola $x^2 - 2(z-1)^2 = (k+1)^2$
* z = k:
  pre $k = 1$ dve rôznobežné priamky $x - y - 1 = 0, x + y + 1 = 0$
  pre $k \neq 1$ hyperbola $x^2 - (y+1)^2 = 2(k-1)^2$
  .
  Kvadratická plocha je eliptická kužeľová plocha.

2. a) Sféra,
   b) eliptická kužeľová plocha,
   c) jednodielny hyperboloid,
   d) hyperbolická válcová plocha,
   e) dvojica rôznobežných rovín,
   f) elipsoid,
   g) eliptický paraboloid,
   h) hyperbolický paraboloid,
   i) dvojdielny hyperboloid,
   j) eliptická válcová plocha.

3. a) (1, - 1, 0),
   b) nestredová kvadratická plocha,
   c) (2, - 1, 1)
   d) (- 3, 2, 4).

14 LINEÁRNE PRIESTORY

14.1 Zadania

1. Overte vlastnosti z definície LP pre $(R^2, +, .)$.

2. Nech L je množina usporiadaných dvojíc reálnych čísel, na ktorej je definovaná operácia sčítania

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

   a operácia skalárneho násobenia

$$\alpha.(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

   Je L lineárny priestor vzhľadom na tieto operácie? Odôvodnite.

3. Zadanie ako v cvičení 2.

$$(x_1, x_1) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

$$\alpha.(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

   Je L lineárny priestor vzhľadom na tieto operácie? Odôvodnite.

4. Nech $P_n(R)$ je množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami stupňa menšieho alebo rovného n. Ukážte, že $(P_n(R), +, .)$ je lineárny priestor nad poľom $\mathbb{R}$.

5. Nech $R[a, b]$ je množina všetkých reálnych funkcií definovaných na uzavretom intervale $< a, b >$. Súčet funkcií je definovaný predpisom $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, skalárny násobok funkcie predpisom $(\alpha.f)(x) = \alpha f(x)$. Je $(R[a, b], +, .)$ lineárny priestor nad $\mathbb{R}$?

6.

7. Rozhodnite, či je lineárny priestor množina S všetkých
   a) (nekonečných) postupností
   b) konštantných postupností
   c) konvergentných postupností
   d) divergentných postupností

   reálnych čísel spolu s operáciami

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\alpha.\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

8. Rozhodnite, či nasl. podmnožiny R^2 sú podpriestory $(R^2, +, .)$.
   a) $\{(x_1, x_2); x_1 + 2x_2 = 0\}$
   c) $\{(x_1, x_2); x_1 + x_2 = 1\}$
   b) $\{(x_1, x_2); x_1 x_2 \geq 0\}$
   d) $\{(x, x); x \geq 0\}$

9. Rozhodnite, či nasl. podmnožiny R^3 sú podpriestory $(R^3, +, .)$.
   a) $\{(x_1, x_2, x_3); 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$
   b) $\{(x_1, x_2, x_3); x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
   c) $\{(x_1, x_2, x_3); 2x_1 = x_2 = -x_3\}$
   d) $\{(x_1, x_2, x_3); x_1 x_2 \geq 0\}$

10. Rozhodnite, či nasledovné podmnožiny omnožiny $M_2(R)$ sú podpriestory LP $(M_2(R), +, .)$ (priestor matíc stupňa 2 s reálnymi koeficientami).
    a) Množina dolných trojuholníkových matíc.
    b) Množina matíc A spĺňajúcich podmienku $a_{11} + a_{22} = 0$.
    c) Množina všetkých symetrických matíc.
    d) Množina všetkých singulárnych matíc.

11. Rozhodnite, či nasledujúce podmnožiny množiny P(R) sú podpriestory LP $(P(R), +, .)$. $P(R)$ - množina všetkých polynómov s reálnymi koeficientami.

a) Množina všetkých polynómov $p(x)$ takých, že $p(0) = 1$.

b) Množina všetkých polynómov $p(x)$ takých, že $p(0) = p(1) = 0$.

c) Množina všetkých polynómov stupňa 2 a nulový polynóm.

d) Množina všetkých polynómov ktorých 3. derivácia je 0.

12. Rozhodnite, či nasledujúce podmnožiny $C[a, b]$ sú podpriestory LP $(C[a, b], +, .)$. $C[a, b]$ označuje množinu všetkých spojitých reálnych funkcií definovaných na uzavretom intervale $< a, b >$.

    a) Množina všetkých párnych funkcií.

    b) Množina všetkých nepárnych funkcií.

    c) Množina všetkých funkcií f pre ktoré platí $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$.

    d) Množina všetkých funkcií f pre ktoré platí $f(0) = f'(0) = 0$.

