

TEÓRIA PORTFÓLIA

Základy finančnictva

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva>

AKO INVESTOVAŤ

- Každý investor sleduje tri základné hľadiská:
 1. **výnos** – príjmy, ktoré z investície plynú,
 2. **bezpečnosť (riziko)** – stupeň (ne)istoty týkajúci sa očakávaných výnosov z investície,
 3. **likvidita** – rýchlosť, ktorou je schopný premeniť investíciu na hotovosť.
- Tieto tri hľadiská tvoria investičný trojuholník; trojuholník preto, lebo nie je možné všetky tri naraz maximalizovať; jedno potláča druhé.
- **Zlaté pravidlo investovania** hovorí, že neexistuje investícia, ktorá by dosiahla maximum vo všetkých troch ukazovateľoch; existuje len možnosť optimálneho pomeru výnosov, bezpečnosti a likvidity.

VÝNOS

- Akým spôsobom určiť očakávaný výnos a vypočítať riziko bezdividendových akcií sme zistili už v predchádzajúcej prednáške.
- Len poznamenajme, že výnos aktíva ako náhodná premenná môže mať aj iné než diskkrétne rozdelenie popísané v predchádzajúcej prednáške.
- Dáta naznačujú, že pri niektorých rizikových cenných papieroch by mohlo ísť o normálne rozdelenie, ktoré je spojitým rozdelením. Každopádne výnosnosť cenného papiera sa aj v tomto prípade určuje ako stredná hodnota a rizikovosť ako smerodajná odchýlka.
- Obyčajne s vyšším výnosom sa spája i vyššie riziko.

RIZIKO

- Pri analýze rizika sa zvykne investor spoliehať na subjektívne odhady, ale, ako bolo spomenuté vyššie, existujú aj objektívne odhady opierajúce sa o pravdepodobnostný model; riziko pri tom odhaduje tak, že skúma rozdelenie pravdepodobnosti očakávaných výnosov.
- **Rizikovosť aktív** – zoradenie od najmenej rizikových k najviac rizikovým:
 1. nehnuteľnosti, drahé kovy, starožitnosti, zbierky
 2. štátne a komunálne dlhopisy, zúročené peňažné vklady so štátnou garanciou, pokladničné poukážky, depozitné certifikáty
 3. zástavné listy, poisťky a renty
 4. podnikové obligácie
 5. zmenky, finančná spoluúčasť
 6. akcie, podnikateľské projekty
 7. opcie, termínované kontrakty

LIKVIDITA

- **Likvidita aktív** – zoradenie od najlikvidnejších k najmenej likvidným:
 1. hotovosť
 2. bankové vklady, štátne pokladničné poukážky, depozitné certifikáty, zlato, dlhopisy, akcie kótované na burze
 3. akcie nekótované na burze, majetkové poukážky investičných fondov
 4. CP s obmedzeným obchodovaním
 5. neprenosné CP, nehnuteľnosti, finančná spoluúčasť, umelecké predmety, podnikateľské projekty
- V teórii portfólia sa budeme zaoberať rizikovými aktívami, ktoré sú vysoko likvidné a záujemca o ich kúpu, či predaj obyčajne nemá problém zohnať protistranu na uskutočnenie obchodu. Preto budeme v ďalšom sledovať iba dva faktory: výnos a riziko.

PORTFÓLIO

- **Portfólio** – súbor niekoľkých rôznych investícií,
- pri skladaní portfólia sa investor snaží nájsť optimálny pomer medzi výnosmi a rizikom,
- nech
 - N – počet cenných papierov v portfóliu,
 - C_i - hodnota CP_i na začiatku sledovaného obdobia,
 - D_i - očakávaná hodnota CP_i na konci sledovaného obdobia,
 - P_i - počet kusov CP_i ,
- kde $i = 1, 2, \dots, N$,
- potom váha CP_i v portfóliu je $x_i = \frac{P_i C_i}{P}$, kde $P = \sum_{i=1}^N P_i C_i$ - hodnota celého portfólia na začiatku obdobia,
- platí: $\sum_{i=1}^N x_i = 1$.
- Označme $E(r_i) = \frac{D_i - C_i}{C_i}$ - očakávaný výnos CP_i ,
- potom očakávaný výnos portfólia za dobu držania:

$$E(r_P) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i (D_i - C_i)}{P} = \sum_{i=1}^N x_i \frac{D_i - C_i}{C_i} = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i).$$

