

ÚVOD DO TEÓRIE RACIONÁLNYCH OČAKÁVANÍ

Základy makroekonomickej teórie

JEDNODUCHÝ PŘÍKLAD

- predpokladajme, že inflácia sa vyvíja podľa nasledujúceho vzťahu:

$$\pi_{t+1} = \pi_t + \varepsilon_{t+1}, \quad (1)$$

kde $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$, tj. nezávisle, identicky distribuovaná premenná s nulovou strednou hodnotou a konštantnou varianciou, nazýva sa tiež *biely šum*

- označme očakávanie o hodnote π_{t+1} ako π_{t+1}^e , teda π_{t+1}^e je inflácia očakávaná v čase $t + 1$
- racionálne očakávania sú matematické očakávania v zmysle: $\pi_{t+1}^e = E[\pi_{t+1}|I_t]$, tj. ide o strednú hodnotu π_{t+1} za informácie známej v čase t
- keďže platí (1), tak máme:

$$E[\pi_{t+1}|I_t] = E[\pi_t + \varepsilon_{t+1}|I_t] = E[\pi_t|I_t] + E[\varepsilon_{t+1}|I_t] = \pi_t + 0 = \pi_t$$

- najlepšou predikciou súčasnej inflácie je inflácia z predchádzajúceho obdobia

JEDNODUCHÝ PŘÍKLAD

- takýto odhad inflácie by mal byť nevychýlený a efektívny:

$$E[\pi_{t+1} - \pi_{t+1}^e | I_t] = E[\pi_t + \varepsilon_{t+1} - \pi_t | I_t] = E[\varepsilon_{t+1} | I_t] = 0,$$
$$\text{Var}[\pi_{t+1} - \pi_{t+1}^e | I_t] = \text{Var}[\pi_t + \varepsilon_{t+1} - \pi_t | I_t] = \text{Var}[\varepsilon_{t+1} | I_t] = \sigma^2$$

- ak uvažujeme iný odhad v tvare $\pi_{t+1}^e = \pi_t + \beta\eta_t$, kde η_t je premenná z informačnej množiny v čase t , tak:

$$\text{Var}[\pi_{t+1} - \pi_{t+1}^e | I_t] = \text{Var}[\varepsilon_{t+1} - \beta\eta_t | I_t] = \sigma^2 + \beta^2 E[\eta_t^2] \geq \sigma^2,$$

kde sme využili, že ε so žiadnou inou premennou nekoreluje

STOCHASTICKÁ DIFERENČNÁ ROVNICA 1.RÁDU

- v modeloch s racionálnymi očakávaniami vystupujú agenti, ktorí všetci poznajú model a všetci majú rovnakú informáciu v každom čase t
- ekonomické premenné:
 - y - endogánná
 - x - exogánná
- stochastická diferenčná rovnica prvého rádu:

$$y_t = aE[y_{t+1}|I_t] + cx_t, \quad (2)$$

kde a, c sú nejaké reálne konštanty

- predpokladáme:

$$E[E[y_{t+2}|I_{t+1}]|I_t] = E[y_{t+2}|I_t] \quad (3)$$

$$E[y_t|I_t] = y_t \quad (4)$$

STOCHASTICKÁ DIFERENČNÁ ROVNICA 1.RÁDU

- keďže platí (2) a (3), tak dostávame:

$$\begin{aligned} E[y_{t+1}|I_t] &= E[aE[y_{t+2}|I_{t+1}] + cx_{t+1}|I_t] \\ &= aE[y_{t+2}|I_t] + cE[x_{t+1}|I_t] \end{aligned}$$

- potom:

$$\begin{aligned} y_t &= a^2 E[y_{t+2}|I_t] + acE[x_{t+1}|I_t] + cx_t \\ &= a^3 E[y_{t+3}|I_t] + a^2 cE[x_{t+1}|I_t] + acE[x_{t+2}|I_t] + cx_t \end{aligned}$$

- vo všeobecnosti:

$$y_t = a^T E[y_{t+T}|I_t] + c \sum_{i=0}^{T-1} a^i x_t E[x_{t+i}|I_t] \quad (5)$$

