Cvičenie — 5. týždeň

1. Označme $L_s(A)$ ($L_r(A)$) lineárny obal stĺpcov (riadkov) matice A. Určte bázu B_s (B_r) priestoru $L_s(A)$ ($L_r(A)$). Napíšte $\dim L_s(A)$ a $\dim L_r(A)$.

   a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4\times5}$. $[\ \mathcal{B}_r = \{A_{1*}, A_{2*}, A_{3*}\}, \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*3}, A_{*5}\}, \dim L_r = \dim L_s = 3]$

   b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4\times5}$. $\left[A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathcal{B}_r = \{B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}, B_{4*}\}, \\ \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}, A_{*4}\} \end{matrix} \right]$

   c. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{4\times6}$. $\left[A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathcal{B}_r = \{B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}\} \\ \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}\} \end{matrix} \right]$

   d. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in R^{3\times5}$. $\left[A \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \mathcal{B}_r = \{B_{1*}, B_{2*}, B_{3*}\} \\ \mathcal{B}_s = \{A_{*1}, A_{*2}, A_{*3}\} \end{matrix} \right]$

2. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ je báza lineárneho priestoru L. nad poľom K. Napíšte dimemziu priestoru L a súradnice $\mathbf{x}_\mathcal{B}$, ak
   a. $K = R$, $\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_4$,
   b. $K = R$, $\mathbf{x} = 2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + 3(\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3) + 3(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_4)$
   c. $K = Z_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$
   [$\dim L = 4$ a) $\mathbf{x}_\mathcal{B} = (3, 0, -1, 2)^\top$, b) $\mathbf{x}_\mathcal{B} = (8, 4, -3, 3)^\top$, c) $\mathbf{x}_\mathcal{B} = (1, 0, 1, 0)^\top$]

3. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M \subset R^4$.
   a. $M = \{(2, 2, 0, -1); (1, 2, 3, 0); (0, 1, 2, -1); (3, 3, 1, 0)\}$ [LZ]
   b. $M = \{(1, 2, 1, -1); (1, 2, 3, 0); (0, 1, 2, -1); (1, 1, 0, 0)\}$ [LNZ]
   c. $M = \{(3, 2, 1, 0); (0, 1, 2, 3); (1, 0, 1, 0)\}$ [LNZ]

4. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M \subset Z_2^5$.
   a. $M = \{(1, 0, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 1, 1); (0, 1, 1, 1, 1); (1, 0, 1, 0, 1)\}$ [LNZ]
   b. $M = \{(1, 0, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 1, 1); (0, 1, 1, 1, 1); (1, 0, 1, 0, 1); (0, 0, 1, 0, 0)\}$ [LNZ]
   c. $M = \{(1, 1, 1, 1, 0); (1, 1, 1, 0, 0); (0, 0, 0, 0, 1); (0, 0, 0, 1, 0)\}$ [LZ]

5. Rozhodnite, či je zobrazenie $T\colon R^4 \to R^3$ lineárne. Ak áno, určte bázu $\mathcal{B}$ jeho jadra a dimenzie jeho jadra a oboru hodnôt.
   a. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4,\ 2x_1 + x_2 - x_4,\ 3x_2 - 4x_3 + x_4)$
      [$\mathcal{B} = \{(-2, 1, 0, -3); (2, 0, 1, 4)\}, \dim \operatorname{Ker} T = 2,\ \dim \operatorname{Ran} T = 2$
   b. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2 - x_3 + x_4,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_4)$
      [$\mathcal{B} = \{(0, 1, 1, 0)\}, \dim \operatorname{Ker} T = 1,\ \dim \operatorname{Ran} T = 3$
   c. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_3,\ x_2 + x_4,\ 2x_1 + x_2^2)$ nie je LO

6. Vypočítajte súradnice vektora $\mathbf{x}$ vzhľadom na usporiadanú bázu $\mathcal{B}$ priestoru R^3, resp. R^4.
   a. $\mathbf{x} = (-8\,,\ 5\,,\ -4)$, $\mathcal{B} = \{(2,\ -1,\ 2)\ ,\ (5,\ -3,\ 3)\ ,\ (-1,\ 0,\ -2)\}$ [$\mathbf{x}_\mathcal{B} = (1, -2, 0)^\top$]
   b. $\mathbf{x} = (-8\,,\ 5\,,\ -4)$, $\mathcal{B} = \{(2,\ 5,\ -1), (-1,\ -3,\ 0), (2,\ 3,\ -2)\}$ [$\mathbf{x}_\mathcal{B} = (70, 82, -33)^\top$]
   c. $\mathbf{x} = (6\,,\ -1\,,\ 7\,,\ -1)$, $\mathcal{B} = \{(1,\ 0,\ 2,\ -1), (0,\ 1,\ 4,\ -2), (2,\ -1,\ 0,\ 1); (2,\ -1,\ -1,\ 2)\}$ [$(2, 1, 1, 1)^\top$]
   d. $\mathbf{x} = (-1\,,\ 9\,,\ -1\,,\ 3)$, $\mathcal{B} = \{(11, 1, -1, -1), (-1, 9, -1, 3), (-1, 1, 11, -1); (1, 3, 1, 9)\}$ [$(0, 1, 0, 0)^\top$ ($\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$)]