Cvičenie LA — 4. a 5. týždeň

Sústavy v poliach R a C.

1. Napíšte množinu všetkých riešení sústavy rovníc s komplexnými neznámymi

$$\text{a)}\ \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 7 \end{aligned} \quad [(1,1)] \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= i \\ 3x_1 + 4x_2 &= -7i \end{aligned} \quad [(-i\,,\,-i)]$$

$$\text{c.}\ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned} \quad [\emptyset]$$

2. Rozhodnite, či sú dané matice stupňovité, prípadne redukované stupňovité

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Npíšte množinu P všetkých riešení sústavy, ktorej rozšírená matica je

$$\text{a)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right), \qquad \text{b)} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

4. Riešte sústavu lineárnych rovníc, ktorých rozšírená matica je

$$\text{a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right) \qquad P = \emptyset$$

$$\text{b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -3 & 13 & -8 \end{array}\right) \qquad P = \emptyset$$

$$\text{c)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 5 \end{array}\right) \qquad P = \{(7,-4,0)\}$$

$$\text{d)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right) \qquad P = \{(-3a, 1+5a, a),\ a \in R\}$$

$$\text{e)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 & 18 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \qquad P = \{(9, a-14, a, 0),\ a \in R\}$$

$$\text{f)} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & 9 \end{array}\right) \qquad P = \{(3+a-2b, 3+a+b, a, b),\ a,b \in R\}.$$

5. a) Riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -1 \\ x_2 - \ \ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad P = \{(a-5, a+3, a),\ a \in R\}$$

b) Sú $\overline{u} = (-1,7,4)$, $\overline{v} = (5,3,0)$ riešeniami predchádzajúcej sústavy rovníc?

6. a) Riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -1 \\ x_2 - \ 2x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad P = \{(7+a, 5+2a, a),\ a \in R\}$$

b) Napíšte hodnosť matice a rozšírenej matice predchádzajúcej sústavy.

Sústavy v poliach Z_2 a Z_3.

7. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli Z_2)

a.
$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

{(1,1,1,0);(1,0,0,1) }

b.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

{(0,0,0,1);(1,1,1,1) }

c.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

{(1,1,0,0);(0,0,1,0)}

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

{(0,1,1,0);(1,1,0,1) }

e.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

{(0,0,1)}

f.
$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

{(0,0,1,0);(0,1,0,1) }

8. Riešte sústavy s neznámymi zo Z_3.

a.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

{(2,0,1,0);1,0,0,1);(0,0,2,2)}

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

{(0,1,2,0);(1,1,1,1);(2,1,0,2)}

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

{1,0,0,0);1,2,1,1);(1,1,2,2)}

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

{(1,0,0,1);(2,1,1,1);(0,2,2,1)}

e.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$[\{(2,2,1)\}]$

f.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

∅, bez 4. rovnice
{(0,0,1,0);(0,1,2,1);0,2,0,2)}

Determinanty.

9. Vypočítajte determinanty

a. $\begin{vmatrix} 1+i & 2 \\ i & 1-i \end{vmatrix}$ $[2-2i]$, b. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 12 & 0 & 12 \end{vmatrix}$ $[0]$, c. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$ $[-24]$,

d. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $[-4]$, e. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $[-6]$

10. Pomocou determinantov vypočítajte maticu inverznú k matici

$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\left[A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 16 & 2 \\ 6 & 18 & 0 \\ 4 & 13 & -1 \end{pmatrix}\right]$

11. Riešte rovnicu v poli C

a. $\begin{vmatrix} (x-2) & (2-x)^2 \\ 1-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$ $[x_{1,2} = 1, x_3 = 2]$

b. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & x+2 \\ x-1 & 1-x & -2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ $[x_{1,2} = 0, x_3 = -1]$