PRÍKLAD

- Investor kúpi tri akcie: Alfa, Beta, Gamma. Tieto akcie tvoria investorovo portfólio. Očakáva vzostup ich ceny a potom ich chce po roku prediť. Aký bude očakávaný výnos (výnosové percento) portfólia za dobu držania?

akcia	počet kusov	cena za kus	bežná hodnota	očakávaná cena za kus	očakávaná hodnota
Alfa	10	40	400	42	420
Beta	20	35	700	40	800
Gamma	10	62	620	70	700
			bežná hodnota portfólia:	1720	očakávaná hodnota portfólia: 1920

- očakávaný výnos portfólia za dobu držania:

$$E(r_P) = \frac{1920 - 1720}{1720} = \frac{200}{1720} \doteq 0,1163 \text{ (11,63\%)}$$

PRÍKLAD

- Aké sú váhy a očakávané výnosy akcií v portfóliu?

akcia	bežná hodnota	váha akcie	očakávaný výnos akcie
Alfa	400	$400/1720 = 0,23$	$20/400 = 0,05$
Beta	700	$700/1720 = 0,41$	$100/700 = 0,14$
Gamma	620	$620/1720 = 0,36$	$80/620 = 0,13$
	1720	1,00	

- Skutočne potom:

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) = \frac{20}{1720} + \frac{100}{1720} + \frac{80}{1720} = \frac{200}{1720} \doteq 0,1163.$$

KORELAČNÁ ZÁVISLOSŤ

- Zmena hodnoty jednej zložky portfólia môže ovplyvňovať pp. hodnôt ostatných zložiek – **korelačná závislosť**,
- napr. investor nekúpi akcie áut a pneumatík, pretože sa dá očakávať, že ak nastane pokles hodnoty akcií automobilky, klesnú aj hodnoty akcií pneumatík,
- hovoríme, že hodnoty týchto CP sú **pozitívne korelované**,
- opakom pozitívnej korelácie je **negatívna korelácia** - v tomto prípade pokles hodnoty jedného aktíva má za následok nárast v hodnote druhého aktíva
- v praxi sa najčastejšie vyskytujú investície navzájom nesúvisiace – **nekorelované**.

KORELAČNÁ ZÁVISLOSŤ

- Najlepšie je investovať do negatívne korelovaných CP alebo aspoň nekorelovaných CP,
- rozkladanie investícií do portfólia sa nazýva **diverzifikácia rizika**,
- 20-30 rôznych CP obyčajne postačuje na to, aby sme eliminovali **nesystematické (jedinečné) riziko**,
- nedokážeme ňou však eliminovať **systematické (trhové) riziko**,
- riziko portfólia závisí na korelačnej závislosti jeho zložiek, ktorú meriame pomocou koeficientu korelácie.

TEÓRIA PORTFÓLIA

- Uvažujme N zložkové portfólio, kde x_i - váha CP_i v portfóliu pre $i = 1, 2, \dots, N$,
- očakávané výnosové percento portfólia vieme určiť zo vzťahu:

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i), \quad (1)$$

- kde $E(r_i)$ - očakávané výnosové percento CP_i .
- Variancia výnosnosti portfólia:

$$\sigma^2(r_P) = \sum_{i,j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}, \quad (2)$$

kde σ_{ij} sa rozumie σ_i^2 - variancia CP_i .

- Smerodajná odchýlka výnosnosti portfólia: $\sigma(r_P)$ - meriame ňou rizikovosť portfólia.

