

Kap. 3 $A \cdot x = b$ (úlohy a ich riešenia)

(Táto kapitola je náročnejšia, preto začneme zhrnutím základných faktov; komu nie sú nasledujúce skutočnosti jasné, musí sa vrátiť k štúdiu kap.3)

Pre MATLAB má úloha $A \cdot x = b$ riešenie vždy, akonáhle je zmysluplná, t.j. počet riadkov matice A sa rovná počtu zložiek stĺpcového vektora b (ML formulácia: $\text{size}(A, 1) = \text{length}(b)$).

Toto je naozaj pravda, pretože ak $\text{size}(A, 1) = \text{length}(b)$ a $\text{hod}(A) < \text{hod}([A, b])$, t.j. riešenie v klasickom zmysle neexistuje, tak MATLAB nájde a zobrazí *riešenie v zovšeobecnenom zmysle*.

Riešenie získame (až na výnimočné prípady) príkazom " $x = A \backslash b$ ". Treba však vedieť rozhodnúť, aká je povaha ponúkaného riešenia!

Vektor x je riešenie v klasickom zmysle, ak reziduálny vektor $rv = A \cdot x - b$ je prakticky nulový (všetky jeho zložky sa rovnajú "prakticky" nule a jeho norma – akákoľvek norma – má byť veľmi malé číslo).

Vektor x je riešenie v zovšeobecnenom zmysle, ak reziduálny vektor $rv = A \cdot x - b$ je nenulový, ale je kolmý na všetky stĺpce matice A , teda skalárne súčiny $rv' \cdot A(:, j) = 0$ pre všetky $j, j = 1, \dots, n$.

Ak výnimočne príkaz " $x = A \backslash b$ " nedáva žiaden vektor (lebo, napríklad, MATLAB hlási, že matica A je singulárna, alebo "blízka" singulárnej), tak zovšeobecnené riešenie získame príkazom " $x = \text{pinv}(A) \cdot b$ ". Aj keď obidva príkazy dajú vektor ako riadnu odozvu, nemusí to byť (vo všeobecnosti) ten istý vektor.

Príkaz "rref" poskytuje dobrú predstavu o úlohe $A \cdot x = b$, avšak len pre systémy, ktorých matica nie je zle podmienená. Ak matica úlohy je zle podmienená (viď čl. 3.6), tak dávame prednosť informácii získanej príkazom "rank" (máme na mysli skutočnosť, či vektor b leží, resp. neleží v priestore stĺpcov matice A).

Nakoniec: Úloha $A \cdot x = b$ má nekonečne veľa riešení práve vtedy, ak nulový priestor matice A je netriviálny. Jeho bázu získame príkazom " $\text{null}(A)$ ". Ak je nulový priestor triviálny (obsahuje len nulový vektor), odozvou " $\text{null}(A)$ " je prázdna matica, aj keď z pohľadu matematiky by sme tam vtedy radšej videli zobrazenie nulového vektora :-).

3.7.1 Je to veľmi jednoduchá úloha, s ktorou si každý poradí.

3.7.2 Je daná matica A :

```
A =
    -1     3    -1     0    -2     7
    -1    -1     7     0    -3     0
    -3     6     1     0     1    -2
    -3    -1     0     3     6     6
```

- Určte ten stĺpec matice A , ktorého stĺpcová norma je najväčšia. Porovnajte jeho stĺpcovú normu so stĺpcovou normou matice!
- Určte ten riadok matice, ktorého riadková norma – ako norma vektora – je najväčšia. Viete tú maximálnu riadkovú normu jednotlivých riadkov matice získať príkazom MATLABu?
- Určte ten stĺpec matice A , ktorého riadková norma (ako norma vektora) je najväčšia. Viete ju získať príkazom MATLABu?
- Určte ten riadok matice, ktorého stĺpcová norma – ako norma vektora – je najväčšia. Viete ju získať príkazom MATLABu?

Riešenie.