13. Zistite, či množina všetkých riešení diferenciálnej rovnice tvorí podpriestor LP $(C(-\infty, \infty), +, .)$.

    a) $y'' - y = 0$

    b) $y'' + y = e$

    c) $y'' - xy' - y = 0$

    d) $y'' + y' = x + 1$

14.2 Výsledky

1.
2. Nie je LP. Prečo ?
3. Nie je LP. Neexistuje neutrálny element pre operáciu $\oplus$.
4.
5. Áno.
6.
7. a), b), c) áno, d) nie.
8. a) Množina je podpriestor.
9. a), c) Množina je podpriestor.
10. a), b), c) Množina je podpriestor.
11. b), d) Množina je podpriestor.
12. a), b), d) Množina je podpriestor.
13. a), c) áno.

15 LINEARNÁ ZÁVISLOSŤ A NEZÁVISLOSŤ VEKTOROV

15.1 Zadania

1. Rozhodnite, či sú vektory lineárne závislé, alebo nezávislé.

    a) (- 2, 1), (4, - 2)

    b) (1, 5), (5, 1)

    c) (- 3, 5), (6, 10).

2. Rozhodnite, či sú vektory lineárne závislé alebo nezávislé v R^3.

    a) (- 3, 2, 1), (2, -1, 3), (1, 0, 7)

    b) (1, - 2, 3), (- 2, 4, - 6)

    c) (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)

    d) (1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)

    e) (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1).

3. Zistite, či sú polynómy lineárne závislé alebo nezávislé v $P(R)$.

    a) $1 + x, 1 - x$

    b) $1, 1 + x, 1 - x$

    c) $2 + x + 3x^2, -1 + 5x + x^2, 3 + 7x + 7x^2$

    d) $1, x, x^2, ..., x^n, n > 1$.

4. Zistite, či sú funkcie lineárne závislé alebo nezávislé v $C[-1, 1]$.

    a) 1, $sin(x)$, $cos(x)$ (1 je funkcia identicky rovnajúca sa 1)

    b) 1, $sin^2(x)$, $cos^2(x)$

    c) e^x , e^{-x}

    d) 1, e^x , e^{-x}.

5. Zistite, či sú matice lineárne závislé alebo nezávislé v $M_2(R)$.

    a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Nech vektory x, y a z sú lineárne nezávislé v lineárnom priestore L. Zistite, či sú lineárne závislé alebo nezávislé v L nasledujúce vektory:

    a) $x + y$, $x - y$, $x + y + z$

    b) $x - y$, $y - z$, $z - y$.

7. Sú dané funkcie $sin(x)$, $cos(x+\alpha)$ v lineárnom priestore $C[-\pi, \pi]$. Pre ktoré hodnoty π budú funkcie lineárne závislé ? Vysvetlite na obrázku.

8. Sú dané funkcie $5x$ a $|x|$:

   a) Ukázte, ze funkcie sú lineárne nezávislé v $C[-1, 1]$.
   b) Ukázte, ze funkcie sú lineárne závislé v $C[0, 1]$.

9. Rozhodnite, či u je z lineárneho obalu vektorov u , u a u .

   a) u = (1, 1, 1), u = (0, 1, 1), u = (1, 0, 1), u = (1, 1, 0),
   b) u = (1, 1, 1), u = (0, 1, 1), u = (1, 0, 1), u = (1, 1, 0).

10. Ktorý z nasledujúcich mnozín generuje R^3 ?

   a) (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6)
   b) (1, 1, 1), (0, 2, 2), (0, 0, 3)
   c) (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1).

11. Ktorý z nasledujúcich mnozín generuje $P_2(R)$?

   a) $\{2x - 1, 1 + x, 2 - 3x\}$
   b) $\{1 + x + x, 1 - x + x, 2 + 2x\}$
   c) $\{1 - x, 1 - x - x, x + x\}$.

Výsledky

1. a) závislé
   b) nezávislé
   c) nezávislé.
2. a) závislé
   b) závislé
   c) nezávislé
   d) nezávislé
   e) závislé
3. a) nezávislé
   b) závislé
   c) závislé
   d) nezávislé
4. a) nezávislé
   b) závislé
   c) nezávislé
   d) nezávislé
5. a) závislé
   b) nezávislé.
6. a) nezávislé
   b) závislé
7. α je nepárny násobok $\pi/2$.
8.
9. a) $u \in Lo\{u, u, u\}$
   b) $u \notin Lo\{u, u, u\}$.
10. a) no
    b) yes
    c) yes
11. a) no
    b) no
    c) yes.