PRÍKLAD

- V ďalšom budeme kvôli úspore miesta používať r_P namiesto $E(r_P)$, resp. r_i namiesto $E(r_i)$ pre $i = 1, 2, \dots, N$,
- σ_P^2 miesto $\sigma^2(r_P)$, resp. σ_P miesto $\sigma(r_P)$.
- Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi **A**, **B** takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:

	výnosnosť	rizikovosť
Cenný papier A	$r_A = 10\%$	$\sigma_A = 5\%$
Cenný papier B	$r_B = 15\%$	$\sigma_B = 12\%$

- Vypočítajte očakávanú výnosnosť portfólia a jeho rizikovosť, ak váhy CP v portfóliu sú $x_A = 0,8$, $x_B = 0,2$ a koeficient korelácie je postupne $\rho_{AB} = 1$, $\rho_{AB} = -1$, $\rho_{AB} = 0$.

PRÍKLAD

1. ak $\rho_{AB} = 1$, potom: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = \sigma_A\sigma_B = 60$

- zo vzťahu (1) máme:

$$r_P = x_A r_A + x_B r_B = 0,8 \cdot 10 + 0,2 \cdot 15 = 11\%$$

- uvedený výpočet je platný pre akékoľvek ρ .
- zo vzťahu (2) máme:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + 2x_A x_B \sigma_{AB} + x_B^2 \sigma_B^2} \\ &= \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B + x_B^2 \sigma_B^2} \\ &= \sqrt{(x_A \sigma_A + x_B \sigma_B)^2} \\ &= x_A \sigma_A + x_B \sigma_B \\ &= 0,8 \cdot 5 + 0,2 \cdot 12 \\ &= 6,4\%\end{aligned}$$

PRÍKLAD

2. ak $\rho_{AB} = -1$, potom: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = -\sigma_A\sigma_B = -60$

- rizikovosť portfólia:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB} + x_B^2\sigma_B^2} \\ &= \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 - 2x_Ax_B\sigma_A\sigma_B + x_B^2\sigma_B^2} \\ &= \sqrt{(x_A\sigma_A - x_B\sigma_B)^2} \\ &= |x_A\sigma_A - x_B\sigma_B| \\ &= |0,85 - 0,212| \\ &= 1,6\%\end{aligned}$$

3. ak $\rho_{AB} = 0$, potom: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0$

- rizikovosť portfólia:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + 2x_Ax_B\sigma_{AB} + x_B^2\sigma_B^2} = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2} \\ &= 4,66\%\end{aligned}$$

MNOŽINA VŠETKÝCH PRÍPUSTNÝCH PORTFÓLIÍ

- Množina všetkých prípustných portfólií je množina všetkých kombinácií CP v portfóliu určená váhami x_i .
- Pre každú možnú kombináciu váh dostaneme jedno portfólio reprezentované jeho výnosnosťou a jeho rizikovosťou.
- Pre náš príklad s dvoma CP je táto množina reprezentovateľná v dvojrozmernom priestore krivkou pozostávajúcou zo všetkých bodov (σ_P, r_P) určených voľbou váh x_A , resp. x_B CP v portfóliu.
- Tiež ju možno chápať ako funkciu $\sigma_P = f(r_P)$ pre $r_P \in \langle r_A, r_B \rangle$, ak $r_A < r_B$, resp. ako kvadratickú funkciu $\sigma_P^2 = g(r_P) = Kr_P^2 + Lr_P + M$, kde $f(r_P) = \sqrt{g(r_P)}$.

PRÍKLAD

- Pre náš príklad:
- Vyjadrením x_A z rovnice (1) dostaneme:

$$x_A = \frac{r_P - r_B}{r_A - r_B}, \quad (3)$$

- odtiaľ:

$$x_B = 1 - x_A = \frac{r_A - r_P}{r_A - r_B}, \quad (4)$$

- Dosadením (3), (4) do (2) a následnými úpravami získame:

$$\sigma_P^2 = g(r_P) = Kr_P^2 + Lr_P + M,$$

$$\text{kde } K = \frac{\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2}{(r_A - r_B)^2}, \quad L = 2 \frac{(r_A + r_B)\sigma_{AB} - r_B\sigma_A^2 - r_A\sigma_B^2}{(r_A - r_B)^2} \text{ a}$$

$$M = \frac{r_A^2\sigma_B^2 - 2r_Ar_B\sigma_{AB} + r_B^2\sigma_A^2}{(r_A - r_B)^2}.$$

- Potom $\sigma_P = \sqrt{g(r_P)}$ pre $r_P \in \langle r_A, r_B \rangle$.

