Sústavy lineárnych rovníc v s reálnymi neznámymi.

1. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli R)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$\{(\frac{1-a}{2}, \frac{5+3a}{2}, a, 3+2a) \colon a \in R\}$, $\{(\frac{5-b}{4}, \frac{1+3b}{4}, \frac{-3+b}{2}, b) \colon b \in R\}$ $\quad$ $\{(2-a, 1, a, 2-a) \colon a \in R\}$, $\{(b, 1, 2-b, b) \colon b \in R\}$

Komplexné čísla.

Na skúške takéto príklady nebudú.

2. V obore komplexných čísel riešte rovnice
   $2z + 3iz - 1 + 2i = -2 + i$, $\quad \frac{1+i}{2z+iz-i} = \frac{1}{z+1-i}$
3. Riešte binomické rovnice, riešenie znázornite v komplexnej rovine.
   $z^2 = i$, $\quad z^4 = -4$, $\quad z^4 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $\quad z^3 = -i$
4. Vypočítajte čísla $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2011}$, $\quad \dfrac{(1-i)(1-2i)}{3+4i}$ a znázornite ich v komplexnej rovine.
5. Zistite, či je množina $F = \{x + \sqrt{2}y \colon x, y \in Q\}$ s obvyklými operáciami pole.

Konečné polia.

5. Určte $a \in Z_{17}$, pre ktoré je $291 \equiv a \pmod{17}$
6. V okruhu polynómov $P(R)$ vypočítajte
   a. $(x+2)(2x-1) \pmod{x^2+2x+2}$ $\quad$ b. $(x+2)(2x-1) \pmod{x^2+9}$

7* Dokážte, že Z_n je pole práve vtedy, keď je n prvočíslo.

8. Nájdite všetky korene polynómu $f(x)$ nad poľom Z_5.
   a. $f(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, $\quad$ b. $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1$

Konečné polia a polynómy.

9. Určte $a \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, pre ktoré
   a. $35 - 128 + 15^3 \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 5, 17$,
   b. $166^3 + 234^4 + 1126^5 \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 3, 5$,
   c. $78^{10} + 55^{15} \equiv a \pmod{n}$ pre $n = 2, 3, 5, 7$,
10. Ukážte, že $13 \big| \big(2^{100} + 10\big)$,
11. Dokážte, že pre každé $n \in N$ je $n^5 - n$ deliteľné piatimi.
12. Dokážte, že pre každé $n \in N$ je $6^{2n} - 8$ deliteľné siedmimi.
13. Riešte rovnice v poli Z_5 $\quad$ a) $x^5 + x^3 + x = 3$; $\quad$ b) $x^5 + x^4 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$
14. Rozložte na súčin ireducibilných polynómov nad poľom C, R, Z_2, Z_3, Z_5 polynóom
    a. $x^2 + x + 1$
    b. $x^3 + x + 1$
    c. $x^4 + 1$
    d. $x^6 + 1$
15. Vydeľte polynómy: $(2x^3 + 3x^2 + 4x + 3) : (x^2 + x + 1)$ $\quad$ a) nad R, $\quad$ b) nad Z_5.

Okruhy polynómov, Euklidov algorutmus.