16 BÁZA A DIMENZIA

16.1 Zadania

1. Zistite, či mnozina vektorov je báza v R^2.

   a) (1, 2), (0, 1), (3, 2)
   b) (1, 0), (1, 1)
   c) (2, -1), (- 6, 3).

2. Zistite, či mnozina vektorov je báza v R^3.

   a) (1, 2, -1), (0, 1, - 2), (1, 0, 3)
   b) (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)
   c) (2, 1, - 3), (4, 2, 1), (0, 0, 2), (1, 1, 1).

3. Zistite, či mnozina polynómov je báza v $P_3(R)$.

   a) $1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3$
   b) $1, 1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2 + x^3$
   c) $1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1$

4. Nájdite bázu podpriestoru S lin. priestoru R^4 , ktorý pozostáva z vektorov v tvare $(a+b+c, a-b, b+c, b-c)$, kde $a, b, c \in R$. Vypočítajte $dimS$.

5. Nech S je podpriestor LP $P_3(R)$ pozostávajúci zo vsetkých polynómov v tvare $a+bx+(a+c)x^2+(b-c)x^3$. Nájdite bázu S a vypočítajte $dimS$.

6. Nájdite bázu a určte dimenziu podpriestoru S v R^3 .

   a) $\{(x_1, x_2, x_3); x_1 = x_2 = x_3\}$
   b) $\{(x_1, x_2, x_3); x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$
   c) $\{(x_1, x_2, x_3); x_1 = 2x_2 = 3x_3, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

7. Nájdite bázu a určte dimenziu podpriestoru S v $P_3(R)$.

   a) $p(x); p(0) = 0$
   b) $p(x); p(0) = p(1) = 0$

8. Nájdite bázu (=fundamentálny systém riesení) podpriestoru riesení diferenciálnej rovnice a určte dimenziu tohto podpriestoru.

   a) $y" - 7y' + 6y = 0$

b) $y" - y = 0$

c) $y" + y = 0$

d) $y^(3) + 6y" = 0$

e) $y^(3) + 3y" + 3y' + y = 0$.

9. Doplňte mnozinu M vektorov na bázu LP R^4 .

   a) $M = \{(1,-1,0,2),(0,2,1,3),(2,0,1,7)\}$

   b) $M = \{(-1,1,0,0),(0,-1,1,0),(0,0,-1,1)\}$.

10. Doplňte mnozinu $\{1-x, 1+x+x^2, x^2-x^3\}$ na bázu LP $P(R)$.

11. Nájdite bázu lineárneho obalu $\mathrm{Lo}(M_i)$ mnoziny M_i a určte dimenziu $\mathrm{Lo}(M_i)$.

    a) $M_1 = \{(1,3,0),(-5,1,0),(3,2,0),(0,0,0),(1,1,0)\}$

    b) $M_2 = \{(1,-2,2,0),(0,1,0,1),(1,-1,2,1),(1,0,2,2),(2,-1,4,3)\}$

    c) $M_3 = \{2x-1, x^3+x+1, x^2+x, 2x^2+1,\ x^3+3x^2+2x+2\}$

    d) $M_4 = \{1+x, 1-x, 1+x^2, 1-x^2, 1+x^3, 1-x^3\}$.

    v lineárnom priestore

    a) R^3

    b) R^4

    c) $P_3(R)$

    d) $P_3(R)$.

12. V LP $C[-\pi,\pi]$ nájdite dimenziu Lo $\{1, \cos 2x, \cos x\}$.

13. Nájdite súradnice vektora (polynómu) v báze B lineárneho priestoru L.

    a) $(2,1,1)$, $B = ((2,7,3),(3,9,4),(1,5,3)$, $L = R^3$

    b) $(0,0,2,7)$, $B = ((4,2,-1,-6),(3,1,1,-2),(1,2,1,1),(2,3,1,0)$, $L = R^4$

    c) $1+x+x^2+x^3$, $B = (1+x, x+x^2, x^2+x^3, x)$, $L = P_3(R)$

Výsledky

1. a) Vektory netvoria bázu.
   b) Vektory tvoria bázu.
   c) Vektory netvoria bázu.

2. a) Vektory netvoria bázu.
   b) Vektory tvoria bázu.
   c) Vektory netvoria bázu.

3. a) Vektory tvoria bázu. Vectors form a basis.
   b) Vektory netvoria bázu.
   c) Vektory netvoria bázu.

4. $\{(1,1,0,0),(1,-1,1,1),(1,0,1,-1)\}$, $\dim S = 3$.