PRÍKLAD

- Konkrétne:

- pre $\rho_{AB} = 1$

- máme: $K = 1,96$, $L = -25,2$, $M = 81$ a teda:

$$\sigma_P = \sqrt{1,96r_P^2 - 25,2r_P + 81} = \sqrt{(1,4r_P - 9)^2} = 1,4r_P - 9$$

- pre $r_P \in \langle 10, 15 \rangle$ (úsečka)

- pre $\rho_{AB} = -1$

- máme: $K = 11,56$, $L = -265,2$, $M = 1521$ a teda:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{11,56r_P^2 - 265,2r_P + 1521} = \\ &= \sqrt{(39 - 3,4r_P)^2} = |39 - 3,4r_P|\end{aligned}$$

- pre $r_P \in \langle 10, 15 \rangle$ (absolútna hodnota),
- vidíme, že pre $r_P = \frac{390}{34}$ je možné úplne eliminovať riziko; toto sa dosiahne voľbou $x_A = \frac{12}{17} \doteq 0,7059$, $x_B = \frac{5}{17} \doteq 0,2941$.

- pre $\rho_{AB} = 0$

- máme: $K = 6,76$, $L = -145,2$, $M = 801$

EFEKTÍVNA MNOŽINA

- Spomedzi všetkých prípustných portfólií si investor vyberá podmnožinu tejto množiny, ktorá:
 - pri rôznych úrovniach rizika ponúka maximálnu výnosnosť,
 - pri rozličných úrovniach výnosnosti ponúka minimálne riziko.
- Takáto množina sa nazýva efektívna množina a na ňu sa investor zameriava pri hľadaní svojho optimálneho portfólia.
- Úlohu nájdania efektívnej množiny na množine všetkých prípustných riešení možno redukovať na úlohu nájdania množiny portfólií, ktoré pre danú výnosnosť poskytujú minimálne riziko a následne z takto získanej množiny vybrať tie portfólia, ktoré majú pri danom riziku najvyššiu výnosnosť.

EFEKTÍVNA MNOŽINA

- označme vektor váh CP v portfóliu ako $\vec{x}$, tj.
 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$
- nech C označuje kovariančnú maticu, tj.

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

- vzťah (2) potom možno prepísať do tvaru:

$$\sigma_P^2 = \vec{x}^T C \vec{x} \quad (5)$$

- samozrejme potom:

$$\sigma_P = \sqrt{\vec{x}^T C \vec{x}} \quad (6)$$

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY

- Označme $\vec{r}$ vektor výnosností jednotlivých CP v portfóliu, tj. $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)^T$,
- nech ďalej $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$, $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$ a R označuje danú výnosnosť.
- Úloha nájsť všetky portfólia poskytujúce pre danú výnosnosť minimálne riziko je ekvivalentná s úlohou minimalizácie druhej mocniny rizika pri danej výnosnosti portfólia.
- Je to úloha kvadratického programovania (U):

$$\min_{\vec{x} \geq \vec{0}} \quad \vec{x}^T C \vec{x}$$

$$\text{za podmienok: } \begin{aligned} \vec{x}^T \vec{r} &= R \\ \vec{x}^T \vec{1} &= 1 \end{aligned}$$

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY

- Riešiť úlohu (U) môžeme pre $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ ako úlohu na viazaný extrém.
- Predpokladajme, že matica C je kladne definitná.
- Napíšme Lagrangeovu funkciu pre túto úlohu:

$$L(\vec{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \vec{x}^T C \vec{x} + \lambda_1(R - \vec{x}^T \vec{r}) + \lambda_2(1 - \vec{x}^T \vec{1}), \quad (7)$$

kde $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sú Lagrangeove multiplikátory.

