

DLHODOBÝ RAST

Základy makroekonomickej teórie

SOLOWOV MODEL RASTU

- sledujeme vývoj ekonomiky v čase
- uvažujeme dlhé obdobie (desaťročia)
- čas je diskretný - postupuje v periódach
- veľkosť kapitálu sa v čase mení
- pre jednoduchosť predpokladáme, že N - počet pracovníkov, ostáva konštantný v čase (často sa stotožňuje s celkovým počtom obyvateľstva)

PRODUKČNÁ FUNKCIA

- agregátna (neoklasická) produkčná funkcia F - funkcia dvoch premenných:
 - K - fyzický kapitál (stroje, zariadenia, ...)
 - N - práca
- teda produkcia ekonomiky (HDP): $Y = F(K, N)$
- vlastnosti produkčnej funkcie:
 - pre konštantnú hodnotu K je F rastúcou a konkávnou funkciou práce N
 - pre konštantnú hodnotu N je F rastúcou a konkávnou funkciou kapitálu K
 - je homogénna 1. stupňa, tj. pre každé $a \in \mathbb{R}$ platí:
 $F(aK, aN) = aF(K, N)$ - tzn. predpokladáme, že ak počet pracovníkov a kapitálu zvýšime a -násobne, tak aj výstup ekonomiky sa zvýši a -násobne
- špeciálne, ak $a = \frac{1}{N}$, tak
$$F\left(\frac{K}{N}, \frac{N}{N}\right) = F\left(\frac{K}{N}, 1\right) = \frac{1}{N}F(K, N) = \frac{Y}{N}$$

REÁLNY HDP NA HLAVU

- označme:
 - $k = \frac{K}{N}$ - fyzický kapitál na ("pracujúcu") hlavu
 - $y = \frac{Y}{N}$ - výstup (HDP) na ("pracujúcu") hlavu (ak chceme porovnávať ekonomiky dvoch a viacerých krajín, je vhodnejšie merať množstvo produkcie danej krajiny v pomere k počtu jej obyvateľov, alias reálny HDP na hlavu, než len porovnať výstupy krajín)
 - $f(k) = F(\frac{K}{N}, 1)$ - produkčná funkcia ako funkcia jednej premennej - kapitálu na hlavu
- keďže F je homogénna 1. stupňa, platí teda: $y = f(k)$
- $f(k)$ je rastúca a konkávna funkcia premennej k
- zvyčajne sa ako produkčná funkcia používa Cobbova-Douglasova produkčná funkcia:
 $F(K, N) = K^\alpha N^{1-\alpha}$, kde $\alpha \in (0, 1)$
- potom: $f(k) = F(\frac{K}{N}, 1) = (\frac{K}{N})^\alpha = k^\alpha$
- pre prvú deriváciu funkcie f platí: $\lim_{k \rightarrow 0+} f'(k) = +\infty$, čo sa o f obyčajne taktiež predpokladá

VPLYV AKUMULÁCIE KAPITÁLU

- uvažujme uzavretú ekonomiku
- doteraz sme predpokladali: $I = S + (T - G)$, teda investície=celkovým úsporám (privátne úspory+vládne úspory)
- predpokladajme, že vláda má vyrovnaný rozpočet, tj. čo vyberie na daniach, to aj minie: $T = G$
- potom: $I = S$, kde $S = sY$ a $s \in (0, 1)$ - miera úspor (úspory tvoria podiel z HDP)
- po vydelení N dostaneme: $i = sy$, kde $i = \frac{I}{N}$ sú investície na hlavu
- teda to, čo sa usporí, sa použije v nasledujúcom období na zveľadenie kapitálu:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t, \quad (1)$$

kde $\delta \in (0, 1)$ je amortizácia kapitálu (kapitál sa opotrebuje)

ZÁKON POHYBU KAPITÁLU

- po dosadení $I_t = sY_t = sF(K_t, N)$ do vzťahu (1) získame:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, N)$$