16. Pomocou Euklidovho algoritmu určte $a(x)$, $b(x)$ pre ktoré,
    $\gcd(f_1(x), f_2(x)) = a(x)f_1(x) + b(x)f_2(x)$ a napíšte $\mathrm{lcm}(f_1(x), f_2(x))$
    a. $f_1(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$, $f_2(x) = 2x^2 - 3x - 2$ $\quad$ v $P(C)$
    b. $f_1(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5$, $f_2(x) = 2x^2 - 2x + 1$ $\quad$ v $P(C)$
    c. $f_1(x) = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 14x - 6$, $f_2(x) = x^3 - 2x - 4$ $\quad$ v $P(C)$
    d. $f_1(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ $\quad$ v $P(Z_2)$
    e. $f_1(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^4 + x^2 + x + 1$ $\quad$ v $P(Z_3)$
    f. $f_1(x) = 3x^7 + 2x^5 + x^4 + 5x^2 + 4x + 3$, $f_2(x) = 2x^4 + x^2 + 2x + 3$ $\quad$ v $P(Z_7)$
17. Pomocou Euklidovho algoritmu zistite, či má polynóm $f(x)$ koreň násobnosti viac ako 1.
    a. $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ $\quad$ v $P(C)$
    b. $f(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^2 + 4x + 1$ $\quad$ v $P(C)$
    c. $f(x) = x^4 - 2ix^3 + (7-4i)x^2 - 4ix + 4$ $\quad$ v $P(C)$
    d. $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + x^2 - 1$ $\quad$ v $P(C)$
    e. $f(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ $\quad$ v $P(Z_2)$
    f. $f(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$ $\quad$ v $P(Z_3)$
    g. $f(x) = 2x^4 + x^2 + 2x + 3$ $\quad$ v $P(Z_7)$
18. Vypočítajte
    a. $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5 \pmod{x^2 + x + 1}$ $\quad$ v $P(C)$
    b. $4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5 \pmod{2x^2 + 1}$ $\quad$ v $P(C)$
    c. $x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1 \pmod{x^2 + x + 1}$ $\quad$ v $P(Z_2)$

19. Vypočítajte
  a. $(x)^{-1} \pmod{x^2+x+1}$ v $P(Z_2)$
  b. $(x)^{-1} \pmod{x^3+x+1}$ v $P(Z_2)$
  c. $(x+1)^{-1} \pmod{x^2+x+1}$ v $P(Z_2)$
20. Napíšte pole, ktoré má presne
  a. 8 prvkov, b. 9 prvkov, c. 13 prvkov.

Sústavy lineárnych rovníc s neznámymi z konečných polí.

21. Riešte sústavy lineárnych rovníc (v poli Z_2)

a.
$$\begin{aligned} x_3+x_4&=1\\ x_1+x_2+x_4&=0\\ x_1+x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$
b.
$$\begin{aligned} x_2+x_3+x_4&=1\\ x_1+x_2+x_4&=1\\ x_1+x_3+x_4&=1 \end{aligned}$$
c.
$$\begin{aligned} x_2+x_3&=1\\ x_1+x_2&=0\\ x_2+x_3+x_4&=1 \end{aligned}$$
d.
$$\begin{aligned} x_1+x_3&=1\\ x_1+x_2+x_4&=1\\ x_3+x_4&=1 \end{aligned}$$
e.
$$\begin{aligned} x_1+x_3&=1\\ x_2+x_3&=1\\ x_1+x_2+x_3&=1 \end{aligned}$$
f.
$$\begin{aligned} x_3+x_4&=1\\ x_1+x_3+x_4&=1\\ x_2+x_4&=0 \end{aligned}$$

22. Riešte sústavy s neznámymi zo Z_3.

a.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3+2x_4&=0\\ x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_2+2x_3+2x_4&=2 \end{aligned}$$
b.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3+2x_4&=0\\ 2x_2+2x_3+2x_4&=0\\ 2x_3+2x_4&=1 \end{aligned}$$
c.
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3+2x_4&=2\\ x_2+2x_3&=0\\ 2x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$
d.
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+2x_4&=0\\ x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_1+x_3+2x_4&=1 \end{aligned}$$
e.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=1\\ 2x_1+2x_2+x_3&=0\\ x_1+x_3&=0 \end{aligned}$$
f.
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3+2x_4&=2\\ 2x_2+x_3&=1\\ x_3+2x_4&=1\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4&=2 \end{aligned}$$

Lineárne priestory.

