SOLOWOV MODEL RASTU SO SPOJITÝM ČASOM

Základy makroekonomickej teórie

PREDPOKLADY MODELU

- uvažujme predpoklady, ktoré sme stanovili pre Solowov model rastu s technologickým pokrokom v diskrétnom čase, tj.:
  - uzavretá ekonomika
  - úspory=investície ($S = I$)
  - $S(t) = sY(t)$, kde $s \in (0, 1)$ je sklon k úsporám (miera úspor)
  - produkčná funkcia je homogénna 1. stupňa, v dôsledku čoho môžeme prejsť k vyjadreniu premenných na efektívnu hlavu
  - potom $y = f(k)$, kde y - výstup ekonomiky na efektívnu hlavu je daný produkčnou funkciou f premennej k - kapitál na efektívnu hlavu, spĺňajúcou:
    - $f(0) = 0$
    - $f'(k) > 0$, tj. f je ostro rastúca
    - $f''(k) < 0$, tj. f je rýdzokonkávna
    - $\lim_{k \to 0+} f'(k) = +\infty$
    - $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$

RAST PRÁCE A TECHNOLÓGIÍ

- ďalej predpokladáme konštantnú rýchlosť rastu technologického pokroku (produktivity práce) g_A ako aj konštatnú rýchlosť rastu počtu zamestnanej pracovnej sily g_N:

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = g_A A \tag{1}$$

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = g_N N \tag{2}$$

- tzn. ak v čase $t = 0$ je $A(0) = A_0$ a $N(0) = N_0$, tak z (1), resp. (2) vyplýva, že v čase $t > 0$:

$$A(t) = A_0 e^{g_A t} \tag{3}$$

$$N(t) = N_0 e^{g_N t} \tag{4}$$

ČASOVÝ VÝVOJ KAPITÁLU

- vychádzame zo zákonu pohybu kapitálu pre Solowov model rastu s diskrétnym časom:

$$K(t+1) - K(t) = -\delta K(t) + sY(t),$$

kde $\delta \in (0,1)$ - amortizácia kapitálu

- ak teraz miesto $t+1$ volíme čas $t+h$ menší ako $t+1$, tj. $h \in (0,1)$, dostaneme:

$$K(t+h) - K(t) = h\big(sY(t) - \delta K(t)\big)$$

- z toho:

$$\frac{K(t+h) - K(t)}{h} = sY(t) - \delta K(t)$$

- ak prichádza k zmenám kontinuálne (tj. $h \to 0$), potom dostávame:

$$\frac{dK}{dt} = \dot{K} = sY - \delta K \qquad (5)$$

ČASOVÝ VÝVOJ KAPITÁLU NA EFEKTÍVNU HLAVU

- keďže $k = \frac{K}{AN}$, tak:

$$\begin{aligned}
\frac{dk}{dt} = \dot{k} &= \frac{\dot{K}(AN) - K(\dot{A}N + A\dot{N})}{(AN)^2} \\
&= \frac{\dot{K}}{AN} - \frac{K}{AN}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{N}}{N}\right) \\
&= \frac{\dot{K}}{AN} - k(g_A + g_N)
\end{aligned}$$

- z (5) vyplýva: $\frac{\dot{K}}{AN} = sy - \delta k = sf(k) - \delta k$, keďže $y = \frac{Y}{AN}$
- preto:

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + g_A + g_N)k, \tag{6}$$

kde $(\delta + g_A + g_N)$ je zovšeobecnená amortizácia

USTÁLENÉ MNOŽSTVO KAPITÁLU NA EFEKTÍVNU HLAVU

- ustálené množstvo kapitálu na efektívnu hlavu k^* bude také, ktoré sa nebude v čase meniť, tj. $\dot{k} = 0$
- rovnica $0 = h(k) = sf(k) - (\delta + g_A + g_N)k$ má dva korene: 0 a $k^* > 0$ také, že $sf(k^*) = (\delta + g_A + g_N)k^*$
- teda ustálené množstvo kapitálu na efektívnu hlavu, ktoré nás bude zaujímať, spĺňa:

$$0 = sf(k^*) - (\delta + g_A + g_N)k^* \tag{7}$$

- v bode k^* spĺňajúcom (7) platí: $sf'(k^*) < \delta + g_A + g_N$, tj. $h'(k^*) < 0$
- súčasne: $h(k) > 0$ pre $0 < k < k^*$ a $h(k) < 0$ pre $k > k^*$
- a teda $k(t)$ pre počiatočnú pozíciu $k_0 < k^*$ rastie ku k^* a $k(t)$ pre počiatočné $k_0 > k^*$ klesá ku k^* (lebo $\dot{k} = h(k)$)