- vydeľme obe strany rovnice N , dostaneme:

$$k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + sf(k_t), \quad (2)$$

čo je zákon pohybu kapitálu

- označme: $h(k) = (1 - \delta)k + sf(k)$, potom h je rastúca a konkávna funkcia premennej k
- platí teda: $k_{t+1} = h(k_t)$

ROVNOVÁŽNE MNOŽSTVO KAPITÁLU

- rovnovážne množstvo kapitálu na hlavu k^* bude také, ktoré sa nebude v čase meniť, tj. $k_{t+1} = k_t = k^*$ pre každé $t \geq 0$
- je to pevný bod zobrazenia h , tj. $k^* = h(k^*)$
- k^* teda musí spĺňať:

$$0 = sf(k^*) - \delta k^* \quad (3)$$

- $k^* > 0$ a je jediné také (to vyplýva z vlastností funkcie f)
- $y^* = f(k^*)$ je potom rovnovážne množstvo výstupu na hlavu prislúchajúce ku k^*
- otázkou zostáva, či ekonomika dokonverguje k tomuto rovnovážnemu stavu, ktorý predstavuje nemennosť výstupu a stabilitu hospodárstva a len nejakým vonkajším zásahom je možné ekonomiku z tohto bodu vychýliť
- druhým pevným bodom bude $k = 0$, ale tento pevný bod je nestabilný

KONVERGENCIA K PEVNÉMU BODU

- predpokladajme, že množstvo kapitálu v ekonomike je $k_0 > k^*$ a teda množstvo výstupu je $y_0 = f(k_0) > f(k^*) = y^*$
- potom $k_1 = (1 - \delta)k_0 + sf(k_0) > (1 - \delta)k^* + sf(k^*) = k^*$
- platí však: $k_1 < k_0$, pretože $sf(k_0) < \delta k_0$, ak $k_0 > k^*$
- ďalej potom $k_2 > k^*$ a súčasne $k_2 < k_1$
- vo všeobecnosti: $k_{t+1} > k^*$ a $k_{t+1} < k_t$ pre každé $t \geq 0$
- a teda k_t konverguje ku k^* pre $t \rightarrow \infty$
- podobne, ak uvažujeme $k_0 < k^*$, tak $k_1 = (1 - \delta)k_0 + sf(k_0) < (1 - \delta)k^* + sf(k^*) = k^*$ a súčasne $k_1 > k_0$, pretože $sf(k_0) > \delta k_0$, ak $k_0 < k^*$
- vo všeobecnosti: $k_{t+1} < k^*$ a $k_{t+1} > k_t$ pre každé $t \geq 0$
- takže k_t konverguje ku k^* pre $t \rightarrow \infty$
- hovoríme, že pevný bod k^* je (globálne) asymptoticky stabilný

ASYMPTOTICKÁ STABILITA PEVNÉHO BODU

- ukázať, že k^* je asymptoticky stabilný pevný bod, môžeme aj tak, že overíme, či je derivácia funkcie h v bode k^* v absolútnej hodnote menšia ako 1 (ak je väčšia ako 1, pevný bod bude nestabilný)
- overme to:
 - $h'(k) = 1 - \delta + sf'(k) > 0$ a teda $h'(k^*) = 1 - \delta + sf'(k^*)$
 - musí platiť $sf'(k^*) < \delta$, inak by sa krivky δk a $sf(k)$ v bode k^* nepretínali
 - preto teda $0 < h'(k^*) < 1 - \delta + \delta = 1$
- na druhej strane akokoľvek blízko bodu 0 ekonomika štartuje, pokiaľ začína v kladných číslach (tj. $k_0 > 0$), tak ho nikdy nedosiahne, lebo ako sme ukázali $k_1 > k_0$ a vo všeobecnosti $k_t > k_0$ pre všetky $t > 0$
- rovnako skúmajúc prvú deriváciu dostávame, že $\lim_{k \rightarrow 0+} h'(k) = +\infty$, lebo $\lim_{k \rightarrow 0+} f'(k) = +\infty$; teda $k = 0$ je nestabilný

