

CENNÉ PAPIERE

Akcie

Základy finančnictva

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva>

AKCIOVÁ SPOLOČNOSŤ

- **Akciová spoločnosť** (ďalej a.s.) – kapitálová spoločnosť (forma podnikania, do ktorej vstupujú spoločníci s cieľom zhodnotiť kapitál), jej základný kapitál je tvorený emisiou akcií, tj. je rozdelený na určitý počet akcií v stanovenej nominálnej hodnote,
- základné imanie je aspoň 25000 EUR,
- založiť ju môže 1 zakladateľ (iba právnická osoba) alebo dvaja a viacerí zakladatelia (minimálne jedna fyzická a jedna právnická osoba alebo dve fyzické osoby).

AKCIOVÁ SPOLOČNOSŤ

- Najvyšší orgán: valné zhromaždenie
- rozhoduje o akýchkoľvek otázkach týkajúcich sa života spoločnosti:
 - *zmena stanov,*
 - *rozhodnutie o zvýšení, či znížení základného imania,*
 - *voľba a odvolanie členov predstavenstva (pokiaľ stanovy neurčujú inak),*
 - *voľba členov dozornej rady,*
 - *schválenie ročnej účtovnej závierky,*
 - *rozdelenie zisku (akcionárom sa vypláca formou dividend).*
- schádza sa aspoň jedenkrát ročne
- uznášania je schopné, ak sa na ňom zúčastnia akcionári, ktorých akcie majú hodnotu väčšiu ako 50 % základného imania

AKCIOVÁ SPOLOČNOSŤ

- Predstavenstvo - štatutárny orgán, riadi spoločnosť a koná v jej mene,
- predkladá valnému zhromaždeniu na schválenie ročnú účtovnú závierku, návrh rozdelenia zisku, správu o podnikateľskej činnosti a stave jej majetku.
- Dozorná rada - dohliada na výkon spôsobilosti predstavenstva a uskutočňovanie podnikateľskej činnosti
- jej členovia sú oprávnení nahliadať do všetkých dokladov a záznamov týkajúcich sa činnosti spoločnosti a kontrolujú, či sú účtovné záznamy riadne vedené v súlade so skutočnosťou a či sa podnikateľská činnosť spoločnosti uskutočňuje v súlade s právnymi predpismi, stanovami a pokynmi valného zhromaždenia,
- člen dozornej rady môže byť len fyzická osoba a súčasne nesmie byť členom predstavenstva alebo prokuristom.

AKCIOVÁ SPOLOČNOSŤ

- Výhody a.s.:
 - môže predávať akcie a aktívne s nimi obchodovať,
 - zabezpečenie kapitálu je lepšie,
 - na ovládanie spoločnosti teoreticky postačuje 51 % akcií.
- Nevýhody a.s.:
 - jej založenie je drahé a prevádzkovanie nákladné,
 - rozhodovanie je zložitejšie – vznikajú problémy spojené s oddelením vlastníctva a riadenia.

AKCIE

- Akcie delíme na:
 1. kmeňové - *držiteľ kmeňovej akcie má právo podieľať sa na riadení spoločnosti (hlasovať na valnom zhromaždení), podieľať sa na zisku a na likvidačnom zostatku,*
 2. prioritné - *akcionár obyčajne nemá hlasovacie právo, ale má prednostné právo na zisk a zostatok firmy,*
 3. zamestnanecké - *znejúce na meno; obchoduje sa s nimi iba medzi zamestnancami alebo bývalými zamestnancami; majitelia zamestnaneckých akcií majú právo podieľať sa na riadení akciovej spoločnosti, na dividendu a na podiel na likvidačnom zostatku spoločnosti.*
- Akcie môžu byť v materializovanej alebo dematerializovanej podobe.