ROVNOVÁŽNY RAST

- keďže k^* je pevný bod, tak podiel $\frac{K}{AN}$ ostáva v ustálenom stave nemenný (rovný k^*), tj. platí: $0 = (\dot{\frac{K}{AN}})$
- po úpravách dostaneme: $0 = \frac{\dot{K}}{K} - g_A - g_N$, resp.:
  $0 = \frac{\dot{\left(\frac{K}{N}\right)}}{\left(\frac{K}{N}\right)} - g_A$
- z čoho: $\dot{K} = (g_A + g_N)K$ - v pevnom bode rastie kapitál konštantnou rýchlosťou $(g_A + g_N)$, resp. $(\dot{\frac{K}{N}}) = g_A(\frac{K}{N})$ - v pevnom bode rastie kapitál na hlavu konštantnou rýchlosťou g_A
- to isté tvrdenie platí v pevnom bode aj pre Y, resp. $\frac{Y}{N}$

DOPAD ZMENY MIERY ÚSPOR

- predpokladajme, že v ekonomike je miera úspor $s = s_1$
- ak sa zvýši miera úspor z s_1 na s_2, zvýši sa aj rovnovážne množstvo kapitálu na efektívnu hlavu na $k_2^* > k_1^*$, kde k_1^* spĺňa: $s_1 f(k_1^*) = (\delta + g_A + g_N)k_1^*$ a k_2^* spĺňa: $s_2 f(k_2^*) = (\delta + g_A + g_N)k_2^*$
- hľadajme optimálnu voľbu miery úspor s, pri ktorej bude ustálená spotreba na efektívnu hlavu c^* maximálna
- rovnovážna hodnota kapitálu na efektívnu hlavu je funkciou s, tj. $k^* = k^*(s)$, preto aj rovnovážny výstup na efektívnu hlavu $y^* = f(k^*)$ je funkciou s: $y^* = y^*(s)$ a keďže $c = (1 - s)y$, tak aj rovnovážna spotreba na efektívnu hlavu je funkciou s: $c^* = c^*(s)$

MIERA ÚSPOR MAXIMALIZUJÚCA SPOTREBU

- zderivujme $c^* = f(k^*) - (\delta + g_A + g_N)k^*$ podľa s a postavme rovné nule, dostaneme:

$$0 = \frac{dc^*}{ds} = f'(k^*(s))\frac{dk^*}{ds} - (\delta + g_A + g_N)\frac{dk^*}{ds}$$

- pretože $\frac{dk^*}{ds} = \frac{-f(k^*(s))}{sf'(k^*(s))-(\delta+g_A+g_N)} > 0$, tak ustálená spotreba na efektívnu hlavu bude maximálna pre to s, pre ktoré $f'(k^*(s)) = (\delta + g_A + g_N)$, tj. keď hraničná produkcia sa rovná zovšeobecnenej amortizácii
- vzťah

$$f'(k^*) = (\delta + g_A + g_N) \tag{8}$$

sa nazýva zlaté pravidlo kapitálu

O RÝCHLOSTI KONVERGENCIE

- pretože $\dot{k} = h(k) = sf(k) - (\delta + g_A + g_N)k$ a $h'(k^*) = sf'(k^*) - (\delta + g_A + g_N)$, tak:

$$\dot{k} \cong h(k^*) + h'(k^*)(k - k^*)$$

- pretože $h'(k^*) < 0$, označme $-\lambda = h'(k^*)$, kde $\lambda > 0$
- potom:

$$\dot{k} \cong -\lambda(k - k^*)$$

keďže $h(k^*) = 0$

- platí $(k \dot{-} k^*) = \dot{k}$ a teda:

$$(k \dot{-} k^*) \cong -\lambda(k - k^*)$$

- čiže:

$$k(t) \cong k^* + e^{-\lambda t}(k_0 - k^*)$$

- teda k konverguje ku k^* približne konštantnou rýchlosťou

ÚLOHY

Úloha č. 1:

- Nech $Y = F(K, AN) = K^\alpha (AN)^{1-\alpha}$. Nech ďalej $y = \frac{Y}{AN}$, $k = \frac{K}{AN}$ a $y = f(k) = F(\frac{K}{AN}, 1)$. Nájdite $k^* = \left(\frac{K}{AN}\right)^*$ a $y^* = \left(\frac{Y}{AN}\right)^*$, kde $k^* > 0$ a $y^* > 0$. Nájdite mieru úspor s, pre ktorú je ustálená spotreba na efektívnu hlavu c^* maximálna.

Riešenie:

- $y = f(k) = F(\frac{K}{AN}, 1) = \left(\frac{K}{AN}\right)^\alpha = k^\alpha$
- v ustálenom stave má platiť: $(\delta + g_A + g_N)k^* = sf(k^*)$, preto: $k^* = \left(\frac{s}{\delta + g_A + g_N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- pretože $c^* = (1-s)f(k^*) = (1-s)(k^*)^\alpha = (1-s)\left(\frac{s}{\delta+g_A+g_N}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, tak $\frac{dc^*}{ds} = -\left(\frac{s}{\delta+g_A+g_N}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{1-s}{\delta+g_A+g_N}\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{s}{\delta+g_A+g_N}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}$
- z čoho pre $\frac{dc^*}{ds} = 0$ dostaneme $s = \alpha$

ROZŠÍRENIE O PRÍRODNÉ ZDROJE A PÔDU

- uvažujme Solowov model rastu rozšírený o prírodné zdroje R a pôdu T
- okrem vzťahov (1), (2), (5) platia vzťahy:

$$\dot{T}(t) = 0, \tag{9}$$

$$\dot{R}(t) = -g_R R(t), \tag{10}$$

kde $g_R > 0$

- (9) vyjadruje, že plocha pôdy sa v čase nemení a (10) vyjadruje, že množstvo prírodných zdrojov neustále klesá kvôli ich čerpaniu a následnému využívaniu vo výrobe
- produkčná funkcia:

$$Y(t) = [K(t)]^{\alpha}[R(t)]^{\beta}[T(t)]^{\gamma}[A(t)N(t)]^{1-\alpha-\beta-\gamma}, \tag{11}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ a súčasne $\alpha + \beta + \gamma < 1$

USTÁLENÝ STAV A RÝCHLOSTI RASTU

- z (5) dostávame:

$$g_K(t) = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s\frac{Y(t)}{K(t)} - \delta, \tag{12}$$

  kde $g_K(t)$ označuje rýchlosť rastu kapitálu v čase t
- za predpokladu existencie ustáleného stavu a za predpokladu, že g_K je v ustálenom stave konštantná, platí, že v ustálenom stave bude podiel produkcie ku kapitálu $\frac{Y(t)}{K(t)}$ konštantný
- v tom prípade však musia byť rýchlosti rastu kapitálu a produkcie v ustálenom stave rovnaké
- budeme to označovať $\tilde{g}_K$, resp. $\tilde{g}_Y$, resp. $\left(\frac{\tilde{Y}}{K}\right)$ a platí $\tilde{g}_K = \tilde{g}_Y$

RÝCHLOSŤ RASTU VÝSTUPU V USTÁLENOM STAVE

- upravujme (11), dostávame:

$$\ln Y(t) = \alpha \ln K(t) + \beta \ln R(t) + \gamma \ln T(t) \\ + (1-\alpha-\beta-\gamma)[\ln A(t) + \ln N(t)]$$

- z čoho:

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \alpha\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} + \beta\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} + \gamma\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} + (1-\alpha-\beta-\gamma)\left[\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} + \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}\right]$$

