Cvičenie — 8. a 9. týždeň

1. Vypočítajte minimálny polynóm matice $A \in C^{n\times n}$

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[\lambda^2 - 2\lambda]$ b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[\lambda^2 - 2]$

   c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[\lambda^2 - 2\lambda]$

2. Vypočítajte minimálny polynóm vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu $A \in C^{n\times n}$

   a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1]$

   b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[\lambda^4]$ c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $[-2\lambda + \lambda^2]$

3. Vypočítajte minimálny polynóm matice $A \in Z_2^{n\times n}$

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[\lambda^2]$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[\lambda^2 + 1]$

   c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[\lambda^2]$

4. Vypočítajte minimálny polynóm vektora $\mathbf{b}$ vzhľadom na maticu $A \in Z_2^{n\times n}$

   a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1]$

   b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $[\lambda^4]$ c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $[\lambda^2]$

5. Nájdite všetky vlastné čísla a vlastné vektory matice A

   a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z_2^{3\times 3}$ $[\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = (0,1,1)^\top;\ \lambda_2 = 1 \implies \mathbf{v}_2 = (1,0,1)^\top]$,

   b. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in Z_3^{3\times 3}$ $\left[\lambda_1 = 1 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\mathbf{v}_1;\ \lambda_2 = 2 \implies \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 2\mathbf{v}_2\right]$

   c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_2^{3\times 3}$ $\left[\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2;\ \lambda_2 = 1 \implies \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

   d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Z_3^{3\times 3}$ $\left[\lambda_1 = 0 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, r, s \in Z_3, (r,s) \neq (0,0)\right]$

6. Vypočítajte stopu, vlastné čísla a vlastné vektory matice $A \in C^{n\times n}$

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathrm{trace}(A) = 2; \lambda_1 = 0, \mathbf{v}_1 = p\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, p \neq 0;\ \lambda_2 = 2, \mathbf{v}_2 = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0\right]$

   b. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathrm{trace} = 0; \lambda_1 = \sqrt{2}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_1 = -\sqrt{2}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}\right]$ $[\lambda^2 - 2\lambda]$

   c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\left[\lambda_{1,2} = 0, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = p\mathbf{v}_1 + q\mathbf{v}_2, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_3 = 3, \mathbf{v} = p\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, p \neq 0\right]$

7. Napíšte maticu $A \in K^{n\times n}$, ktorej minimálny polynóm je $f(\lambda) \in P(K)$.

a. $K = Z_2$, $n = 4$, $f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + \lambda + 1$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

b. $K = Z_2$, $n = 4$, $f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda + 1$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$

c. $K = C$, $n = 4$, $f(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

d. $K = C$, $n = 4$, $f(\lambda) = 3\lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 5$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}\right]$

8. Vypočítajte stopu a vlastné čísla matice A a rozhodnite, či je diagonalizovateľná

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\text{je diagonalizovate1ná } A \approx D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [nie je diagonalizovate1ná]

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\text{je diagonalizovate1ná } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$

9. Rozhodnite, či je matica $A \in C^{n\times n}$ diagonalizovateľn. Ak je, tak njdite diagonálnu maticu D a regulárnu maticu P, pre ktorú $A = PDP^{-1}$.

a) $A = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{pmatrix}$ nie je

f) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ nie je h) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ nie je i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ nie je