23. Zistite, či je $M \subset R^3$ podpriestorom lineárneho priestoru $(R^3, +, \cdot)$ s obvyklým sčítaním a násobením skalárom.
  a. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \colon 2x_1+x_2-3x_3=0\}$,
  b. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \colon 2x_1+x_2-3x_3=1\}$,
  c. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \colon 2x_1=x_2=-x_3\}$,
  d. $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \colon x_1x_2 \geq 0\}$.
24. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M \subset R^4$.
  a. $M = \{(2,2,0,-1); (1,2,3,0); (0,1,2,-1); (3,3,1,0)\}$
  b. $M = \{(1,2,1,-1); (1,2,3,0); (0,1,2,-1); (1,1,0,0)\}$
  c. $M = \{(3,2,1,0); (0,1,2,3); (1,0,1,0)\}$
25. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M \subset Z_2^5$.
  a. $M = \{(1,0,1,1,0); (1,1,1,1,1); (0,1,1,1,0,1); (1,0,1,0,1)\}$
  b. $M = \{(1,0,1,1,0); (1,1,1,1,1); (0,1,1,1,0,1); (1,0,1,0,1); (0,0,1,0,0)\}$
  c. $M = \{(1,1,1,1,0); (1,1,1,0,0); (0,0,0,0,1); (1,0,1,0,1)\}$
26. Rozhodnite, či je lineárne nezávislá množina $M = \{f_1, f_2, f_3\}$ funkcií $R \to R$, kde
  a. $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = \sin 2x,\ f_3(x) = \cos 2x$
  b. $f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1+2x,\ f_3(x) = x^2+x$
  c. $f_1(x) = \cos 2x,\ f_2(x) = \sin^2 x,\ f_3(x) = \cos^2 x$
27. Rozhodnite, či je množina M podpriestor lineárneho priestoru C^4. Ak áno, nájdite jeho bázu a určte dimenziu M.
  a. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in C^4 \colon x_1-x_2+2x_3-x_4=0\}$
  b. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in C^4 \colon x_2+2x_3-x_4=x_1-x_3+x_4=0\}$
  c. $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in C^4 \colon x_1+x_2x_3=x_1x_2+x_3=0\}$
28. Vypočítajte súradnice vektora $\mathbf{x}$ vzhľadom na usporiadanú bázu $\mathcal{B}$ priestoru R^3, resp. R^4.
  a. $\mathbf{x} = (-8, 5, -4)$, $\mathcal{B} = \{(2,\ -1,\ 2),\ (5,\ -3,\ 3),\ (-1,\ 0,\ -2)\}$
  b. $\mathbf{x} = (-8, 5, -4)$, $\mathcal{B} = \{(2,\ 5,\ -1), (-1,\ -3,\ 0), (2,\ 3,\ -2)\}$
  c. $\mathbf{x} = (6, -1, 7, -1)$, $\mathcal{B} = \{(1,\ 0,\ 2,\ -1), (0,\ 1,\ 4,\ -2), (2,\ -1,\ 0,\ 1); (2,\ -1,\ -1,\ 2)\}$
  d. $\mathbf{x} = (-1, 9, -1, 3)$, $\mathcal{B} = \{(11,1,-1,-1), (-1,9,-1,3), (-1,1,11,-1); (1,3,1,9)\}$

29. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ je báza lineárneho priestoru L. nad poľom K. Napíšte $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$, ak
   a. $K = R$, $\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_4$,
   b. $K = R$, $\mathbf{x} = 2(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + 3(\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3) + 3(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_4)$
   c. $K = Z_2$, $\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$

Lineárne operátory.

30. Rozhodnite, či je zobrazenie T lineárne. V prípadoch, keď je T lineárne, napíšte jeho maticu vzhľadom na štandardné bázy.
   a. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2, x_2 + 3x_3)$
   b. $T\colon R^3 \to R^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cdot x_2, x_2 + x_3)$
   c. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_3, x_1 + x_2 + x_3)$
   d. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$
   e. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2, 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$
31. Napíšte matice lineárneho operátora $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$,
   a. $T\colon R^2 \to R^2$, $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, $\mathbf{b}_1 = (-1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, -2)$.
   b. $T\colon R^2 \to R^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + x_2)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade a.
   c. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2, 3x_1 + x_2 + x_3, 0)$, $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$; $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 0)$
   d. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade c.
   e. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - 2x_3, x_2 - x_3)$, $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ sú rovnaké ako v príklade c.
   f. $T\colon R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -2x_1 + x_3)$, $\mathcal{E}$ je rovnaká ako v príklade c., $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, $\mathbf{b}_1 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (-1, 1, 1)$.
32. Pre lineárne zobrazenia z príkladov 30 a 31 určte dimeziu jadra a oboru hodnôt.