- Stĺpcová norma jednotlivých stĺpcov sa rovná (zľava doprava): 8, 11, 9, 3, 12 a 15. Šiesty stĺpec má najväčšiu stĺpcovú normu. Jeho norma, t.j. číslo 15 je zároveň stĺpcová norma našej matice. V ML ju získame takto:

```
max( sum( abs(A) ) )
ans =
    15
```

Pretože ide o stĺpcovú normu A , jednoduchšie ju nájdeme príkazom " $\text{norm}(A, 1)$ ":

```
norm(A, 1)
ans =
    15
```

b) Riadková norma jednotlivých riadkov (riadky chápeme ako vektory) sa rovná (zhora dole): 7, 7, 6, 6. Prvé dva riadky majú najväčšiu riadkovú normu. V ML napr. takto:

```
max( max( abs(A') ) )
ans =
    7
```

c) Riadková norma jednotlivých stĺpcov (ako vektorov) sa rovná (zľava doprava): 3, 6, 7, 3, 6 a 7. Teda najväčšia je pre stĺpec 3 a 6. V ML:

```
max( max( abs(A) ) )
ans =
    7
```

d) Stĺpcová norma jednotlivých riadkov (ako vektorov) sa rovná (zhora dole): 14, 12, 13 a 19. Teda najväčšia je pre štvrtý riadok. V ML takto:

```
max( sum( abs(A') ) )
ans =
    19
```

Jednoduchšie požadovanú hodnotu dostaneme ako riadkovú normu matice A:

```
norm(A, inf)
ans =
    19
```

Chápanie noriem vektorov a matic sa zjednoduší, keď si uvedomíme, že na vektory sa treba pozerat' ako na matice rozmeru $[1, n]$, resp. $[m, 1]$. Normy matic hrajú kľúčovú úlohu pri vyšetrovaní podmienenosti lineárnych sústav a v iteračných metódach lineárnej algebry. Najčastejšie používame euklidovskú normu.

3.7.3 Uvažujme sústavu $A \cdot x = b$, kde matica A:

```
A =
    1    2    3    4
    2    3    4    5
    3    4    5    6
    4    5    6    7
```

Čo vieme o množine riešení (v klasickom zmysle) úlohy $A \cdot x = b$ v prípade našej matice A? (Diskutujte vzhľadom na regularitu resp. singularitu matice). Pre nasledujúce vektory pravej strany určte a popíšte množinu všetkých riešení úlohy $A \cdot x = b$:

- $b = [9; 11; 13; 15]$
- $b = [-3; 6; 1; 1]$
- Existuje taký vektor b , aby sústava $A \cdot x = b$ mala jediné riešenie?

Riešenie. Ľahko sa príkazom "rank" zistí, že $\text{hod}(A) = 2$. Matica A je teda singulárna. Dimenzia priestoru stĺpcov sa rovná 2 a dimenzia nulového priestoru sa tiež rovná 2 (ZVLA). Ak vektor pravej strany leží v priestore stĺpcov, úloha má riešenie (a nutne má nekonečne veľa riešení, keď $\dim N(A) = 2$). Ak vektor pravej strany neleží v priestore stĺpcov, tak úloha nemá riešenie v klasickom zmysle.

- Daný vektor leží v priestore stĺpcov, lebo $\text{rank}(A) = \text{rank}([A, b])$. Množina riešení je nekonečná.

Popíšeme ju tak, ako je uvedené na strane 54. Najprv nájdime partikulárne riešenie:

```
xp = A\b
Warning: Matrix is singular to working precision.
xp =
    Inf
    Inf
    Inf
    Inf
```

Vidíme, že sme neuspeli príkazom "A\b". Preto použime "pinv":

```
xp = pinv(A)*b
xp =
   -0.7000
    0.1000
    0.9000
    1.7000
```

Overme, či vektor x_p je riešením v klasickom zmysle.

