Cvičenie — 4. týždeň

1. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli Z_2)

a.
$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a) $\{(1,1,1,0);(1,0,0,1)\}$, b) $\{(1,1,1,1);(0,0,0,1)\}$, c) $\{(0,0,1,0);(1,1,0,0)\}$, d) $\{(0,1,1,0);(1,1,0,1)\}$, e) $\{(0,1,1)\}$, f) $\{(1,0,0,0);(0,1,0,1);(0,0,1,0);(1,1,1,1))\}$

2. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli Z_3)

a.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

a) $\{(2,0,1,0);(1,0,0,1);(0,0,2,2)\}$, b) $\{(0,1,2,0);(1,1,1,1);(2,1,0,2)\}$, c) $\{(1,0,0,0);(0,1,1,1);(2,2,2,2)\}$, d) $\{(1,0,0,1);(2,1,1,1);(0,2,2,1)\}$, e) $\{(2,2,1)\}$, f) $\emptyset$

3. Zistite, či je $M \subset R^3$ podpriestorom lineárneho priestoru $(R^3,+,\cdot)$ s obvyklým sčítaním a násobením skalárom. V prípadoch, keď je M podpriestor napíšte jeho bázu a dimenziu.
   a. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$, $[\mathcal{B} = \{(1,-2,0);(0,3,1)\}, \dim M = 2]$
   b. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\}$, [nie je podpriestor]
   c. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \colon 2x_1 = x_2 = -x_3\}$, $[\mathcal{B} = \{(2,1,-1)\}, \dim M = 1]$
   d. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \colon x_1x_2 \geq 0\}$. [nie je podpriestor]
4. Zistite, či je $M \subset R^4$ podpriestorom lineárneho priestoru $(R^4,+,\cdot)$ s obvyklým sčítaním a násobením skalárom. V prípadoch, keď je M podpriestor napíšte jeho bázu a dimenziu.
   a. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$, $[\mathcal{B} = \{(1,-2,0,0);(0,3,1,0);(0,0,0,1)\}, \dim M = 3]$
   b. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \colon 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$, $[\mathcal{B} = \{(1,1,1,0);(0,-1,0,1)\}, \dim M = 2]$
   c. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \colon 2x_1 = x_2, x_1 + x_3 - 2x_4 = 0\}$, $[\mathcal{B} = \{(1,2,-1,0);(0,0,2,1)\}, \dim M = 2]$
   d. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \colon x_1x_2x_3x_4 \geq 0\}$. [nie je podpriestor]
5. Rozhodnite, či je $\mathcal{B}$ báza lineárneho priestoru L nad poľom K. Ak je, tak určte stĺpec súradníc vektora $\mathbf{u}$ vzhľadom na bázu $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.
   a. $L = R^3$, $\mathbf{b}_1 = (0,1,-1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,2,-1)$, $\mathbf{b}_3 = (2,2,1)$; $\mathbf{u} = (4,5,-2)$ $[\,(-5,6,-1)^\top]$
   b. $L = P_2(R)$ je priestor všetkých polynómov najviac 2. stupňa.
      $\mathbf{b}_1(x) = x^2 - x$, $\mathbf{b}_2(x) = x + 1$, $\mathbf{b}_3(x) = 1$; $\mathbf{u}(x) = 1 + x + x^2$ $[\,(1,2,-1)^\top]$
   c. $L = Z_2^3$. $\mathbf{b}_1 = (0,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,1,0)$, $\mathbf{x} = (1,1,1)$ [$\mathcal{B}$ nie je báza.]
   d. $L = C^3$. $\mathbf{b}_1 = (0,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (1,0,1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,1,0)$, $\mathbf{x} = (1,1,1)$ $[\,(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^\top]$
6. Ukážte, že množina M funkcií $R \to R$ je lineárne nezávislá.
   a. $M = \{1, x, x^2, x^3\}$
   b. $M = \{\sin x, \sin 2x, \cos x, \cos 2x\}$