Vlastné čísla.

33. R Vypočítajte determinanty
   a. $\begin{vmatrix} (x+1) & (x^2-1) & 2(x+1) \\ -xe^x & 2e^x & -2xe^x \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \cos 2x \\ \sin 2x & \cos x & 0 \\ \sin x & 2\cos x & 2\cos 2x \end{vmatrix}$
34. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $A \in C^{n\times n}$. V prípadoch, keď tvoria bázu napíšte maticu $[A]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ lineárneho operáitora $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$.
   a. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, c. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, f. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1/5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
35. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $A \in Z_2^{n\times n}$.
   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
36. Nájdite vlastné čísla a vlastné vektory matice $A \in Z_3^{n\times n}$.
   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, b.$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
37. Nájdite minimálny polynóm $m_A(\lambda)$ matíc z príkladov 2,3,4.
38. Nájdite minimálny polynóm $m_{A,\mathbf{b}}(\lambda)$ matice $A \in C^{n\times n}$ vzhľadom na vektor $\mathbf{b} \in C^{n\times 1}$
   a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   e. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, f. $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
39. Pre matice A z príkladu 38 rozhodnite, či sú diagonalizovateľné a nájdite regulárnu maticu A a diagonálnu maticu D, pre ktoré platí $A = PDP^{-1}$.

Jordanov tvar matice.

40. Nájdite bázu $\mathcal{B}$ zloženú z reťazcov zovšeobecnených vlastných vektorov matice $A = [T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ ($\mathcal{E}$ je štandardná báza). Napíšte maticu $J = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ a maticu P, pre ktorú $A = PJP^{-1}$ a minimálny polynóm matice A.

a. $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $[J = J_1(0) \oplus J_1(-4)]$

b. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $[J_2(-2)]$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_3(2)]$

d. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(-1) \oplus J_1(-1)]$

e. $A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_2(-1) \oplus J_1(10)]$

f. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $[J_3(-1)]$

g. $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_2(1) \oplus J_1(2)]$

h. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_1(1)]$

i. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

j. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $[J_2(0) \oplus J_2(0)]$

k. $A = \begin{pmatrix} 15 & 28 & -7 \\ -6 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $[J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(2)]$

l. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[J_3(1) \oplus J_1(1)]$

m. $A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, $[J_2(8) \oplus J_1(12) \oplus J_1(12)]$

n. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $[J_1(3) \oplus J_3(2)]$

Ortogonalizácia.

41. Daná je množina $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset R^n$. Vypočítajte navzájom ortogonálne vektory $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m\} \subset R^n$, pre ktoré platí $\operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k\}$ pre všetky $k = 1, 2, \ldots, m$.
    a. $m = 2, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,1,0)$.
    b. $m = 3, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,1,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,1,0)$; $\mathbf{f}_3 = (1,1,0,0)$.
    c. $m = 3, n = 4$, $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,0,0)$; $\mathbf{f}_3 = (-1,1,2,0)$.
    d. $m = 3, n = 5$, $\mathbf{f}_1 = (1,0,0,1,1)$; $\mathbf{f}_2 = (1,0,0,0,-1)$; $\mathbf{f}_3 = (-1,1,2,0,0)$.

42. Daný je trojuholník ABC. Určte lineárne zobrazenie $T\colon R^2 \to R^2$, ktoré transformuje trojuholník ABC na rovnoramenný pravouhlý trojuholník $A'B'C'$ s pravým uhlom pri vrchole B'. Vypočítajte obrazy vektorov štandardnej bázy: $T(1,0)$, $T(0,1)$.
    a. $A = (-2,0)$, $B = (0,0)$, $C = (10,1)$,
    b. $A = (-2,-1)$, $B = (0,-1)$, $C = (15,1)$,
    c. $A = (0,1)$, $B = (2,0)$, $C = (10,1)$,
    d. $A = (-10,1)$, $B = (2,0)$, $C = (4,2)$.