$A \cdot x_p - b$

```
ans =
    0
    0
    0
    0
```

V poriadku, máme partikulárne riešenie – je to vektor x_p . Všeobecné riešenie má tvar (inými slovami: nasledujúci zápis zachytáva každé riešenie úlohy)

$$w = x_p + Z \cdot q$$

kde x_p je nájdené partikulárne riešenie, $x_p = [-0.7; 0.1; 0.9; 1.7]$,

Z je matica, ktorej stĺpce tvoria bázu nulového priestoru matice A ,

q je akýkoľvek stĺpcový vektor dimenzie 2 (= dimenzie nulového priestoru matice A).

Maticu Z získame príkazom "null"

$Z = \text{null}(A)$

```
Z =
    0.3834    -0.3912
   -0.2196     0.8073
   -0.7109   -0.4411
    0.5472     0.0250
```

Overme, že napr. ak $q = [123; 456]$, tak naozaj vektor $w = x_p + Z \cdot q$ je riešením úlohy. Nájďme reziduálny vektor "rv", definovaný ako rozdiel ľavej a pravej strany systému: $rv = A \cdot w - b$ a presvedčme sa, že rv je nulový vektor.

$q = [123; 456]; w = x_p + Z \cdot q, rv = A \cdot w - b$

```
w =
   -131.9274
    341.2339
   -287.6855
     80.3791

rv =
    1.0e-012 *
   -0.5116
   -0.6821
   -0.7958
   -0.7958
```

V poriadku, zložky reziduálneho vektora sú prakticky nulové. Zopakujme: Všeobecné riešenie má tvar

$$w = x_p + Z \cdot q$$

kde x_p je partikulárne riešenie úlohy, $Z = \text{null}(A)$, q je ľubovoľný (stĺpcový) vektor, ktorého dimenzia sa rovná dimenzii nulového priestoru matice A . Overte, že w je riešením aj s inou voľbou vektora q ako s tou, s ktorou sme počítali!

b) Teraz daný vektor b , $b = [-3; 6; 1; 1]$ neleží v priestore stĺpcov matice A , pretože $\text{rank}([A, b]) = 3$ (overte!) a ako vieme z predchádzajúceho, $\text{rank}(A) = 2$. V tomto prípade úloha nemá riešenie v klasickom zmysle (ako sme uviedli, táto úloha sa týka diskusie okolo existencie riešení v klasickom zmysle).

c) Odpoveď na otázku znie: Taký vektor b neexistuje! To preto, lebo otázka jednoznačnosti riešenia, je otázka o nulovom priestore matice A , vektor pravej strany b tu nehrá žiadnu úlohu. Keďže nulový priestor A je netriviálny (veď má dimenziu 2) tak úloha – ak riešenie má – má nekonečne veľa riešení.

3.7.4 Uvažujme preurčenú sústavu s maticou A :

```
A =
     7     8     0     6
    -5     2    -5     0
    -1     0     0     3
    -5    -3     5     4
     4     3     5    -3
     3     5     7     7
```

Pre nasledujúce vektory pravej strany popíšte množinu riešení (riešenia v klasickom zmysle):

- a) $b = [26; -8; 9; 19; 4; 40]$
- b) $b = [20; -10; 5; 15; 3; 23]$
- c) Existuje taký vektor b , aby sústava $A \cdot x = b$ mala nekonečne veľa riešení?

Riešenie: Matica A sústavy má rozmer $[6, 4]$, úloha sa týka preurčenej sústavy (viď článok 3.3.2).

a) V tomto prípade $\text{rank}(A) = \text{rank}([A, b])$ (overte!) a to znamená, že úloha má riešenie v klasickom zmysle. Keďže $\text{hod}(A) = \text{rank}(A) = 4$ a matica má 4 stĺpce, zo ZVLA máme: $\dim(N(A)) = 0$. Preto úloha má jediné riešenie, riešením je teda jediný vektor a získame ho príkazom " $A \backslash b$ "

$x = A \backslash b$

$x =$

```

      0
    1.0000
    2.0000
    3.0000

```

Preverme! Nájdime reziduálny vektor $rv = A \cdot x - b$

$A \cdot x - b$

ans =

```

1.0e-013 *
    0.1421
    0.0355
    0.0355
         0
   -0.0355
    0.1421

```

Vidíme, že (až na chyby zo zaokrúhľovania) zložky vektora rv môžeme považovať za nulové. Zopakujeme, že riešením úlohy je jediný vektor $x = [0; 1; 2; 3]$.