FUNDAMENTÁLNE RIEŠENIE

- predpokladajme ďalej, že:

$$|a| < 1 \text{ a súčasne pre každé } i \geq 0 \text{ platí: } \frac{|E[x_{t+i+1}|I_t]|}{|E[x_{t+i}|I_t]|} < \frac{1}{|a|} \quad (6)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} a^T E[y_{t+T}|I_t] = 0 \quad (7)$$

- prejdúc potom k limite pre $T \rightarrow \infty$ z (5) dostaneme:

$$y_t = \lim_{T \rightarrow \infty} a^T E[y_{t+T}|I_t] + c \sum_{i=0}^{\infty} a^i E[x_{t+i}|I_t] = c \sum_{i=0}^{\infty} a^i E[x_{t+i}|I_t] \quad (8)$$

- kde rad $c \sum_{i=0}^{\infty} a^i E[x_{t+i}|I_t]$ konverguje
- riešenie $y_t = c \sum_{i=0}^{\infty} a^i E[x_{t+i}|I_t]$ sa nazýva fundamentálne riešenie úlohy s racionálnymi očakávaniami; je to jedno z riešení úlohy (2)

AKCIE A DIVIDENDY

- predpokladajme, že cena akcie v čase t je p_t a akcia vypláca dividendu vo výške d_t
- nech reálny výnos z držby bezrizikových dlhopisov je r
- uvažujme, že v čase t mám k dispozícii p_t nepeňažných jednotiek, potom môžem buď kúpiť p_t kusov dlhopisov za cenu 1 za kus alebo nakúpiť 1 akciu v cene p_t
- v čase $t + 1$ potom budem mať buď výnos z dlhopisov vo výške rp_t alebo akciu v očakávanej cene $E[p_{t+1}|I_t]$, ktorú môžem prediť a ktorá vypláca dividendu d_t ; ak uvažujem o predaji, tak môj výnos bude $E[p_{t+1}|I_t] - p_t + d_t$
- aby nebola arbitráž, musí platiť:

$$rp_t = E[p_{t+1}|I_t] - p_t + d_t$$

- po úprave:

$$p_t = \frac{1}{1+r} E[p_{t+1}|I_t] + \frac{d_t}{1+r}, \quad (9)$$

AKCIE A DIVIDENDY

- rovnica (9) je stochastická diferenčná rovnica prvého rádu, v ktorej cena akcie je endogénnou premennou, výška dividendy exogénnou premennou a pre konštanty a, c platí: $a = c = \frac{1}{1+r}$
- za predpokladov:

$$r > 0 \text{ a pre každé } i \geq 0 \text{ platí: } \frac{|E[d_{t+i+1}|I_t]|}{|E[d_{t+i}|I_t]|} < 1 + r, \quad (10)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+r)^T} E[p_{t+T}|I_t] = 0, \quad (11)$$

dostávame fundamentálne riešenie (9):

$$p_t = \frac{1}{1+r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^i} E[d_{t+i}|I_t], \quad (12)$$

teda súčasná cena akcie je súčtom súčasných hodnôt očakávaných dividend

FUNDAMENTÁLNE RIEŠENIE

- predpoklady (10), (11) sú rozumné predpoklady, pretože reálny úrok je skutočne kladné číslo a relatívna očakávaná zmena dividend bude v každom čase menšia ako reálny úrok (predpoklad (10)), rovnako je rozumné očakávať, že súčasná hodnota ceny akcie v ∞ ("na konci vekov") je nulová (predpoklad (11))
- ľudia sa však často nesprávajú podľa týchto predpokladov
- práve v prípadoch, keď uvažujú viac nad špekulatívnym predajom akcie než nad výplatom v podobe dividend, vzniká bublina

ÚLOHY

Úloha č. 1:

- Nájdite cenu akcie p_t zo vzťahu (12) (tj. fundamentálne riešenie), ak akcia vypláca konštantné dividendy vo výške D .