AKO ZVÝŠIŤ ROVNOVÁŽNY VÝSTUP

- predpokladajme, že ekonomika je pri danej miere úspor s v rovnováhe, tj. $k = k^*$ a $y = y^*$
- čo sa stane, ak zvýšime mieru úspor?
- napr. uvažujme mieru úspor s_1 , potom pevný bod pri tejto miere úspor označme k_1^*
- k_1^* spĺňa (3), preto: $s_1 f(k_1^*) = \delta k_1^*$
- ak zvýšime s na $s_2 > s_1$, tak sa zvýši aj rovnovážne množstvo kapitálu na hlavu na $k_2^* > k_1^*$, kde k_2^* spĺňa: $s_2 f(k_2^*) = \delta k_2^*$
- vidíme, že hodnota pevného bodu k^* závisí od s , inými slovami $k^* = k^*(s)$ (k^* je funkciou premennej s implicitne zadanou v rovnici $-\delta k^* + s f(k^*) = 0$)
- vyššie k^* znamená aj vyšší ustálený výstup na hlavu y^*
- preto môžeme z dlhodobého hľadiska zvýšiť rovnovážny výstup na hlavu zvýšením sporenia
- ekonomika potom dokonverguje do nového rovnovážneho bodu k_2^*

KOLKO SPORIŤ

- z krátkodobého hľadiska ale viac sporiť znamená menej spotrebávať, hoci z dlhodobého hľadiska to v konečnom dôsledku môže znamenať aj navýšenie spotreby
- existuje preto nejaká optimálna voľba miery úspor, ktorá maximalizuje spotrebu?
- ak investície na hlavu sú $i = sy$, tak spotreba na hlavu je $c = (1 - s)y$ ("všetko, čo sa neusporí, sa zje")
- rovnovážna hodnota kapitálu na hlavu je funkciou s , tj. $k^* = k^*(s)$, preto aj rovnovážny výstup na hlavu $y^* = f(k^*)$ je funkciou s : $y^* = y^*(s)$ a teda rovnovážna spotreba na hlavu je funkciou s : $c^* = c^*(s)$
- chceme maximalizovať spotrebu na hlavu ako funkciu s , preto postavme: $\frac{dc^*}{ds} = 0$
- čomu sa rovná $\frac{dc^*}{ds}$?
- $\frac{dc^*}{ds} = -y^*(s) + (1 - s)\frac{dy^*}{ds} = -f(k^*(s)) + (1 - s)\frac{df(k^*)}{dk} \frac{dk^*}{ds}$

KOLKO SPORIŤ

- ďalej z (3) dostávame:

$$\begin{aligned}0 &= -\delta \frac{dk^*}{ds} + f(k^*(s)) + s \frac{df(k^*)}{dk} \frac{dk^*}{ds} \\ \frac{dk^*}{ds} &= \frac{-f(k^*(s))}{sf'(k^*(s)) - \delta}\end{aligned}$$

- na okolí bodu (s_1, k_1^*) platí $sf'(k) < \delta$, takže nedelíme nulou
- máme:

$$\frac{dc^*}{ds} = -f(k^*(s)) + (1-s)f'(k^*(s)) \frac{f(k^*(s))}{\delta - sf'(k^*(s))}$$

- to sa rovná nule práve vtedy, keď $f'(k^*(s)) = \delta$, keďže $f(k^*(s)) > 0$
- maximálnu spotrebu teda dosiahneme pre to s , pre ktoré platí: $f'(k^*(s)) = \delta$

ÚLOHY

Úloha č. 1:

- Uvažujte uzavretú ekonomiku. Nech produkčná funkcia je daná ako $F(K, N) = \sqrt{K}\sqrt{N}$, tj. $\alpha = \frac{1}{2}$. Ukážte, že F je homogénna 1. stupňa a pre $a = \frac{1}{N}$ odvodte produkčnú funkciu $f(k) = F(\frac{K}{N}, 1)$, kde $k = \frac{K}{N}$ - kapitál na hlavu.