- b) Overte, že pre vektor $b = [20; -10; 5; 15; 3; 23]$ máme $\text{rank}([A, b]) = 5$. Keďže $\text{rank}(A) = 4$, tak úloha nemá riešenie v klasickom zmysle, lebo $\text{rank}(A) < \text{rank}([A, b])$.
- c) Odpoveď na otázku znie: Nie! To, či úloha má nekonečne veľa riešení sa týka nulového priestoru matice a nie vektora pravej strany! Ako sme zistili, $\text{hod}(A) = 4$ a keďže A má 4 stĺpce, tak zo ZVLA vieme, že nulový priestor A má dimenziu 0. Preto sústava $A \cdot x = b$ nemá nekonečne veľa riešení.

3.7.5 Uvažujme sústavu s maticou A :

$A =$

```

    30    -40    50    -30
   -40    54   -68    40
    50   -68    86   -50
   -60    82  -104    60
    70   -96   122   -70
   -30    40   -50    30

```

Pre nasledujúce vektory pravej strany popíšte množinu riešení (riešenia v klasickom zmysle):

- a) $b = [-10; 14; -18; 22; -26; 10]$
- b) $b = [1; 2; 3; 4; 5; 6]$
- c) Existuje taký vektor b , aby sústava $A \cdot x = b$ mala jediné riešenie?

Riešenie. Namiesto riešenia len naznačme výsledky. V ďalšom sa musíte naučiť verifikovať správnosť Vašich výsledkov sami!

- a) Sústava má nekonečne veľa riešení. Vašou úlohou je dať popis množiny všetkých riešení, inými slovami, máte nájsť všeobecné riešenie sústavy.
- b) V tomto prípade úloha nemá riešenie.
- c) Taký vektor b neexistuje.

3.7.6 Nech je daná matica sústavy:

$A =$

```

    2    1   -3    0    5   -2
    8   -1    5    8    7    7
    5    8    7   -2   -1    3
   -1    0    0    8    1    0

```

Pre nasledujúce vektory pravej strany popíšte množinu riešení (riešenia v klasickom zmysle):

- a) $b = [-1; -3; 2; -2; 2; 10]$
- b) $b = [1; 2; 3; 4; 5; 6]$
- c) Existuje taký vektor b , aby úloha $A \cdot x = b$ mala jediné riešenie?
- d) Existuje taký vektor b , aby úloha nemala riešenie?

Riešenie. Vzhľadom na to, že v zadaní je OMYL, úlohu treba zmeniť! Matica sústavy má rozmer $[4, 6]$, a preto vektor pravej strany musí mať 4 zložky!

a) Nech $b = [-1; -3; 2; -2]$. Takto je zadanie zmysluplné (pôvodné zadanie je vecne chybné!). Máme popísať množinu riešení. Najprv zistíme hodnotu matice A :

rank(A)

ans =

4

Z tohoto plynie, že KAŽDÝ vektor pravej strany, a teda aj $b = [-1; -3; 2; -2]$ leží v priestore stĺpcov A . Preto úloha riešenie (klasické riešenie) má. Keďže počet stĺpcov A sa rovná 6, zo ZVLA vieme, že dimenzia nulového priestoru A sa rovná 2. Nájdime bázu nulového priestoru matice:

Z = null(A)

Z =

```
-0.6956    -0.1766
 0.0674     0.3301
 0.3927    -0.5740
-0.1567    -0.0159
 0.5584    -0.0492
 0.1449     0.7264
```