Riešenie:

- dosadením $E[d_{t+i}|I_t] = D$ do vzťahu (12) dostaneme:

$$p_t = \frac{1}{1+r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D}{(1+r)^i} = \frac{1}{1+r} \frac{D}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{D}{r}$$

ÚLOHY

Úloha č. 2:

- Nájdite cenu akcie p_t zo vzťahu (12) (tj. fundamentálne riešenie), ak akcia vypláca v čase t dividendu vo výške D a v ďalších rokoch dividendy rastúce rýchlosťou $G < r$.

Riešenie:

- dosadením $E[d_{t+i}|I_t] = D(1 + G)^i$ do vzťahu (12) dostaneme:

$$p_t = \frac{1}{1+r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D(1+G)^i}{(1+r)^i} = \frac{1}{1+r} \frac{D}{1 - \frac{1+G}{1+r}} = \frac{D}{r-G}$$

ÚLOHY

Úloha č. 3:

- Predpokladajte, že vývoj výšky dividend sa riadi vzťahom:
 $d_{t+1} - \bar{d} = \rho(d_t - \bar{d}) + \varepsilon_{t+1}$, kde $\bar{d}$ - dlhodobá stredná hodnota dividend, $\rho \in (0, 1)$, $\varepsilon_t \sim \text{idd}(0, \sigma^2)$. Nájdite cenu akcie p_t zo vzťahu (12).

Riešenie:

- z $d_{t+1} - \bar{d} = \rho(d_t - \bar{d}) + \varepsilon_{t+1}$ máme pre každé t :
 $E[d_{t+1}|I_t] = \rho(d_t - \bar{d}) + \bar{d}$
- z toho potom: $E[d_{t+i}|I_t] = \rho^i(d_t - \bar{d}) + \bar{d}$ pre $i \geq 0$
- dosadením za $E[d_{t+i}|I_t]$ do vzťahu (12) dostaneme:

$$p_t = \frac{1}{1+r} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i(d_t - \bar{d}) + \bar{d}}{(1+r)^i} = \frac{d_t - \bar{d}}{1+r-\rho} + \frac{\bar{d}}{r}$$

CAGANOV MODEL DOPYTU PO PENIAZOCH

- označme:
 - M_t^D - dopyt po peniazoch v čase t
 - M_t^S - ponuka peňazí v čase t
 - P_t - cenová hladina v čase t
 - $\pi_t^e = \frac{E[P_{t+1}|I_t] - P_t}{P_t}$ - očakávaná miera inflácie v čase t
- potom:

$$\frac{M_t^D}{P_t} = e^{-\alpha \pi_t^e}, \text{ kde } \alpha > 0$$

- pri rovnováhe na trhu peňazí máme:

$$\frac{M_t^S}{P_t} = \frac{M_t^D}{P_t} = e^{-\alpha \pi_t^e} \quad (13)$$

- po zlogaritmovaní:

$$\ln M_t^S - \ln P_t = -\alpha \pi_t^e = -\alpha \frac{E[P_{t+1}|I_t] - P_t}{P_t} \quad (14)$$

CAGANOV MODEL DOPYTU PO PENIAZOCH

- pretože platí: $\frac{E[P_{t+1}|I_t]}{P_t} = E[\frac{P_{t+1}}{P_t}|I_t]$, z (14) dostaneme:

$$\ln M_t^S - \ln P_t = -\alpha E\left[\frac{P_{t+1}}{P_t} | I_t\right] + \alpha$$

- po preznačení:

- $m_t = \ln M_t^S$
- $p_t = \ln P_t$

a s využitím: $x \cong 1 + \ln x$, dostaneme:

$$\begin{aligned} m_t - p_t &= -\alpha(E[p_{t+1}|I_t] - p_t) \\ p_t &= \frac{\alpha}{1+\alpha} E[p_{t+1}|I_t] + \frac{m_t}{1+\alpha} \end{aligned} \quad (15)$$

- fundamentálne riešenie:

$$p_t = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^i E[m_{t+i}|I_t] \quad (16)$$

