Cvičenie — 3. týždeň

1. Pomocou Euklidovho algoritmu určte $a(x)$, $b(x)$ pre ktoré, $\gcd(f_1(x), f_2(x)) = a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x)$
   a. $f_1(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$, $f_2(x) = 2x^2 - 3x - 2$ v $P(C)$ $[a(x) = 1,\ b(x) = -2(x+1)]$
   b. $f_1(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_2)$ $[a(x) = x^2 + x + 1,\ b(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x]$
   c. $f_1(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_3)$ $[a(x) = x + 1,\ b(x) = 2x^4 + 2x^3 + 1]$
2. Pomocou Euklidovho algoritmu zistite, či má polynóm $f(x)$ ireducibilný deliteľ násobnosti viac ako 1.
   a. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$ v $P(R)$ [áno]
   b. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x - 9$ v $P(R)$ [nie]
   c. $f(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_2)$ [nie]
   d. $f(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ v $P(Z_3)$ [nie]
3. Vypočítajte
   a. $3x^3 - 2x^2 + x - 5 \pmod{x^2 + x + 1}$ v $P(R)$ $[\ 3x]$
   b. $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5 \pmod{2x^2 + 1}$ v $P(R)$ $[\ -\frac{1}{2}x - 3]$
   c. $x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \pmod{x^2 + x + 1}$ v $P(Z_2)$ $[\ x + 1]$
4. Pomocou Euklidovho algoritmu vypočítajte
   a. $(x)^{-1}$ v $P(Z_2)/_{(x^2+x+1)}$ $[x + 1]$
   b. $(x)^{-1}$ v $P(Z_2)/_{(x^3+x+1)}$ $[x^2 + 1]$
   c. $(x)^{-1}$ v $P(Z_2)/_{(x^3+x^2+1)}$ $[x^2 + x]$
   d. $(x^2 + x + 1)^{-1}$ v $P(Z_2)/_{(x^4+x^3+x^2+x+1)}$ $[x^3 + 1]$
5. Napíšte pole, ktoré má presne
   a. 8 prvkov, b. 9 prvkov, c. 13 prvkov. d. 18 prvkov
6. Rozšírenú maticu sústavy lineárnych rovníc upravte na redukovanú stupňovitú a napíšte množinu P všetkých riešení
   a. v poli R

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 &= -1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right), P = \{(-2a - \frac{1}{3}, \frac{2}{3} + 13a, 3a) \colon a \in R\}$$

   b. v poli Z_2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad P=\{(0,1,1,0);(1,1,0,0)\}$$

   c. v poli Z_2

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad P=\{(1,1,0,0);(0,0,0,1);(0,1,1,0);(1,0,1,1)\}$$

   d. v poli Z_3

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad P=\{(2,2,1,0);(1,1,2,1);(0,0,0,2)\}$$