Riešenie:

- F je homogénna 1. stupňa, pretože pre každé $a \in \mathbb{R}$ platí:
$$F(aK, aN) = \sqrt{aK}\sqrt{aN} = a\sqrt{K}\sqrt{N} = aF(K, N)$$
- ak $a = \frac{1}{N}$, potom: $F(aK, aN) = F(\frac{K}{N}, 1) = \sqrt{\frac{K}{N}}\sqrt{\frac{N}{N}} = \sqrt{k}$ a teda $f(k) = \sqrt{k}$

ÚLOHY

Úloha č. 2:

- Uvažujte uzavretú ekonomiku. Nech produkčná funkcia je daná ako $f(k) = k^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k}$, tj. $\alpha = \frac{1}{2}$. Nájdite pevný bod k^* zobrazenia $h(k) = (1 - \delta)k + sf(k)$, kde $\delta \in (0, 1)$ a $s \in (0, 1)$ je amortizácia kapitálu, resp. miera úspor. Pre nájdenny kladný pevný bod zobrazenia h ukážte, že $0 < h'(k^*) < 1$.

Riešenie:

- pevný bod k^* zobrazenia musí spĺňať:
 $k^* = (1 - \delta)k^* + s\sqrt{k^*}$, teda $\delta k^* = s\sqrt{k^*}$
- z toho: $k^* = (\frac{s}{\delta})^2$ alebo $k^* = 0$
- kladný pevný bod je $(\frac{s}{\delta})^2$
- derivácia funkcie h v tomto bode bude:
$$h'(k^*) = 1 - \delta + \frac{s}{2\sqrt{k^*}} = 1 - \delta + \frac{s}{2\frac{s}{\delta}} = 1 - \frac{\delta}{2}$$
- teda $0 < h'(k^*) < 1$

ÚLOHY

Úloha č. 3:

- Pre zadanie predchádzajúcej úlohy a nájdený pevný bod $k^* = (\frac{s}{\delta})^2$ maximalizujte ustálenú spotrebu na hlavu ako funkciu s .

Riešenie:

- ustálenú spotrebu na hlavu vypočítame zo vzťahu:
 $c^* = (1 - s)y^* = (1 - s)f(k^*)$
- keďže $f(k^*) = \sqrt{k^*} = \frac{s}{\delta}$, tak $c^* = c^*(s) = \frac{(1-s)s}{\delta}$
- maximalizujme c^* , tj. vypočítajme deriváciu $c^{*'}(s)$ a postavme ju rovnú nule, dostaneme:

$$0 = \frac{1 - 2s}{\delta}$$

- miera úspor maximalizujúca ustálenú spotrebu na hlavu $\hat{s}$ je potom: $\hat{s} = \frac{1}{2}$ ($= \alpha$)

TECHNOLOGICKÝ POKROK A RAST

- uvažujme Solowov model rastu s technologickým pokrokom A
- lepšie technológie zlepšujú produktivitu práce (preto sa niekedy ako A označuje produktivita práce) a teda zvyšujú výstup
- predpokladajme, že A vplýva na výšku výstupu spôsobom: $Y = F(K, AN)$, kde F spĺňa predpoklady stanovené na produkčnú funkciu tak, ako v predchádzajúcom
- ak označíme rýchlosť rastu technológií g_A , potom technológie sa vyvíjajú podľa vzťahu:

$$A_{t+1} = (1 + g_A)A_t \quad (4)$$

- podobne môžeme predpokladať, že aj pracovná sila rastie (s rastom veľkosti populácie)
- ak označíme rýchlosť rastu pracovníkov g_N , potom:

$$N_{t+1} = (1 + g_N)N_t \quad (5)$$

ZÁKON POHYBU KAPITÁLU

- pretože F je podľa predpokladu homogénna 1. stupňa, platí: $\frac{Y}{AN} = \frac{1}{AN} F(K, AN) = F(\frac{K}{AN}, 1)$
- označme $y = \frac{Y}{AN}$ - výstup na efektívnu hlavu, $k = \frac{K}{AN}$ - kapitál na efektívnu hlavu a $f(k) = F(\frac{K}{AN}, 1)$, potom $y = f(k)$
- rast efektívnej práce:

$$A_{t+1}N_{t+1} = (1 + g_A + g_N)A_tN_t, \quad (6)$$

kde číslo $g_A g_N$ je blízke nule a preto sme ho zanedbali

- zo vzťahu $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, A_tN_t)$ dostávame:

$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = (1 - \delta) \frac{K_t}{A_{t+1}N_{t+1}} + s \frac{F(K_t, A_tN_t)}{A_{t+1}N_{t+1}}$$
$$\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}N_{t+1}} = \frac{(1 - \delta)}{(1 + g_A + g_N)} \frac{K_t}{A_tN_t} + \frac{s}{(1 + g_A + g_N)} \frac{F(K_t, A_tN_t)}{A_tN_t}$$

ROVNOVÁŽNY STAV

- po úprave:

$$(1 + g_A + g_N)k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + sf(k_t), \quad (7)$$

- čo je zákon pohybu kapitálu pre model rastu s technologickým pokrokom
- v ustálenom (rovnovážnom) stave $k^* = k_t = k_{t+1}$ potom platí:

$$(\delta + g_A + g_N)k^* = sf(k^*) \quad (8)$$

- uvažujme len $k^* > 0$, potom rovnovážny výstup na efektívnu hlavu:

$$y^* = f(k^*) \quad (9)$$

je tiež kladné číslo

RÝCHLOSŤ RASTU KAPITÁLU A HDP

- v ustálenom stave $k^* = k_t = k_{t+1}$ a teda

$$\left(\frac{K}{AN}\right)^* = \frac{K_t}{A_t N_t} = \frac{K_{t+1}}{A_{t+1} N_{t+1}}$$

- z toho:

$$K_{t+1} = K_t \frac{A_{t+1} N_{t+1}}{A_t N_t}$$

$$K_{t+1} = (1 + g_A + g_N) K_t$$

- označme g_K rýchlosť rastu kapitálu, potom $g_K = g_A + g_N$
- podobne z $\left(\frac{Y}{AN}\right)^* = \frac{Y_t}{A_t N_t} = \frac{Y_{t+1}}{A_{t+1} N_{t+1}}$ dostávame:

$$Y_{t+1} = (1 + g_A + g_N) Y_t$$

- preto, ak g_Y je rýchlosť rastu HDP, potom $g_Y = g_A + g_N$
- opäť vhodnou voľbou s môžeme docieľiť v ustálenom stave maximálnu ustálenú spotrebu na efektívnu hlavu

ÚLOHY

Úloha č. 4:

- Nech $Y = F(K, AN) = \sqrt{K}\sqrt{AN}$. Ďalej nech $s = 0,16$, $\delta = 0,1$, $g_A = 0,04$ a $g_N = 0,06$. Nájdite $k^* = (\frac{K}{AN})^*$ a $y^* = (\frac{Y}{AN})^*$, kde $k^* > 0$ a $y^* > 0$.

Riešenie:

- $y = f(k) = F(\frac{K}{AN}, 1) = \sqrt{\frac{K}{AN}} = \sqrt{k}$
- v ustálenom stave má platiť: $(\delta + g_A + g_N)k^* = sf(k^*)$,
preto: $(0,1 + 0,04 + 0,06)k^* = 0,16\sqrt{k^*}$
- z toho: $k^* = 0,64$ (keďže nás zaujíma len kladné k^*)
- $y^* = \sqrt{0,64} = 0,8$