MONETÁRNA POLITIKA CENTRÁLNEJ BANKY

- predpokladajme, že:
 - monetárna politika centrálnej banky (ďalej CB) je do času T : m_0 , tj. $m_t = m_0$ v časoch $0 \leq t < T$
 - v čase T nastane zmena monetárnej politiky na: m_T , tj. $m_t = m_T$ v časoch $t \geq T$
 - zmena bude ohlásená v čase $0 < t_0 < T$
- čo sa bude diať s p_t ?
- v časoch $0 \leq t < t_0$ predpokladáme $E[m_{t+i}|I_t] = m_0$ pre každé i , teda máme:

$$p_t = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^i m_0 = m_0, \quad (17)$$

tj. cenová hladina je daná ponukou peňazí m_0

MONETÁRNA POLITIKA CENTRÁLNEJ BANKY

- v časoch $t_0 \leq t < T$ bude:

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{T-t-1} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^i m_0 + \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=T-t}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^i m_T \\ &= \frac{m_0}{1+\alpha} \left(\frac{1 - \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{T-t}}{1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}} \right) + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{T-t} m_T \\ &= m_0 + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{T-t} (m_T - m_0), \end{aligned} \quad (18)$$

s t blížiacim sa k T bude cenová hladina narastať k m_T

- v časoch $t \geq T$ bude:

$$p_t = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^i m_T = m_T \quad (19)$$

MONETÁRNA POLITIKA CENTRÁLNEJ BANKY

- teraz predpokladajme, že monetárna politika sa riadi vzťahom: $M_t^S = M_0 e^{g_0 t}$
- resp. po zlogaritmovaní: $m_t = m_0 + g_0 t$
- CB v čase $t_0 > 0$ ohlásí, že od času $T > t_0$ sa bude monetárna politika riadiť podľa: $M_t^S = M_T e^{g_T t}$, po zlogaritmovaní: $m_t = m_T + g_T t$
- ako sa bude teraz meniť p_t ?
- v časoch $0 \leq t < t_0$ predpokladáme $E[m_{t+i}|I_t] = m_0 + g_0 t + g_0 i$ pre každé $i \geq 0$, teda máme:

$$p_t = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^i (m_0 + g_0 t + g_0 i) = m_0 + g_0(t + \alpha), \quad (20)$$

MONETÁRNA POLITIKA CENTRÁLNEJ BANKY

- v časoch $t_0 \leq t < T$ bude:

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{T-t-1} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^i (m_0 + g_0 t + g_0 i) + \\ &\quad \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=T-t}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^i (m_T + g_T t + g_T i) \\ &= m_0 + g_0(t + \alpha) + \\ &\quad \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^{T-t} \left(m_T - m_0 + (g_T - g_0)(T + \alpha) \right) \quad (21) \end{aligned}$$

- v časoch $t \geq T$ bude:

$$p_t = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^i (m_T + g_T t + g_T i) = m_T + g_T(t + \alpha) \quad (22)$$

BUBLINY

- skúmame situáciu, keď predpoklad (7) nie je splnený
- označme y_t^* - fundamentálne riešenie rovnice (2)
- uvažujme riešenie v tvare $y_t = y_t^* + b_t$, kde b_t - odchýlka spĺňajúca: $b_t = aE[b_{t+1}|I_t]$ pre každé t
- ukážeme, že y_t je skutočne riešenie (2)
- platí:

$$E[y_{t+1}|I_t] = E[y_{t+1}^*|I_t] + E[b_{t+1}|I_t]$$

- po dosadení do (2) máme:

$$y_t = aE[y_{t+1}^*|I_t] + aE[b_{t+1}|I_t] + cx_t$$

- keďže y_t^* je riešením (2) a $y_t = y_t^* + b_t$, tak dostávame:

$$y_t^* + b_t = y_t^* + aE[b_{t+1}|I_t]$$

- pretože však $b_t = aE[b_{t+1}|I_t]$ pre každé t , dostávame identitu

EXPANDUJÚCE BUBLINY

- odchýlku b_t nazývame bublina
- ak napr. $b_{t+1} = \frac{b_t}{a}$, tj. $b_t = b_0 a^{-t}$, kde $b_0 > 0$ - ľubovoľné, tak $b_t > 0$ pre každé t a bublina expanduje
- uvažujme napr., že akcia vypláca konštantné dividendy vo výške D a teda z úlohy č. 1 vieme, že fundamentálne riešenie má tvar: $p_t^* = \frac{D}{r}$
- potom riešenie $p_t = p_t^* + b_t = \frac{D}{r} + \frac{b_0}{a^t}$
- cena akcie bude rásť tempom rastu b_t , hoci sú dividendy konštantné
- keďže sme predpokladali $0 < a < 1$, tak prejdúc k limite pre $t \rightarrow \infty$ dostávame:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t = \infty$$

PRASKAJÚCE BUBLINY

- tentokrát predpokladáme, že existuje nenulová pravdepodobnosť $1 - q$, že bublina b_t praskne každú periódu
- uvažujeme napr.:

$$b_{t+1} = \begin{cases} \frac{b_t}{aq} + \varepsilon_{t+1}, & \text{s pravdepodobnosťou } q \\ \varepsilon_{t+1}, & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - q \end{cases}$$

kde $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$

- bublina praskne s pravdepodobnosťou $1 - q$ každú periódu a s pravdepodobnosťou q bude ďalej rásť
- ak praskne, jej očakávaná hodnota sa vráti na nulu; aby bola kompenzovaná pravdepodobnosť prasknutia, očakávaná hodnota v prípade neprasknutia bude vyššia
- šum ε_t dovoľuje vznik nových bublín po tom, čo praskli
- keďže $E[b_{t+1}|I_t] = q\frac{b_t}{aq} + 0 + (1 - q)0 = \frac{b_t}{a}$, tak $y_t = y_t^* + b_t$ je riešenie (2)

PRASKAJÚCE BUBLINY A ELIMINÁCIA BUBLÍN

- poznamenajme, že ε_t môže byť korelovaný s neočakávanými pohybmi v ľubovoľnej premennej, tj. ak trh verí, že neočakávané zmeny v niečom inom ovplyvňujú napr. cenu akcie, tak je pravdepodobné, že sa tak aj skutočne stane
- v dôsledku toho vznikajú špekulatívne bubliny
- existuje predpoklad, že večne rastúce (expandujúce) bubliny nebudú existovať, lebo to nie je konzistentné s predpokladom konečnosti ekonomiky
- ďalej napr. ak existuje substitút nejakého tovaru a je dostupný pri nekonečne veľkej elasticite ponuky, tak nemôže rásť cena tohto tovaru do nekonečna, pretože pri prekročení istej hodnoty by spotrebitelia prešli k substitútu
- ľudia očakávajú bubliny skôr pri cenách tovarov s nejakými neurčitostami (zlato, umenie, cudzie meny) než napr. pri dlhopisoch, kde sú pevné nominály vyplácané v budúcnosti dohodnuté dnes

NEKONEČNE VEĽA RIEŠENÍ

- pri porušení predpokladu $|a| < 1$ rad $\sum_{i=0}^{\infty} a^i E[x_{t+i}|I_t]$ vo všeobecnosti nemusí konvergovať a existuje nekonečne veľa bublín, ktoré sú skôr stabilné než explodujúce
- nech napr. $x_t = 1$ pre každé t a uvažujme riešenie (2) v tvare: $y_t = \frac{c}{1-a} + b_t$, kde $b_{t+1} = \frac{b_t}{a} + \varepsilon_{t+1}$, $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ a $a > 1$
- čiže napr. ak $\varepsilon_t = 0$ pre každé t , tak $y_t \rightarrow \frac{c}{1-a}$ pre ľubovoľné počiatkové y_0 a $t \rightarrow \infty$
- bez ďalších špecifikácií je ťažké rozhodnúť, prečo vybrať toto riešenie než ľubovoľné iné a mnoho riešení je v tomto prípade skôr na škodu