Partikulárne riešenie hľadáme najprv príkazom " $A \backslash b$ "

xp = A\b

xp =

```
-0.2228
 0.1224
 0.2256
-0.2779
      0
      0
```

Overme:

A*xp - b

ans =

```
1.0e-015 *
-0.2220
      0
 0.4441
-0.4441
```

Vskutku, x_p je partikulárne riešenie. Všeobecné riešenie má tvar

$$w = x_p + Z \cdot q$$

kde q je akýkoľvek (stĺpcový) vektor dimenzie 2 (pretože matica Z má dva stĺpce). Overte, že vskutku, pre akýkoľvek vektor q je vektor w riešením úlohy. Takto sme popísali nekonečnú množinu riešení.

b) Samozrejme aj v tejto časti treba zmeniť vektor b . Napríklad, nech $b = [3; 4; 5; 6]$. Táto časť sa rieši úplne analogicky ako časť a). Iné bude len partikulárne riešenie, všetko ostatné ostáva bez zmeny. Nájdite všeobecné riešenie, v ňom zvolte náhodne vektor q a overte, že vektor $w = x_p + Z \cdot q$ rieši úlohu!

c) Odpoveď znie: Nie. Dimenzia priestoru stĺpcov sa rovná 4, a preto pre ľubovoľný vektor b má úloha $Ax = b$ riešenie. Keďže nulový priestor A má dimenziu 2, úloha má (pre ľubovoľný vektor b) dokonca nekonečne veľa riešení.

d) Odpoveď na túto otázku sme už dali v rámci odpovede na otázku v c).

3.7.7 Zmysel tejto úlohy je ilustrovať, že riešenie úlohy $Ax = b$ príkazom `"x = inv(A).b"` dáva horšie výsledky ako sú tie, ktoré dostaneme príkazom `"x = A\b"`. Za maticu sústavy vezmite Hilbertove matice rozmerov (postupne): 9, 12, 14 (namiesto pôvodných 5,9,13 vezmime radšej 9, 12, 14).

Vektor pravej strany nech je zostavený tak, aby presné riešenie úlohy bol vektor jednotiek:

$x = \text{ones}(n,1)$, teda nech $b(i) = \text{sum}(A(i,:))$.

Vypisujte normu vektora rozdielov medzi získaným a presným riešením. Najprv uplatnením príkazu `"x = A\b"` a potom použitím inverzie, teda `"x = inv(A).b"`

```
for n = [9, 12, 14],
    A = hilb(n); b = (sum(A'))'; x = A\b; dif = norm(x - ones(n,1)),
end
dif =
    2.9625e-005
```

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.

Results may be inaccurate. RCOND = 2.409320e-017.

(Type "warning off MATLAB:nearlySingularMatrix" to suppress this warning.)

```
dif =
    0.3872
```

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.

Results may be inaccurate. RCOND = 1.708191e-019.

(Type "warning off MATLAB:nearlySingularMatrix" to suppress this warning.)

```
dif =
    5.5047
```

Výstraha MATLABu o zlej podmienenosti matice sa týka rozmerov 12 a 14.

Teraz riešme úlohu príkazom `"x = inv(A).b"`

```
for n = [9, 12, 14],
    A = hilb(n); b = (sum(A'))'; x = inv(A)*b; dif = norm(x - ones(n,1)),
end
dif =
    2.6508e-005
```

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.

Results may be inaccurate. RCOND = 2.632766e-017.

```
dif =
    0.6974
```

Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.

Results may be inaccurate. RCOND = 1.708191e-019.

```
dif =
    173.8564
```

Tieto výpočty sa realizovali v MATLABe vo verzii 6.5.1, a tak je možné, že sa nebudú zhodovať s tými, ktoré získate vo Vašej verzii MATLABu. Takéto experimentovanie je pohodlnejšie robiť prostredníctvom scriptov, resp. funkcií, ako ukážeme v nasledujúcej úlohe.