5. $\{1+x^2, x+x^2, x^2-x^3\}$, $\dim S = 3$.

6. a) $\{(1,1,1)\}$, $\dim S = 1$
   b) $\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$, $\dim S = 2$.

7. a) $\{x, x^2, x^3\}$, $\dim S = 3$,
   b) $\{x-x^2, x-x^3\}$, $\dim S = 2$.

8. a) $\{e^{6x}, e\}$
   b) $\{e^x, e^{-x}\}$
   c) $\{\sin(x), \cos(x)\}$
   d) $\{1, x, e^{-6x}\}$
   e) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$.

9. a) M nemôže byť rozšírená na bázu, lebo vektory v M sú lineárne závislé
   b) Dá sa pridať (0, 0, 0, 1)

10. Môžeme pridať napr. polynóm x.

11. a) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $d = 2$
    b) $\{(1,-2,2,0),(0,1,0,1)\}$, $d = 2$
    c) $\{1+\frac{8}{3}x^3, x+\frac{1}{3}x^3, x^2-\frac{1}{3}x^3\}$, $d = 3$
    d) $\{1, x, x^2, x^3\}$, $d = 4$

12. 2.

13. a) $(-5,4,0)^T$
    b) $(11,-3,67,-51)^T$
    c) $(1,1,1,-2)^T$
    d) $(1,1,-1,-1,3,-4)^\top$.

17 HODNOSŤ MATICE

17.1 Zadania

1. Vypoçítajte hodnosť matice.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

2. V závislosti od parametrov α a β nájdite hodnosť matice A.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & -1 & 0 \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$

3. Pomocou Frobeniovej vety zistite, či sú systémy riešiteľné.

a) $\begin{array}{rrrl} x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 3 \\ 5x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 6 \\ 4x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 4 \end{array}$

b) $\begin{array}{rrrrl} x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & & +x_4 & = 1 \\ & -5x_2 & +4x_3 & -4x_4 & = 1 \end{array}$

4. Nájdite bázu a určte dimenziu riadkového a stĺpcového priestoru matice.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Výsledky

1. a) 2
   b) 4
   c) 2

2. a) h(A) = 2 pre $\alpha \neq 4$, h(A) = 1 pre $\alpha = 4$
   b) h(A) = 3 pre $\alpha \neq 1, -2$, h(A) = 2 pre $\alpha = -2$, h(A) = 1 pre $\alpha = 1$
   c) h(A) = 1 pre $\alpha = -\beta$, h(A) = 3 pre $\alpha \neq -\beta$

3. a) riešiteľný
   b) neriešiteľný

4. a) $B_R = \{(5,0,7),(0,5,-1)\}$
   $B_C = \left\{(1,3,5)^T,(2,1,5)^T\right\}$
   b) $B_R = \{(-5,0,19,10),(0,5,3,5)\}$
   $B_C = \left\{(-1,1,1)^T,(2,3,8)^T\right\}$
   c) $B_R = \{(7,0,0,16),(0,7,0,-11),(0,0,7,3)\}$
   $B_C = \left\{(1,2,2)^T,(1,2,1)^T,(3,-1,0)^T\right\}$

18 LINEÁRNE ZOBRAZENIA

18.1 Zadania

Poznámka: Pojmy **linearne zobrazenie** a **linearny operator** sa považujú za ekvivalentné. LP znamená lineárny priestor.

1. Ukážte, že každé z nasledujúcich zobrazení je lineárny operátor na R^2 . Geometricky interpretujte dané zobrazenia.
   a) $T(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$
   b) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$
   c) $T(x_1, x_2) = (0, x_2)$.

2. Zistite, či nasledujúce zobrazenia sú lineárne.
   a) $T(x_1, x_2) = (x_1.\cos\alpha - x_2.\sin\alpha, x_1.\sin\alpha + x_2.\cos\alpha), \alpha \in R$,
   b) $T(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha, x_2 + \beta)$, $\alpha, \beta \in R$ sú parametre.

   Geometricky interpretujte dané zobrazenia.

3. Zistite, či nasledujúce zobrazenia z R^n do R^m sú lineárne.
   a) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$
   b) $T(x_1, x_2) = (x_1, 1 + x_2)$
   c) $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$
   d) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$
   e) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1.x_2)$
   f) $T(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 - x_2)^2, x_1, x_3)$
   g) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3)$.

   Pre zobrazenia, ktoré sú lineárne, nájdite ich jadro Ker(T) a obraz Im(T)..

