RAMSEYOV MODEL RASTU

Základy makroekonomickej teórie

PREDPOKLADY MODELU

- uvažujeme uzavretú ekonomiku
- dynamika ekonomických agregátov je určená rozhodnutiami na mikroúrovni
- model odvádza evolúciu kapitálu v interakcii s maximalizáciou úžitku domácností a profitu firiem na dokonale konkurenčnom trhu
- miera úspor už viac nie je exogénna premenná a môže sa v čase meniť
- model predpokladá identické nekonečne dlho žijúce rodiny (domácnosti), ktorých snahou je maximalizovať celoživotný úžitok zo spotreby
- keďže sú identické, stačí vybrať jednu vzorovú rodinu
- ďalej predpokladáme, že veľkosť populácie sa v čase mení podľa vzťahu: $N(t) = N_0 e^{g_N t}$, kde g_N - rýchlosť rastu populácie a $N_0 > 0$ je veľkosť populácie v nejakom štartovacom čase $t = 0$

ČASOVÝ VÝVOJ KAPITÁLU

- produkcia je daná produkčnou funkciou $Y(t) = F(K(t), N(t))$ (obyčajne sa uvažuje Cobbova-Douglasova produkčná funkcia), kde $K(t)$ - kapitál v čase t a $Y(t)$ - výstup ekonomiky v čase t
- (podobne môžeme brať $F(K, AN)$), kde A reprezentuje technologický pokrok, resp. produktivitu práce)
- produkčná funkcia spĺňa predpoklady bližšie špecifikované pri Solowovom modeli rastu
- výstup sa v každom okamžiku rozdeľuje medzi spotrebu C a investície I:
$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{1}$$
- časový vývoj kapitálu sa riadi vzťahom:
$$\dot{K}(t) = -\delta K(t) + I(t), \tag{2}$$
kde $\delta \in (0, 1)$ - amortizácia kapitálu

ČASOVÝ VÝVOJ KAPITÁLU NA HLAVU A ÚŽITKOVÁ FUNKCIA

- označme $y = \frac{Y}{N}$, $k = \frac{K}{N}$, $c = \frac{C}{N}$ (premenné na hlavu) a $f(k) = F(\frac{K}{N}, 1)$
- potom časový vývoj kapitálu na hlavu sleduje:

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (\delta + g_N)k(t) - c(t), \qquad (3)$$

- úžitkovú funkciu budeme označovať u a je to funkcia premennej c
- platí: $u'(c) > 0$ pre každé $c > 0$ a $\lim_{c \to 0+} u'(c) = \infty$, $u''(c) < 0$ pre každé $c > 0$
- je to teda ostro rastúca, rýdzokonkávna funkcia, čo voľne povedané vyjadruje, že väčšia spotreba znamená väčšiu užitočnosť, ale čím ďalej je c od nuly, tým je aj prírastok v úžitku menší
- najčastejšie sa volí $u(c) = \ln c$ alebo $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, kde $\sigma \in (0, 1)$

MAXIMALIZAČNÁ ÚLOHA

- celkovo dostávame úlohu maximalizovať celoživotný úžitok zo spotreby $\int_0^\infty e^{-\theta t} u(c(t)) dt$, kde $\theta > 0$ je diskontný faktor, za účtovného obmedzenia (3) pri danom počiatočnom kapitále na hlavu $k_0 > 0$

$$
\begin{aligned}
\max_c \quad & \int_0^\infty e^{-\theta t} u(c(t)) dt \\
\text{za podmienky:} \quad & \dot{k}(t) = f(k(t)) - (\delta + g_N) k(t) - c(t) \\
& k_0 > 0 - \text{dané}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

- takto postavená úloha je úlohou optimálneho riadenia, v ktorej k je stavová premenná a c je riadiaca premenná (voľbou $c(t)$ pre každé $t \geq 0$ maximalizujeme celoživotný úžitok zo spotreby a súčasne určujeme zmenu $k(t)$ v každom čase)

AKO RIEŠIŤ ÚLOHU OPTIMÁLNEHO RIADENIA

- Pontrjaginov princíp maxima:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= f(k(t)) - (\delta + g_N)k(t) - c(t), \\ \dot{\psi}(t) &= -\psi(t)[f'(k(t)) - (\delta + g_N)] && (5) \\ 0 &= e^{-\theta t}u'(c(t)) - \psi(t) && (6) \end{aligned}$$

- dosadením (6) do (5) dostaneme:

$$\dot{\psi}(t) = -e^{-\theta t}u'(c(t))[f'(k(t)) - (\delta + g_N)] \qquad (7)$$

- súčasne z (6) máme:

$$\dot{\psi}(t) = -\theta e^{-\theta t}u'(c(t)) + e^{-\theta t}u''(c(t))\dot{c}(t) \qquad (8)$$