- čiže:

$$g_Y(t) = \alpha g_K(t) - \beta g_R + 0 + (1-\alpha-\beta-\gamma)(g_A + g_N) \quad (13)$$

- v ustálenom stave bude $\tilde{g}_K = \tilde{g}_Y$, preto:

$$\tilde{g}_K = \tilde{g}_Y = \frac{(1-\alpha-\beta-\gamma)(g_A+g_N) - \beta g_R}{1-\alpha} \qquad (14)$$

VYJADRENIE PODIELU Y/K V USTÁLENOM STAVE

- bežne uvažujeme o Y a K ako o kladných veličinách
- vychádzajúc z (14) a z (12) dostávame:

$$(1-\alpha)\tilde{g}_K = (1-\alpha)s\left(\frac{\tilde{Y}}{K}\right) - (1-\alpha)\delta$$

- z toho:

$$(1-\alpha)s\left(\frac{\tilde{Y}}{K}\right) = (1-\alpha-\beta-\gamma)(g_A+g_N) - \beta g_R + (1-\alpha)\delta$$

- aby $\left(\frac{\tilde{Y}}{K}\right) > 0$, predpokladáme:
  $(1-\alpha-\beta-\gamma)(g_A+g_N) - \beta g_R + (1-\alpha)\delta > 0$
- to sa dá dosiahnuť vhodnou voľbou parametrov α, β, γ, δ, g_R, g_A, g_N

STABILITA

- predpokladajme, že ekonomika sa nachádza v blízkosti pevného bodu
- uvažujme ďalej, že v čase $t = 0$ je $g_K(0) > \tilde{g}_K$, tj. aj $g_Y(0) > \tilde{g}_Y$
- pretože $\tilde{g}_K = \tilde{g}_Y$, tak $g_K(0) > \tilde{g}_Y$ a teda: $(1-\alpha)g_K(0) > (1-\alpha)\tilde{g}_Y = (1-\alpha-\beta-\gamma)(g_A + g_N) - \beta g_R$
- z toho: $g_K(0) > \alpha g_K(0) + (1-\alpha-\beta-\gamma)(g_A + g_N) - \beta g_R = g_Y(0)$
- skúmajme podiel $\frac{Y(t)}{K(t)}$ v čase:

$$\dot{\left(\frac{Y(t)}{K(t)}\right)} = \frac{\dot{Y}(t)K(t) - Y(t)\dot{K}(t)}{K^2(t)} = \frac{Y(t)}{K(t)}\Big(g_Y(t) - g_K(t)\Big)$$

- keďže $g_K(0) > g_Y(0)$, tak v čase $t = 0$ bude $\dot{\left(\frac{Y(0)}{K(0)}\right)} < 0$
- teda podiel $\frac{Y}{K}$ bude v čase klesať k $\left(\frac{\tilde{Y}}{K}\right)$
- keďže $g_K(t) = s\frac{Y(t)}{K(t)} - \delta$, tak g_K bude klesať k $\tilde{g}_K$

STABILITA

- podobne, ak uvažujme, že v čase $t = 0$ je $g_K(0) < \tilde{g}_K$, tak sa dá ukázať, že podiel $\frac{Y}{K}$ bude v čase rásť k $\left(\frac{\tilde{Y}}{K}\right)$ a teda g_K bude rásť k $\tilde{g}_K$
- inými slovami pevný bod je stabilný
- uvažujme ešte o rýchlosti rastu kapitálu na hlavu v ustálenom stave - označíme $\tilde{g}_{Y/N}$
- platí:

$$\tilde{g}_{Y/N} = \tilde{g}_Y - g_N = \frac{(1-\alpha-\beta-\gamma)g_A - \beta g_R - (\beta+\gamma)g_N}{1-\alpha}$$

- $\tilde{g}_{Y/N}$ môže byť rovnako kladný ako aj záporný
- klesajúce množstvo zdrojov a plocha pôdy na pracovníka spomaľuje rast, kým technologické inovácie ho urýchľujú
- ak rast technológií bude väčší než úbytok zdrojov a pôdy na pracovníka (alias: bude sa s dostupnými vstupmi narábať efektívnejšie), dá sa očakávať kladný rast výstupu na hlavu