AKCIE

- **Rovnomerné rozdeľovanie dividendy:**
- Nech základný kapitál spoločnosti je 28 mil. p.j.,
- z toho nech 21 mil. p.j. je v kmeňových akciách,
- 7 mil. p.j. je v prioritných akciách.
- Firma dosiahla zisk 4,2 mil. p.j. a chce ho celý rozdeliť medzi akcionárov.
- Predpokladajme dividendu 10 % z NH akcie, potom:
- dividenda pre prioritných akcionárov:
 $0,1 \cdot 7 \cdot 10^6 \text{ p.j.} = 0,7 \text{ mil. p.j.}$
- dividenda pre kmeňových akcionárov:
 $0,1 \cdot 21 \cdot 10^6 \text{ p.j.} = 2,1 \text{ mil. p.j.}$
- zvyšok zo zisku po vyplatení dividend je 1,4 mil. p.j.,
- pretože ho chce firma celý rozdeliť, každý akcionár dostane ešte bonus vo výške: $\frac{1,4 \text{ mil. p.j.}}{28 \text{ mil. p.j.}} = 0,05 \text{ z NH akcie.}$

AKCIE

- **Nerovnomerné rozdeľovanie dividendy:**
- Nech základný kapitál spoločnosti je 25 mil. p.j.,
- z toho nech 20 mil. p.j. je v kmeňových akciách,
- 5 mil. p.j. je v prioritných akciách.
- Firma dosiahla zisk 1,1 mil. p.j. a chce ho rozdeliť medzi akcionárov.
- Predpokladajme dividendu 10 % z NH akcie, potom:
- dividenda pre prioritných akcionárov:
 $0,1 \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ p.j.} = 0,5 \text{ mil. p.j.}$
- dividenda pre kmeňových akcionárov:
 $0,1 \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ p.j.} = 2 \text{ mil. p.j.} > 0,6 \text{ mil. p.j.}$
- tj. dividenda pre kmeňových akcionárov nebude vyplatená v plnej výške,
- každý z kmeňových akcionárov dostane: $\frac{0,6 \text{ mil. p.j.}}{20 \text{ mil. p.j.}} = 0,03$ z NH akcie.

AKCIE

- Dividendy sa vyplácajú rôzne: štvrťročne, polročne, ročne ... (v závislosti od firmy),
- nové emisie akcií sa uskutočňujú na primárnom trhu,
- nové akcie môžeme umiestniť buď na burze (pri veľkých emisiách, ale je to nákladné) alebo mimo burzy (pomocou bánk, tzv. trh cez prepážku – OTC („over-the-counter“)).
- Spôsoby umiestnenia nových akcií:
 - verejná ponuka – *verejné upisovanie, ktoré sprostredkovávajú upisovatelia,*
 - neverejná ponuka – *súkromné umiestnenia.*

AKCIE

- na novoemitované akcie má akcionár odoberacie práva („subscription rights“),
- **odoberacie právo** – predkúpne právo, ktoré má zabezpečiť nezmenšený podiel pri zvýšení akciového kapitálu; akcionár na základe počtu vlastnených akcií obdrží odoberacie právo na novoemitované akcie; toto právo je možné charakterizovať 4 pojmami:
 1. odoberací kupón – *stelesňuje predkúpne právo akcionára,*
 2. odoberacia doba – *po jej prekročení je odoberací kupón neplatný; v prípade, že akcionár nemá záujem využiť odoberacie právo, môže ho predat',*
 3. odoberací pomer – *ak sa základné imanie zvýši napr. zo 100 tis. p.j. na 125 tis. p.j. (teda prírastok je 25 tis. p.j.), tak odoberací pomer je $100:25=4:1$, teda za 4 staré akcie má akcionár právo na 1 novú,*
 4. odoberacia cena nových (mladých) akcií – *obyčajne býva nižšia ako cena starých akcií.*

PRÍKLAD

- Uvažujme firmu so základným kapitálom 100000 EUR, ktorý je rozdelený do 20000 kmeňových akcií, tj. NH akcie je 5 EUR.
- Predpokladajme, že príde k navýšeniu kapitálu o 130000 EUR (tj. nový kapitál bude 230000 EUR), ktoré bude rozdelené do emisie 12000 kmeňových akcií a 14000 prioritných akcií (tj. celkovo 26000 nových akcií).
- Aký je odoberací pomer?
- Odoberací pomer bude 20000:12000:14000, tj. 10:6:7.
- To znamená, že akcionár získava k 10 starým akciám odoberacie právo na 6 nových kmeňových akcií a 7 nových prioritných akcií.