- z (7) a (8) spolu získame:

$$-\frac{u''(c)}{u'(c)}\dot{c} = f'(k) - (\delta + g_N + \theta) \qquad (9)$$

AKO RIEŠIŤ ÚLOHU OPTIMÁLNEHO RIADENIA

- iný postup:
- úlohu (4) môžeme upraviť dosadením (3) do účelovej funkcie:

$$\begin{aligned} \max_{c} \quad & \int_0^\infty e^{-\theta t} u\big(\dot{k}(t) - f(k(t)) + (\delta + g_N)k(t)\big)\, dt \\ & k_0 > 0 - \text{dané} \end{aligned} \tag{10}$$

- úlohu (10) nazývame úlohou variačného počtu
- označme: $f^0(t, k, \dot{k}) = e^{-\theta t} u\big(\dot{k}(t) - f(k(t)) + (\delta + g_N)k(t)\big)$
- nutnou podmienkou optimality je pre túto úlohu Eulerova rovnica:

$$\frac{\partial f^0(t, k, \dot{k})}{\partial k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^0(t, k, \dot{k})}{\partial \dot{k}}\right) = 0 \tag{11}$$

AKO RIEŠIŤ ÚLOHU OPTIMÁLNEHO RIADENIA

- pre našu úlohu:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f^0(t,k,\dot{k})}{\partial k} &= e^{-\theta t} u'(c(t))[f'(k(t)) - (\delta + g_N)] \\
\frac{\partial f^0(t,k,\dot{k})}{\partial \dot{k}} &= -e^{-\theta t} u'(c(t)) \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^0(t,k,\dot{k})}{\partial \dot{k}}\right) &= \theta e^{-\theta t} u'(c(t)) - e^{-\theta t} u''(c(t))\dot{c}
\end{aligned}
$$

- Eulerova rovnica:

$$
e^{-\theta t}\Big(u'(c(t))[f'(k(t)) - (\delta + g_N)] - \theta u'(c(t)) + u''(c(t))\dot{c} \Big) = 0
$$

- po úprave dostaneme $-\frac{u''(c)}{u'(c)}\dot{c} = f'(k) - (\delta + g_N + \theta)$, čo je vzťah (9)

DYNAMIKA V MODELI

- vzťahy (3) a (9) vytvárajú dynamický systém:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= f(k(t)) - (\delta + g_N)k(t) - c(t) \\ -\frac{u''(c)}{u'(c)}\dot{c} &= f'(k) - (\delta + g_N + \theta) \end{aligned}$$

- podmienka transverzality: $\lim_{t\to\infty} k(t)u'(c(t))e^{-\theta t} = 0$
- pevný bod systému (k^*, c^*) musí spĺňať:

$$k^* = (f')^{-1}(\delta + g_N + \theta) \tag{12}$$

$$c^* = f(k^*) - (\delta + g_N)k^* \tag{13}$$

- vzťah (12), tj. $f'(k^*) = \delta + g_N + \theta$, nazývame modifikované zlaté pravidlo kapitálu
- pevný bod (k^*, c^*) je nestabilný pevný bod typu "sedlo"
- ak však pri danom k_0 je c_0 také, že bod (k_0, c_0) leží na stabilnej variete ("ceste do pevného bodu"), tak ekonomika sa dopracuje k pevnému bodu (k^*, c^*)

ÚLOHY

Úloha č. 1:

- Nájdite vzťahy (3) a (9) pre $f(k) = k^\alpha$ a $u(c) = \ln c$, resp. pre $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, kde $\sigma \in (0, 1)$.

Riešenie:

- vzťah (3) pre $f(k) = k^\alpha$ vyzerá nasledovne:
  $\dot{k} = k^\alpha - (\delta + g_N)k - c$
- vzťah (9) pre $u(c) = \ln c$ vyzerá nasledovne:
  $\frac{\dot{c}}{c} = \alpha k^{\alpha-1} - (\delta + g_N)$
- vzťah (9) pre $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ vyzerá nasledovne:
  $\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}[\alpha k^{\alpha-1} - (\delta + g_N)]$

ÚLOHY

Úloha č. 2:

- Nájdite pevný bod dynamického systému (3), (9) pre $f(k) = k^\alpha$ a $u(c) = \ln c$, resp. pre $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$, kde $\sigma \in (0, 1)$.

Riešenie:

- pevný bod musí spĺňať:

$$
\begin{aligned}
0 &= f(k^*) - (\delta + g_N)k^* - c^* \qquad (14)\\
0 &= f'(k^*) - (\delta + g_N + \theta) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

- z (15) dostávame: $k^* = \left(\frac{\alpha}{\delta+g_N+\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- po dosadení za k^* do (14) dostávame: $c^* = \left(\frac{(1-\alpha)(\delta+g_N)+\theta}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\delta+g_N+\theta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$