4. Zistite, či nasledujúce zobrazenia z $P_2(R)$ do $P_2(R)$ sú lineárne. $P_2(R)$ je LP všetkých polynómov stupňa najviac 2 s reálnymi koeficientami.
   a) $(Tf)(x) = f(-x)$
   b) $(Tf)(x) = 3f''(x) - f'(x)$
   c) $(Tf)(x) = 3f'(x) + 7f(x)$
   d) $(Tf)(x) = f(x) + x^2$
   e) $(Tf)(x) = f(\alpha x + \beta)$, $\alpha, \beta \in R, \alpha \neq 0$,
   f) $(Tf)(x) = xf'(x)$.

   Pre zobrazenia, ktoré sú lineárne, nájdite Ker(T) a Im(T).

5. Nech $A \in M_2(R)$. Zistite, či zobrazenie

$$T_A : M_2(R) \to M_2(R), T_A(X) = XA$$

je lineárne. Môže byť T_A izomorfizmus? $M_2(R)$ je LP všetkých štvorcových matíc typu 2x2 s reálnymi koeficientami.

6. Nech $A \in M_n(R)$. Zistite, či sú zobrazenia z $M_n(R)$ do $M_n(R)$

   a) $T(A) = 5A$
   b) $T(A) = A^T$
   c) $T(A) = A + I_n$
   d) $T(A) = A + A^T$

   lineárne.

7. Pre funkciu $f \in C[0,1]$ definujme $T(f) = F$, kde

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, x \in < 0, 1 >$$

Ukážte, že T je lineárne zobrazenie z $C[0,1]$ do $C[0,1]$. Vypočítajte $T(e^x)$ a $T(x^2)$. $C[0,1]$ - LP všetkých spojitých funkcií na intervale [0, 1].

8. Zistite, či nasledujúce zobrazenia z C[0, 1] do R sú lineárne.

   a) $T(f) = f(0)$
   b) $T(f) = |f(0)|$
   c) $T(f) = \frac{1}{2}(f(0) + f(1))$
   d) $T(f) = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 dx}$.

9. Nech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je báza lineárneho priestoru L a T_1 a T_2 sú dve lineárne zobrazenia z LP L do LP M. Ukážte, že ak $T_1(v_i) = T_2(v_i)$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$, tak $T_1 = T_2$.

10. Nech $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ sú usporiadané bázy lineárnych priestorov R^4 a R^3 respektívne. Lineárne zobrazenie $T : R^4 \to R^3$ je dané

$$T(b_1) = c_1 + c_2 + c_3$$
$$T(b_2) = 2c_1 + c_3$$
$$T(b_3) = 3c_1 + 2c_2 + c_3$$
$$T(b_4) = 4c_1 + 3c_2 + 2c_3$$

Vypočítajte $T(x)$, ak

   a) $x = b_1 + 3b_2 - 2b_3 - b_4$
   b) $x = 2b_1 - b_3 - 5b_4$

11.

12. Nech $T_1 : L_1(F) \to L_2(F), T_2 : L_2(F) \to L_3(F)$ sú lineárne zobrazenia a nech $T = T_2 \circ T_1$ je zobrazenie definované predpisom

$$T(u) = T_2(T_1(u))$$

pre každé $u \in L_1(F)$. Dokážte, že T je lineárne zobrazenie z $L_1(F)$ do $L_2(F)$.

13. Ktoré z nasledujúcich lineárnych zobrazení je izomorfizmus ?

   a) $T : R^3 \to R^3, T(x) = (x_1 - 3x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2 + 3x_3, -x_1 + +5x_2 + x_3)$
   b) $T : R^3 \to R^3, T(x) = (3x_1 - 2x_2 + x_3, -3x_1 - x_2 + 3x_3, -3x_2 + +4x_3)$
   c) $T : P_2(R) \to P_2(R), T(f(x)) = f(-x)$
   d) $T : P_2(R) \to P_2(R), T(f(x)) = f(x) + f'(x)$

18.2 Výsledky

1. a) Súmernosť vzhľadom na os x_2
   b) Súmernosť vzhľadom na priamku $x_1 = x_2$
   c) projekcia na os x_2

2. a) T je lineárne, je to rotácia R^2 okolo počiatku o uhol α (proti smeru pohybu hodin. ručičiek).
   b) T je lineárne len pre $\alpha = \beta = 0$. T je posun o vektor (α, β).