AKO OHODNOCOVAŤ AKCIE

- Akcia poskytuje dvojicu hotovostných tokov (výplat pre majiteľa akcie):
 1. dividendy,
 2. kapitálové zisky (straty) z predaja akcie.
- Príklad: Ak si v čase $t_0 = 0$ (napr. dnes) kúpime akciu za cenu P_0 a po roku predáme za cenu P_1 , malo by platiť:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)} + \frac{P_1}{(1+r)}, \quad (1)$$

kde:

- D_t - dividenda vyplácaná na konci t -teho roku,
- P_t - cena akcie na konci t -teho roku,
- r – výnosová miera akcie (miera trhovej kapitalizácie);
v ďalšom budeme predpokladať $r > 0$.

AKO OHODNOCOVAŤ AKCIE

- Zopakujúc predchádzajúcu úvahu pre rok 1 dostaneme:

$$P_1 = \frac{D_2}{(1+r)} + \frac{P_2}{(1+r)}, \quad (2)$$

- dosadením (2) do (1) získame:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \frac{P_2}{(1+r)^2}.$$

- Pre n období (rokov) potom máme:

$$P_0 = \sum_{t=1}^n \frac{D_t}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}.$$

AKO OHODNOCOVAŤ AKCIE

- Pre „nesmrteľné“ akcie dostaneme:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t}, \quad (3)$$

- za predpokladu, že nekonečný rad v (3) konverguje, tzn. máme rozumné (nie prehnané) očakávania ohľadom budúcich dividend plynúcich z akcie a za predpokladu, že:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{(1+r)^n} = 0,$$

- tj. očakávame, že súčasná hodnota ceny akcie „na konci vekov“ je nulová.
- Za platnosti (3) potom:

$$P_n = \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^{t-n}} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_{t+n}}{(1+r)^t}, \quad (4)$$

ROZLIČNÉ ŠTRUKTÚRY DIVIDEND

- **Nulový rast firmy:**
- vyplácaná je konštantná dividenda, teda pre každé $t \geq 0$ platí: $D_t = D$,
- ide o ohodnocovanie prioritných akcií (zvyknú vyplácať konštantnú dividendu), resp. oceňovanie kmeňových akcií za nulového rastu,
- zo vzťahu (3) potom dostaneme:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{D}{r}.$$

ROZLIČNÉ ŠTRUKTÚRY DIVIDEND

- **Konštantný rast firmy:**
- dividenda rastie mierou rastu g , teda pre každé $t \geq 1$ platí:
 $D_t = D(1 + g)^{t-1}$,
- ohodnocovanie kmeňových akcií,
- zo vzťahu (3) dostaneme:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D(1+g)^{t-1}}{(1+r)^t} = \frac{D}{1+r} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(1+g)^t}{(1+r)^t}.$$

- Za predpokladu $0 < g < r$, tj. $0 < \frac{1+g}{1+r} < 1$, potom:

$$P_0 = \frac{D}{1+r} \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+r}} = \frac{D}{r-g}.$$

- $r = \frac{D}{P_0} + g$ - slúži na odhad miery trhovej kapitalizácie,
- podiel $\frac{D}{P_0}$ sa nazýva dividendový výnos.

ROZLIČNÉ ŠTRUKTÚRY DIVIDEND

- Označujme:
- EPS - zisk na akciu („earnings per share“),
- $BVPS$ – účtovná hodnota vlastného kapitálu na akciu („book value of equity per share“),
- ROE - výnos vlastného kapitálu alebo tiež návratnosť vlastného kapitálu („return on equity“): $ROE = \frac{EPS}{BVPS}$,
- b – aktivačný pomer, tj. miera nerozdeleného zisku (po zdanení) na akciu: $b = \frac{EPS-D}{EPS} = 1 - \frac{D}{EPS}$,
- $1 - b$ - výplatný pomer, teda: $1 - b = \frac{D}{EPS}$,
- potom: $g = ROE.b$, čiže: $g = \frac{EPS-D}{BVPS}.$