- Nutné podmienky na nájdenie extrému:

$$2C\vec{x} - \lambda_1\vec{r} - \lambda_2\vec{1} = \vec{0} \quad (8)$$

$$\vec{x}^T \vec{r} = R \quad (9)$$

$$\vec{x}^T \vec{1} = 1 \quad (10)$$

- Z (8) po prenasobení C^{-1} - inverznou maticou k matici C a následnej úprave dostaneme:

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \left(\lambda_1 C^{-1} \vec{r} + \lambda_2 C^{-1} \vec{1} \right) \quad (11)$$

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY

- Dosadením (11) do (9) a (10) dostaneme sústavu:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \vec{r}^T C^{-1} \vec{r} + \lambda_2 \vec{1}^T C^{-1} \vec{r} &= 2R, \\ \lambda_1 \vec{r}^T C^{-1} \vec{1} + \lambda_2 \vec{1}^T C^{-1} \vec{1} &= 2.\end{aligned}$$

- Označme: $\alpha = \vec{r}^T C^{-1} \vec{r}$, $\beta = \vec{r}^T C^{-1} \vec{1}$, $\gamma = \vec{1}^T C^{-1} \vec{1}$, potom môžeme sústavu prepísať ako:

$$\begin{aligned}\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta &= 2R, \\ \lambda_1 \beta + \lambda_2 \gamma &= 2,\end{aligned}$$

kde neznáme sú λ_1 , λ_2 .

- Riešením sústavy sú:

$$\lambda_1 = \frac{2(\gamma R - \beta)}{\alpha\gamma - \beta^2} \quad (12)$$

$$\lambda_2 = \frac{2(\alpha - \beta R)}{\alpha\gamma - \beta^2} \quad (13)$$

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY

- Dosadením (12), (13) späť do (11) dostaneme:

$$\vec{x} = \frac{(\gamma R - \beta)}{\alpha\gamma - \beta^2} C^{-1} \vec{r} + \frac{(\alpha - \beta R)}{\alpha\gamma - \beta^2} C^{-1} \vec{1} \quad (14)$$

- Skutočnosť, že vo vypočítanom $\vec{x}$ účelova funkcia naozaj dosahuje svoje minimum, ktoré je navyše globálnym minimom, zabezpečuje požiadavka kladnej definitnosti matice C .
- Minimálna hodnota účelovej funkcie bude:

$$\sigma_P^2 = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} R^2 - \frac{2\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} R + \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2} \quad (15)$$

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY

- Ľahko možno ukázať, že situácia $\beta^2 = \alpha\gamma$ nastane práve vtedy, keď všetky CP v portfóliu majú rovnakú výnosnosť R , tj. $r_1 = r_2 = \dots = r_N = R$.
- Za tohto predpokladu možno zredukovať podmienky z formulácie úlohy (U) na jedinú: $\vec{x}^T \vec{1} = 1$.
- Riešiac potom úlohu (U) s jednou väzbou pridáme k nasledujúcemu optimálnemu vektoru váh: $\vec{x} = \frac{C^{-1}\vec{1}}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}}$.
- Minimálna hodnota účelovej funkcie potom bude:
$$\sigma_P^2 = \frac{1}{\vec{1}C^{-1}\vec{1}} = \frac{1}{\gamma}.$$
- V tomto prípade riziko optimálneho portfólia nadobúda konštantnú hodnotu a vôbec nezávisí od výnosnosti R CP v portfóliu. Je determinované iba vzájomnou koreláciou (menlivosťou) cenných papierov vyjadrenou v kovariančnej matici. Situácia, keď všetky cenné papiere v portfóliu majú rovnaký očakávaný výnos, je však čisto hypotetická a v praxi sa nevyskytuje.

NÁJDENIE EFEKTÍVNEJ MNOŽINY

- Na nájdenie riešenia úlohy (U) s $\vec{x} \geq \vec{0}$ je možné použiť Wolfeho simplexovú metódu pre kvadratické programovanie (Wolfe, P.:The Simplex Method for Quadratic Programming, *Econometrica*, Vol. 27, No. 3, (Jul., 1959), pp. 382-398).
- Výhodou je, že touto metódou je možné úlohu kvadratického programovania previesť na sériu dvoch úloh lineárneho programovania a riešiť jednoducho simplexovou metódou.
- Ide o numerické, programovateľné hľadanie riešenia.