3. a) T nie je lineárne
   b) T nie je lineárne
   e) T nie je lineárne
   f) T nie je lineárne
   c) $Ker(T) = 0, Im(T) = R^2$
   d) $Ker(T) = (1, 1, -2), Im(T) = R^2$
   g) $Ker(T) = (1, 1, -2), Im(T) = Lo((1, 0, -2), (0, 0, 1))$

4. a) T je lineárne zobrazenie
   b) T je lineárne zobrazenie
   c) T je lineárne zobrazenie
   e) T je lineárne zobrazenie
   f) T je lineárne zobrazenie
   a) $KerT = \{0\}, Im(T) je P_2(R)$
   c) $KerT = \{0\}, Im(T) je P_2(R)$
   e) $KerT = \{0\}, Im(T) je P_2(R)$
   b) $KerT = \{c; c \in R\}, Im(T) je \{ax + b; a, b \in R\}$
   e) $KerT = \{c; c \in R\}, Im(T) je \{ax^2 + bx; a, b \in R\}$

5. T_A je lineárne zobrazenie. T_A je izomorfizmus práve vtedy, keď A je regulárna matica.

6. a) T je lineárne zobrazenie
   b) T je lineárne zobrazenie
   d) T je lineárne zobrazenie
7. $T(e^x) = e^x - 1, T(x^2) = x^3/3$.
8. a) T je lineárne zobrazenie
   c) T je lineárne zobrazenie
9.
10. a) $-3_1c - 6c_2$
    b) $-21c - 15c_2 - 9c_3$
11.
12.
13. a) T je izomorfizmus
    c) T je izomorfizmus
    d) T je izomorfizmus

19 MATICA LINEÁRNEHO ZOBRAZENIA

19.1 Zadania

1. Pre každé lin. zobrazenie T z cvičenia 1 z predchádzajucej sekcie nájdite jeho maticu $M(T)$ vzhľadom na štandardnú bázu v R^2 .
2. Pri štandardnej báze v R^2 nájdite matice nasledujúcich lineárnych zobrazení T z R^2 do R^2 .
   a) T otočí vektor $x \in R$ o 45 okolo počiatku.
   b) T urobí symetriu vektora x vzhľadom na os x_1 a potom ho otočí o 90q okolo počiatku.
   c) T zdvojí dĺžku x a potom ho otočí o -30q okolo počiatku.
   d) T urobí symetriu vektora x vzhľadom na priamku $x_1 = x_2$ a potom urobí projekciu na os x_1.
3. Pre každé z nasledujúcich lin. zobrazení $T : R^3 \to R^2$ nájdite jeho maticu vzhľadom na štandardné bázy na R a R .
   a) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$,
   b) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 + 3x_2)$,
   c) $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2)$.
4. Pre každé z nasledujúcich lin. zobrazení $T : R^3 \to R^3$ nájdite jeho maticu vzhľadom na štandardnú bázu na R^3 .
   a) $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_1, x_2 + x_3)$,
   b) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$,
   c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 - x_2, x_2 + x_3)$.
5. Pre každé lineárne zobrazenia z cvič. 3 nájdite jeho maticu vzhľadom na usporiadané bázy $\beta = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$ a $c = ((0,1),(1,1)$ na R^3 a R^2 .
6. Pre každé lineárne zobrazenia z cvič. 4 nájdite jeho maticu vzhľadom na usporiadanú bázu $\beta = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$v R^3 .
7. Nájdite maticu lineárneho zobrazenia $S : P_3(R) \to P_3(R)$, $S(p) = 3p" + 4p' + p$ vzhľadom na usporiadanú bázu P v $P_3(R)$.
   a) $P = P_3 = (1, x, x^2, x^3)$
   b) $P = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$
8. Nájdite explicitnú formulu $T(x_1, x_2, x_3) =$ pre lineárne zobrazenie $T : R^3 \to R^4$, pre ktoré
$$T(1,0,1) = (1,0,1,0), T(1,1,0) = (0,0,0,0)$$
$$T(0,1,1) = (0,1,0,1)$$
9. Súradnice vektora $x \in R^3$ vzhľadom na bázu $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ sú $x_\beta = (1, -3, 2)$. Nájdite jeho súradnice vzhľadom vzhľadom na bázu $C = (c_1, c_2, c_3)$, ak
   a) $b_1 = 3c_1 + 2c_2 + c_3, b_2 = c_2 - 2c_3, b_3 = c_1 - c_3$
   b) $c_1 = b_1 + b_2 + b_3, c_2 = b_2 + b_3, c_3 = b_3$
10. Nech $y_1 = (1,1,1)^\top$, $y_2 = (1,1,0)^\top$, $y_3 = (1,0,0)^\top$ a nech T je lineárne zobrazenie z R^3 do R^3 definované predpisom
$T(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)y_1 + (2\alpha_1 + \alpha_3)y_2 - (2\alpha_2 + \alpha_3)y_3$
    a) Nájdite maticu $M_\beta^\beta(T)$ reprezentujúcu T vzhľadom na usporiadanú bázu $B = (y_1, y_2, y_3)$.
    b) Vyjadrite vektor x ako lineárnu kombináciu vektorov y_1, y_2, y_3 a potom použite maticu $M_\beta^\beta(T)$ z časti a) na výpočet $T(x)$. i) $x = (7,5,2)^T$, ii) $x = (3,2,1)^T$, iii) $x = (1,2,3)^T$.
11. Nech S je podpriestor LP $C[a,b]$ generovaný funkciami e^x , xe^x a x^2e^x . Nech D je lin. operátor derivácia na S. Nájdite maticu operátora D vzhľadom na usporiadané bázu (e^x , xe^x a x^2e^x).