ROZLIČNÉ ŠTRUKTÚRY DIVIDEND

- **Nerovnaký rast firmy:**
- žiadna firma nedokáže rásť do nekonečna pri veľkom g ,
- v reálnom živote návratnosť investícií (ROE) klesá s časom,
- dvojstupňový model:
- nech dividendy prvých n rokov rastie tempom rastu G a potom tempo rastu klesne na $0 < g < G$,
- potom:

$$P_0 = \sum_{t=1}^n \frac{D(1+G)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{P_n}{(1+r)^n}, \quad (5)$$

- kde podľa (4) máme:

$$P_n = \frac{D(1+G)^{n-1}}{(1+r)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(1+g)^{t+1}}{(1+r)^t} = \frac{D(1+G)^{n-1}(1+g)}{(r-g)}$$

- za predpokladu $g < r$.

ROZLIČNÉ ŠTRUKTÚRY DIVIDEND

- Dosadením za P_n do (5) dostaneme:

$$\begin{aligned}P_0 &= \sum_{t=1}^n \frac{D(1+G)^{t-1}}{(1+r)^t} + \frac{D(1+G)^{n-1}(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} \\&= \frac{D}{(1+r)} \frac{1 - \left(\frac{1+G}{1+r}\right)^n}{1 - \frac{1+G}{1+r}} + \frac{D(1+G)^{n-1}(1+g)}{(1+r)^n(r-g)} \\&= \frac{D}{r-G} + D \left(\frac{1+G}{1+r}\right)^n \left(\frac{1+g}{(1+G)(r-g)} - \frac{1}{r-G}\right)\end{aligned}$$

- čiže:

$$P_0 = \frac{D}{r-G} \left(1 - \frac{G-g}{r-g} \left(\frac{1+G}{1+r}\right)^{n-1}\right).$$

RASTOVÉ PRÍLEŽITOSTI

- „growth opportunities“
- akcie:
 - *príjmové* („*income stocks*“) – vyplácajú dividendu (investori ich kupujú kvôli dividendám),
 - *rastové* („*growth stocks*“) – očakáva sa od nich kapitálový zisk (rast ich ceny).
- Ak uvažujeme firmu, ktorá vyplatí akcionárom celý zisk vo forme dividend, tak samozrejme $g = 0$.
- V tomto prípade je cena akcie: $P_0 = \frac{EPS}{r} = \frac{D}{r}$.

NPVGO MODEL

- Aká však bude cena akcie firmy, ktorá akceptuje niektorú z jej rastových príležitostí?
- Označme:
- *NPVGO* – „net present value of growth opportunities“, čiže čistá prítomná hodnota rastových príležitostí,
- potom: $P_0 = \frac{EPS}{r} + NPVGO$.
- Odtiaľ: $\frac{EPS}{P_0} = r \left(1 - \frac{NPVGO}{P_0} \right)$.
- Z toho vyplýva:
- ak $NPVGO > 0$, tak $\frac{EPS}{P_0} < r$,
- ak $NPVGO < 0$, tak $\frac{EPS}{P_0} > r$.

PRÍKLAD

- Uvažujme spoločnosť, ktorej $EPS = 10$, aktivačný pomer $b = 0,4$, $ROE = 0,2$ a $r = 0,16$. Vypočítajte cenu akcie P_0 .

Riešenie:

- výpočet cez dividendový model:
- pretože $b = 0,4$, tak výplatný pomer $1 - b = 0,6$ a teda $D = (1 - b)EPS = 6$,
- pretože $ROE = 0,2$ a $g = ROE.b$, tak $g = 0,08$,
- potom: $P_0 = \frac{D}{r-g} = \frac{6}{0,08} = 75$.