PRÍKLAD

- Lahko ukážeme, že pre $\rho_{AB} = 0$ v našom príklade hľadané koeficienty kvadratickej funkcie závislosti rizika portfólia σ_P^2 od jeho výnosnosti r_P zodpovedajú tým zo vzťahu (15).
- Výpočtom zistíme, že $\alpha = \frac{89}{16}$, $\beta = \frac{121}{240}$, $\gamma = \frac{169}{3600}$.
- Potom naozaj:

$$K = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} = 6,76$$

$$L = -\frac{2\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} = -145,2$$

$$M = \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2} = 801$$

- Vieme, že funkcia $\sigma_P = \sqrt{6,76r_P^2 - 145,2r_P + 801}$ určuje pre $r_P \in \langle 10, 15 \rangle$ množinu všetkých prípustných riešení; nie je to však efektívna množina.
- Na nájdenie efektívnej množiny je potrebné ešte určiť minimum tejto funkcie na intervale $\langle 10, 15 \rangle$.

PRÍKLAD

- Prepočtom zistíme, že minimum leží v bode $\tilde{r}_P = \frac{\beta}{\gamma} \doteq 10,7396$ a dosahuje hodnotu $\tilde{\sigma}_P \doteq 4,6154$.
- Efektívna množina je potom určená funkciou $\sigma_P = \sqrt{6,76r_P^2 - 145,2r_P + 801}$ definovanou na intervale $\langle \tilde{r}_P, 15 \rangle$.
- Pre $\rho_{AB} = 1$ je efektívnou množinou celá úsečka prípustných portfólií, tj. $\sigma_P = 1,4r_P - 9$, kde $r_P \in \langle 10, 15 \rangle$.
- Pre $\rho_{AB} = -1$ je efektívnou množinou úsečka prípustných portfólií, tj. $\sigma_P = 3,4r_P - 39$, kde $r_P \in \langle \frac{390}{34}, 15 \rangle$.

KRIVKY INDIFERENCIE

- reprezentujú investorove preferencie ohľadom rizika a výnosnosti,
- na rovnakej indifferenčnej krivke ležia všetky portfólia pre investora rovnako žiaduce; investor je medzi nimi indferentný,
- investor uplatňuje dva predpoklady, na základe ktorých sa rozhoduje, ktoré portfólio bude ležať na ktorej krivke indierencie; sú to:
 - predpoklad nenasýtenosti – pri tom istom riziku preferuje investor portfólio s vyšším výnosom
 - odpor k riziku – pri tom istom výnose preferuje investor portfólio s nižším rizikom
- investor teda uprednostňuje portfólio ležiace na vyššej krivke indierencie (na vyššej hladine),
- krivky indierencie sa nepretínajú.

KRIVKY INDIFERENCIE

- Zahrajme sa nasledujúcu hru H: Hodím raz mincou. Keď padne hlava: vyhrám 5 €, keď padne znak: prehrám 5 €.
- Očakávaná výplata z takejto hry je: $5\frac{1}{2} + (-5)\frac{1}{2} = 0$ €.
- Ak túto hru nebudem hrať, mám rovnako 0 €.
- Investor s odporom k riziku si radšej zvolí nič nerobenie pred hraním tejto hry, pretože: $\sigma^2(H) = 25\frac{1}{2} + 25\frac{1}{2} = 25$ a teda $\sigma(H) = 5$ (smerodajná odchýlka), kým pri nič nerobení je to 0.
- Obe možnosti prinášajú rovnaký výnos, ale hrať hru s mincou je rizikovejšie. (Investor milujúci riziko však uprednostní hrať hru H, pretože vidí možný kladný výnos a nedbá príliš na možnú stratu.)
- Krivky investora s odporom k riziku majú kladný sklon („s rastúcim rizikom požaduje investor vyšší výnos“) a sú konvexné („pri opakovanej kladnej zmene rizika požaduje investor vyšší nárast výnosnosti“).
- V ďalšom uvažujeme len riziko-averzných investorov.