19.2 Výsledky

1. a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. a) $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha =$

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

6. a) $1/2\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & - & 0 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 16 & 2 \\ 2 & -1 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

8. $T(x) = -1/2(x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$

9. a) $x = (5, -1, 5)^T$

   b) $x = (1, -4, 5)^T$

10. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

    b) i) $7y_1 + 6y_2 - 8y_3$, ii) $3y_1 + 3y_2 - 3y_3$, iii) $y_1 + 5y_2 + 3y_3$.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

20 ZÁMENA BÁZY

20.1 Zadania

1. Nech súradnice vektora $x \in R^3$ vzhľadom na bázu $B = (b_1, b_2, b_3)$ sú $x_B = (1, -3, 2)$. Nájdite ich súradnice vzhľadom na bázu $C = (c_1, c_2, c_3)$, ak

   a) $b_1 = 3c_1 + 2c_2 + c_3, b_2 = c_2 - 2c_3, b_3 = c_1 - c_3$

   b) $c_1 = b_1 + b_2 + b_3, c_2 = b_2 + b_3, c_3 = b_3$

2. Matica lineárneho operátora $T : R^3 \to R^3$ vzhľadom na bázu $B = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$ je

$$M_B^B(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Nájdite explicitnú formulu pre operátor T. Zistite, či T je izomorfizmus.

3. V lineárnom priestore $P_3(R)$ sú dané dve usporiadané bázy $B = (1, x, x^2, x^3)$, $C = (1 + x, 1 - x, x^2 + x^3, x^2 - x^3)$. Nájdite maticu zámeny

   a) bázy C bázou B,

   b) bázy B bázou C.

4.

5. Nech $A, B, C \in M_n(R)$. Dokážte, že ak A je podobná B, a B je podobná C, potom A je podobná C.

6. Dokážte, že ak A a B sú podobné matice, tak $|A| = |B|$.

20.2 Výsledky

1. a) x = (5, - 1, 5)

   b) x = (1, - 4, 5)

2. T(x) = (- 2x + x , x - x , - x), T je izomorfizmus.

3. a) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

21 VLASTNÉ ČISLA A VLASTNÉ VEKTORY

21.1 Zadania

1. Nájdite charakteristické rovnice nasledujúcich matíc.

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory pre matice z cvičenia 1.

3. Nájdite charakteristické rovnice nasledujúcich matíc.

   a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1/5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory pre matice z cvičenia 3.

5. Nech $T : P_2(R) \to P_2(R)$

   $$T(\alpha + \beta x + \gamma x) = 5\alpha + 6\beta + 2\gamma - (\beta + 8\gamma)x + (\alpha - 2\gamma)x^2$$

   a) Nájdite vlastné čísla operátora T.

   b) Nájdite bázy vlastných priestorov operátora T.

6. Dokážte, že podobné matice majú zhodné charakt. polynómy.

21.2 Výsledky

1. a) $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

   b) $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

   c) $\lambda^2 - 12 = 0$

   d) $\lambda^2 + 3 = 0$

   e) $\lambda^2 = 0$

2. a) $\lambda_1 = 3, x_1 = (s, 2s), s \in R^*, \lambda_2 = -1, x_2 = (0, s), s \in R^*$

   b) $\lambda = 4, x = (3s, 2s), s \in R^*$

   c) $\alpha = \sqrt{12}, \lambda_1 = \alpha, x_1 = (3s, \alpha s), s \in R^*$, $\lambda_2 = -\alpha, x_2 = (-3s, \alpha s), s \in R^*$

   d) $\lambda_1 = i\sqrt{3}, x_1 = ((i\sqrt{3} - 2)s, s), s \in R^*, \lambda_2 = \overline{\lambda}_1, x_2 = \overline{x}_2$