PRÍKLAD

- výpočet cez rastový model:
- pretože $b = 0,4$, tak do firmy sa z $EPS = 10$ vracia 4,
- pretože $ROE = 0,2$, tak hotovosť generovaná investíciou prináša v roku 2: $b.EPS.ROE = 4.0,2 = 0,8$,
- potom NPV tohto projektu v roku 1 je
$$NPV_1 = -4 + \frac{0,8}{0,16} = 1,$$
- v roku 2 bude firma investovať o 8 % viac, lebo $g = 0,08$, konkrétne $4.1,08 = 4,32$ a teda
$$NPV_2 = -4,32 + \frac{0,8.1,08}{0,16} = 1,08 \text{ atď.},$$
- celkovo v roku 0 bude:
$$NPVGO = \frac{1}{1,16} + \frac{1,08}{(1,16)^2} + \dots = \frac{1}{0,08} = 12,5,$$
- keďže $\frac{EPS}{r} = \frac{10}{0,16} = 62,5$,
- tak máme: $P_0 = 62,5 + 12,5 = 75$.

RACIONÁLNE OČAKÁVANIA

- Riešenie (4) stochastickej rovnice (1) pre $t_0 = n$:

$$P_n = \frac{D_{n+1}}{(1+r)} + \frac{P_{n+1}}{(1+r)}, \quad (6)$$

- v ktorej P_{n+1} predstavuje očakávanú hodnotu ceny akcie v nasledujúcom roku pri informácii známej v tomto roku, budeme nazývať fundamentálnym riešením rovnice (6) a označovať P_n^* .
- Pri rozumných (racionálnych) očakávaniach predstavuje P_n^* súčasnú hodnotu budúcich hotovostných tokov (dividend) plynúcich z držania akcie.

BUBLINY

- Riešenie (4) stochastickej rovnice (6) nie je jediné,
- uvažujme napríklad P_n také, že

$$P_n = P_n^* + B_n, \quad (7)$$

- kde $B_n = B(1+r)^n$ s $B > 0$ (expandujúca bublina), tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \infty$.
- Riešenie (7) skutočne vyhovuje (6), ukážeme:

$$\begin{aligned} \frac{D_{n+1}}{(1+r)} + \frac{P_{n+1}}{(1+r)} &= \frac{D_{n+1}}{(1+r)} + \frac{P_{n+1}^* + B_{n+1}}{(1+r)} = \\ &= \frac{D_{n+1}}{(1+r)} + \frac{P_{n+1}^*}{(1+r)} + \frac{B_{n+1}}{(1+r)} = P_n^* + \frac{B(1+r)^{n+1}}{(1+r)} = \\ &= P_n^* + B(1+r)^n = P_n^* + B_n = P_n \end{aligned}$$

BUBLINY

- Môžeme tiež predpokladať, že existuje nenulová pravdepodobnosť, že bublina B_n praskne každú periódu:

$$B_{n+1} = \begin{cases} \frac{(1+r)B_n}{q}, & \text{s pravdepodobnosťou } q \\ 0, & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - q \end{cases}$$

- v tomto prípade bublina s prasknutím úplne zaniká.
- Prípadne:

$$B_{n+1} = \begin{cases} \frac{(1+r)B_n}{q} + \varepsilon_{n+1}, & \text{s pravdepodobnosťou } q \\ \varepsilon_{n+1}, & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - q \end{cases}$$

kde $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$.

- Skutočne potom očakávaná (stredná) hodnota $E(B_{n+1}) = q \frac{(1+r)B_n}{q} + qE(\varepsilon_{n+1}) + (1-q)E(\varepsilon_{n+1}) = B(1+r)^{n+1}$ a teda $P_n = P_n^* + B_n$ je riešením (6).

BUBLINY

- V tomto prípade bublina praskne s pravdepodobnosťou $1 - q$ a s pravdepodobnosťou q bude ďalej rásť.
- Ak praskne, jej očakávaná hodnota sa vráti na nulu; aby bola kompenzovaná pravdepodobnosť prasknutia, očakávaná hodnota v prípade neprasknutia bude vyššia.
- Šum ε_n dovoľuje vznik nových bublín po tom, čo praskli.
- Poznamenajme, že ε_n môže byť korelované s neočakávanými pohybmi v ľubovoľnej premennej, tj. ak trh verí, že neočakávané zmeny v niečom inom ovplyvňujú napr. cenu akcie, tak je pravdepodobné, že sa tak aj skutočne stane; v dôsledku toho vznikajú špekulatívne bubliny.
- Existuje predpoklad, že večne rastúce (expandujúce) bubliny nebudú existovať, lebo to nie je konzistentné s predpokladom konečnosti ekonomiky.