3.7.8 Experimentujme teraz porovnávaním "kvality" inverzie regulárnej, ale zle podmienenej matice, získanej príkazom `"inv"` s inverziou, ktorú dostaneme príkazom `"pinv"`. Jedna možnosť ako porovnať získané inverzie, je vyčísliť jednak normu matice $(A.\text{inv}(A) - I)$ a jednak normu $(A.\text{pinv}(A) - I)$. Ktorá inverzia sa ukáže presnejšou?

Je pohodlné písať kódy takých experimentov vo forme scriptov (prípadne funkcií). Na ukážku:

```
for n = 10:2:16
    A = hilb(n); B = inv(A); X = pinv(A);
    normklas_inv = norm(A*B - eye(n));
    normpseud_in = norm(A*X - eye(n));
    n, normy = [normklas_inv, normpseud_in],
end
```

Závěrečné úlohy sa týkajú riešení lineárnych sústav v zovšeobecnenom zmysle.

3.7.9 Daná je matica "rmat" rozšírenej sústavy. Rozhodnite, aké riešenie dostávame príkazom " $x = A \backslash b$ ".

```
rmat =
      1      2      3 |  1
      4      5      6 |  2
      7      8      9 |  2
     10     11     11 |  4
```

Je získané riešenie zhodné s tým, ktoré dáva príkaz " $x = \text{pinv}(A)*b$ " ?

Riešenie.

```
xbas = A\b;  xinv = pinv(A)*b;  [ xbas,  xinv]
ans =
    -2.1667    -2.1667
     3.6667     3.6667
    -1.3333    -1.3333
```

Ide o zovšeobecnené riešenie, keďže $\text{rank}(A) < \text{rank}([A, b])$, úloha riešenie v klasickom zmysle nemá. Overme, že vektor $b - A \cdot x_{bas}$ je kolmý na stĺpce matice A.

```
A'*(b - A*xbas)
```

```
ans =
    1.0e-013 *
    -0.7372
    -0.8349
    -0.8615
```

To sú prakticky nuly, a teda " x_{bas} " je naozaj riešenie v zovšeobecnenom zmysle.

3.7.10 Pozmeňme v sústave z predchádzajúcej úlohy len jeden prvok matice A. Nech $a(4,3) = 12$. Rozhodnite, aké riešenia úlohy dávajú teraz príkazy " $x = A \backslash b$ ", resp. " $u = \text{pinv}(A)*b$ ". Vysvetlite, čím je táto situácia rozdielna od predchádzajúcej. Ukážte, že vektor $u = \text{pinv}(A)*b$ leží v priestore riadkov matice A.

Riešenie. Najprv definujme A:

```
A =
      1      2      3
      4      5      6
      7      8      9
     10     11     12
```

```
rank(A)
```

```
ans =
      2
```

V tomto prípade, keď hodnota matice je menšia ako počet stĺpcov A, sa zovšeobecnené riešenia " x_{bas} " a " x_{inv} " budú líšiť.

```
xbas = A\b;  xinv = pinv(A)*b;  [xbas,  xinv]
```

```
Warning: Rank deficient, rank = 2   tol =  1.4594e-014.
```

```
ans =
    -0.0000    -0.0500
         0     0.1000
     0.3000     0.2500
```

Ako vidíme, je to tak. Ľavý stĺpec je bázičné riešenie – a ako také – má najviac 2 nenulové zložky (lebo hodnota sa rovná 2). V našej situácii má jednu nenulovú zložku.

O riešení " x_{inv} " máme ukázať, že leží v priestore riadkov A. Ukážeme to napr. tak, že ak pridáme vektor " x_{inv} " ako piaty riadok k matici A, hodnota novej matice bude rovnaká, teda bude sa rovnáť 2.

```
Anova = [ A; xinv']; rank(Anova)
```

```
ans =
      2
```