VOL'BA OPTIMÁLNEHO PORTFÓLIA

- Ak poznáme investorove krivky indiferencie (jeho preferencie ohľadom výnosu a rizika), tak môžeme určiť investorov výber optimálneho portfólia.
- Spomedzi všetkých portfólií tvoriacich efektívnu množinu to bude zrejme to, ktoré leží na najvyššej možnej krivke indiferencie investora.
- Keďže efektívna množina musí byť konkávna a krivky indiferencie riziko-averzného investora majú kladný sklon a sú konvexné, je možné ho nájsť a bude ležať v bode, v ktorom sa investorova indifferenčná krivka dotýka efektívnej množiny.

PRÍKLAD

- Uvažujme efektívnu množinu z nášho príkladu:
 $\sigma = \sqrt{6,76r^2 - 145,2r + 801}$ určuje kde $r \in \langle \tilde{r}_P, 15 \rangle$.
- Predpokladajme, že investorove preferencie možno vyjadriť ako $r = c + \frac{\sigma^2}{30}$, kde c je hladina preferencie.
- Odtiaľ:

$$\sigma = p_c(r) = \sqrt{30(r - c)} \quad (16)$$

- V bode optimálneho portfólia (r^*, σ^*) sa dotýka krivka indiferencie investora efektívnej množiny. Musí teda súčasne platiť:

$$\frac{\sqrt{30(r^* - c^*)}}{15} = \frac{\sqrt{6,76r^{*2} - 145,2r^* + 801}}{6,76r^* - 72,6}.$$

- Z toho dostaneme $r^* \doteq 12,96$ ($\sigma^* \doteq 7,39$), $c^* \doteq 11,14$, kde c^* je investorova optimálna hladina preferencie.

PRÍKLAD

- Z predchádzajúceho výpočtu vyplýva, že investorova optimálna hladina preferencie je približne 11, 14 a lepšiu pre kombináciu rizikových CP **A** a **B** nedosiahne.
- Očakávaný výnos optimálneho portfólia je približne 12, 96% a rizikovosť je asi 7, 39%.
- Optimálne portfólio je kombináciou CP **A** a **B** takou, že váha CP **A** v portfóliu je $x_A \doteq 0,408$ a váha CP **B** je $x_B \doteq 0,592$.
- Zlepšiť svoju hladinu preferencie môže investor investovaním do kombinácie rizikových CP a bezrizikového aktíva, ak také na trhu existuje.

BEZRIZIKOVÉ AKTÍVUM

- Uvažujme investovanie na jednu dobu držania portfólia,
- bezrizikové aktívum - štátny dlhopis s dobou splatnosti rovnou dobe držania,
- výnos takéhoto aktíva r_f je istý; vieme, že v prípade štátnych dlhopisov ide vlastne o bezrizikovú úrokovú sadzbu (mieru) na príslušné obdobie,
- riziko je nulové; teda ak označíme smerodajnú odchýlku takéhoto aktíva ako σ_f , tak $\sigma_f = 0$,
- v rovine s osami reprezentujúcimi smerodajnú odchýlku a očakávaný výnos bude takýto CP reprezentovaný bodom so súradnicami $(0, r_f)$,
- keďže kovarianciu dvoch aktív A, B je možné vypočítať ako $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$, tak kovariancia akéhokoľvek aktíva i s bezrizikovým aktívom je nulová ($\sigma_{if} = \rho_{if}\sigma_i\sigma_f = 0$).

KOMBINÁCIA BEZRIZIKOVÉHO A RIZIKOVÉHO CP

- Uvažujme portfólio, ktoré pozostáva z bezrizikového CP (s váhou x) a nejakého rizikového CP, resp. kombinácie rizikových CP (s váhou $1 - x$), s výnosnosťou r_i a smerodajnou odchýlkou σ_i ,
- potom pre výnosnosť takéhoto portfólia platí:

$$r = xr_f + (1 - x)r_i, \quad (17)$$

- rizikovosť takéhoto portfólia je:

$$\sigma = \sqrt{x^2\sigma_f^2 + 2x(1 - x)\sigma_{if} + (1 - x)^2\sigma_i^2} = (1 - x)\sigma_i, \quad (18)$$

- všetky možné portfólia tohto typu (pre rôzne hodnoty x) potom ležia na úsečke:

$$r = r_f + \left(\frac{r_i - r_f}{\sigma_i} \right) \sigma, \quad (19)$$

- kde $\sigma \in [0, \sigma_i]$.