   e) $\lambda = 0, x_1 = (s, 0), x_2 = (0, t), s, t \in R^*$

3. a) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

   b) $\lambda^3 - 2\lambda = 0$

   c) $\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda^2 + 8 = 0$

   d) $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda^2 - 2 = 0$

   e) $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda^2 - 8 = 0$

   f) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda^2 + 36 = 0$

4. a) $\lambda_1 = 1, (0, 1, 0), \lambda_2 = 2, (-1, 2, 2), \lambda_3 = 3, (-1, 1, 1)$

   b) $\lambda_1 = 0, (5, 1, 3), \lambda_2 = \sqrt{2}, (15 + 5\alpha, -1 + 2\alpha, 7)$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}, (15 - 5\alpha, -1 - 2\alpha, 7), \alpha = \sqrt{2}$

   c) $\lambda = -8, (1, 1, -6)$

   d) $\lambda = 2, (1, 1, 3)$

   e) $\lambda = 2, (1, 1, -3)$

   f) $\lambda_1 = -4, (-6, 8, 3), \lambda_2 = 3, (5, -2, 1)$

5. $\lambda_1 = -4, -6 + 8x + 3x^2, \lambda_2 = 3, 5 - 2x + x^2$.

22 DIAGONALIZOVATELNÉ MATICE

22.1 Zadania

1. Dokážte, že matice nie sú diagonalizovateľné.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

2. Nájdite maticu P, ktorá diagonalizuje danú maticu A a vypočítajte $P^{-1}AP$.

a) $\begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Zistite, či matica A je diagonalizovateľná. Ak je, Nájdite maticu P, ktorá diagonalizuje danú maticu A a vypočítajte $P^{-1}AP$.

a) $\begin{pmatrix} 19 & -9 & 6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Nech: $R^2 \to R^2$ je lineárny operátor definovaný

$$T(x_1, x_2) = (3x_1 + 4x_2, 2x_1 + x_2)$$

Nájdite bázu v $\mathbb{R}$, vzhľadom na ktorú je matica operátora T diagonálna.

5. Nech $T : R^3 \to R^3$ je lineárny operátor definovaný

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$$

Nájdite bázu v R^2 , vzhľadom na ktorú je matica operátora T diagonálna.

22.2 Výsledky

1. a) $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. a) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) Nie je diagonalizovateľná

d) $P = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) Nie je diagonalizovateľná

f) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $(2, 1), (1, -1)$

4. $(1, 1, -1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$

23 SYSTÉMY LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

23.1 Zadania

1. Riežte systémy

   a $y_1' = 2y_1 + 3y_2, y_2' = 2y_1 + 3y_2$

   b $y_1' = -14y_1 + 12y_2, y_2' = -20y_1 + 17y_2$

   c $y_1' = y_1, y_2' = 6y_1 - y_2$

2. Nájdite rieženia systémov z cvičenia 1, ktoré splňujú dané počiatočné podmienky.

   a) $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$

   b) $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$

   c) $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1$

3. Riežte systémy diferenciálnych rovníc

   a) $$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 \\ y_3' &= 2y_1 + y_3 \end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned}$$

   c) $$\begin{aligned} y_1' &= 19y_1 - 9y_2 - 6y_3 \\ y_2' &= 25y_1 - 11y_2 - 9y_3 \\ y_3' &= 17y_1 - 9y_2 - 4y_3 \end{aligned}$$

   d) $$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 4y_2 - 2y_3 \\ y_2' &= -3y_1 + 4y_2 \\ y_3' &= -3y_1 + y_2 + y_3 \end{aligned}$$

4. Nájdite rieženia systémov z cvičenia 3, ktoré splňujú dané počiatočné podmienky.

   a) $y_1(0) = -1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0$

   b) $y_1(0) = -1, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1$

   c) $y_1(0) = 0, y_2(0) = 2, y_3(0) = 0$

   d) $y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 2$

23.2 Výsledky

1. a) $y_1 = c_1e^{5x} - 2c_2e^{-x}, y_2 = c_1e^{5x} + c_2e^{-x}$

2. a) $y_1 = 0, y_2 = 0$

3. a) $y_1 = -c_2e^{2x} + c_3e^{3x}, y_2 = c_1e^x + 2c_2e^{2x} - c_3e^{3x}, y_3 = 2c_2e^{2x} - c_3e^{3x}$

4. a) $y_1 = e^{2x} - 2e3x, y_2 = ex - 2e^{2x} + 2e^{3x}, y_3 = -2e^{2x} + 2e^{3x}$