BEZRIZIKOVÉ ZAPOŽIČIAVANIE

- Ak uvažujeme aj možnosť bezrizikového zapožičiavania pri tej istej úrokovej sadzbe, môžu byť váhy x aj záporné čísla
- Príklad: Investor si požičia 3000 p.j. a investuje v celkovej výške 15000 p.j. do rizikových CP (tj. 12000 p.j. mal a 3000 p.j. si požičal), potom:

$$x_f = \frac{-3000}{12000} = -\frac{1}{4} \text{ a } x_{CP} = \frac{15000}{12000} = \frac{5}{4},$$

- v súčte $x_f + x_{CP} = 1$.
- všetky možné portfólia ako kombinácie bezrizikového zapožičiavania (s váhou $x < 0$) a nejakého rizikového CP alebo ich kombinácie (s váhou $1 - x > 1$) potom ležia na polpriamke:

$$r = r_f + \left(\frac{r_i - r_f}{\sigma_i} \right) \sigma, \quad (20)$$

- kde $\sigma \geq \sigma_i$.

PRÍKLAD

- Kombinovanie bezrizikového aktíva s portfóliom rizikových aktív umožňuje investorovi vylepšiť (z pohľadu jeho preferencií) efektívnu množinu,
- nájdime novú efektívnu množinu pri možnosti bezrizikového požičiavania a zapožičiavania si pre náš príklad:
- pôjde o polpriamku, ktorá pretne os výnosností v bode $(0, r_f)$ a ktorá sa bude dotýkať pôvodnej efektívnej množiny v bode, ktorý označíme ako (σ_T, r_T) (tangenciálne portfólio),
- hľadanú polpriamku možno popísať vzťahom:

$$r = r_f + k\sigma, \quad (21)$$

kde $k > 0$ - smernica a $\sigma \geq 0$.

- Z toho:

$$\sigma = \frac{r - r_f}{k}. \quad (22)$$

PRÍKLAD

- Uvažujme efektívnu množinu z nášho príkladu:
 $\sigma = \sqrt{6,76r^2 - 145,2r + 801}$, kde $r \in \langle \tilde{r}_P, 15 \rangle$,
- nech $r_f = 3\%$, potom výnosnosť tangenciálneho portfólia a smernicu k možno vypočítať z nasledujúcich dvoch rovníc:

$$\begin{aligned}\frac{r_T - 3}{k} &= \sqrt{6,76r_T^2 - 145,2r_T + 801}, \\ \frac{1}{k} &= \frac{6,76r_T - 72,6}{\sqrt{6,76r_T^2 - 145,2r_T + 801}}.\end{aligned}$$

- Výpočtom dostaneme: $r_T \doteq 11,15$ ($\sigma_T \doteq 4,74$), $k \doteq 1,72$, pričom naozaj platí, že $k = \frac{r_T - r_f}{\sigma_T}$.
- Nová efektívna množina teda kombinuje bezrizikové požičiavanie, resp. zapožičiavanie si a investíciu do tangenciálneho portfólia a jej predpis má tvar:

$$r = 3 + 1,72\sigma, \text{ kde } \sigma \in \langle 0, \infty \rangle \quad (23)$$

PRÍKLAD

- Vypočítajme, aké bude optimálne portfólio investora s preferenciami popísanými vzťahom (16) na efektívnej množine (23).
- Riešiac opäť dve rovnice o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned}3 + 1,72\sigma^* &= c^* + \frac{(\sigma^*)^2}{30}, \\1,72 &= \frac{\sigma^*}{15},\end{aligned}$$

- dostaneme: $\sigma^* \doteq 25,81$ ($r^* \doteq 47,4$), $c^* \doteq 25,2$, kde c^* je optimálna hladina investorových preferencií.
- Nerovnosť $r^* > r_T$, resp. $\sigma^* > \sigma_T$ implikuje, že ide o kombináciu tangenciálneho portfólia a bezrizikového zapožičiavania si.