PRAVDEPODOBNOSTNÝ MODEL OCEŇOVANIA AKCIÍ

- oceňovanie akcií nevypĺacajúcich dividendu,
- nech súčasná cena akcie je P_0 p.j.,
- predpokladáme investovanie na obdobie dĺžky 1 časovej jednotky (ďalej č.j.), počas ktorého na cenu P_1 akcie v čase 1 č.j. neskôr vplývajú rôzne náhodné udalosti $\mathcal{U}_i$, kde $i = 1, 2, \dots, n$ a $n \geq 2$ je počet udalostí,
- každá z udalostí je súhrnom ekonomických i neekonomických okolností súbežne vplývajúcich na výšku ceny akcie,
- každej udalosti $\mathcal{U}_i$ môžeme priradiť pravdepodobnosť p_i , s ktorou udalosť nastane,
- platí:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

PRAVDEPODOBNOSTNÝ MODEL OCEŇOVANIA AKCIÍ

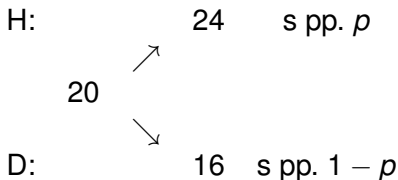
- pretože cena P_1 závisí od toho, ktorá z udalostí nastane, investor nahliada na očakávanú cenu akcie v čase 1 skôr než na každý z jednotlivých variantov,
- P_1 budeme teda chápať ako očakávanú (strednú) hodnotu ceny akcie v čase 1, t.j. platí:

$$P_1 = \sum_{i=1}^n p_i u_i,$$

kde u_i je cena akcie v čase 1 pri nastaní udalosti $\mathcal{U}_i$.

PRÍKLAD

- Uvažujme bezdividendovú akciu A , ktorej súčasná cena je $P_0 = 20$ p.j. Na obdobie $T = 1$ č.j. držíme túto akciu a potom ju predajme za cenu P_1 , ktorá s pp. $p \in (0, 1)$ pri nastaní udalosti H bude 24 p.j. a s pp. $1 - p$ pri nastaní udalosti D bude 16 p.j.
- Graficky znázorníme:



- Očakávania o cene P_1 budú závisieť od pravdepodobnosti p , s ktorou sa cena hýbe smerom nahor (udalosť H) alebo nadol (D):

$$P_1 = 24p + 16(1 - p) = 16 + 8p$$

VÝNOS AKCIE

- ak akciu predáme v čase 1 za P_1 p.j., výnos akcie za dobu držania dostaneme ako podiel:

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0} \quad (8)$$

- pretože P_1 chápeme ako strednú (očakávanú) hodnotu ceny akcie v nasledujúcom období, tak i tento výnos bude iba očakávaný; budeme ho označovať $\bar{r}$ a nazývať výnosnosťou akcie,
- skutočný výnos akcie bude závisieť od udalostí $\mathcal{U}_i$, kde $i = 1, 2, \dots, n$, a bude mať pre rôzne i rôznu hodnotu:

$$r_i = \frac{u_i - P_0}{P_0} \quad (9)$$

- keďže $P_1 = \sum_{i=1}^n p_i u_i$, tak z (8) dostaneme:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i u_i - P_0}{P_0} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{u_i - P_0}{P_0} = \sum_{i=1}^n p_i r_i \quad (10)$$

RIZIKO AKCIE

- riziko, s ktorým sa bude odchyľovať skutočná cena akcie a teda i výnos akcie od investorových očakávaní, budeme merať smerodajnou odchýlkou a nazývať rizikom, resp. rizikovosťou akcie
- nech σ^2 označuje varianciu výnosov akcie, potom smerodajná odchýlka bude σ

- platí:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i (r_i - \bar{r})^2 \quad (11)$$

- podobným spôsobom by sme vypočítali aj varianciu ceny akcie, akurát by sme miesto výnosov dosádzali ceny akcie,
- platí:

$$r_i - \bar{r} = \frac{u_i - P_1}{P_0}$$

KOVARIANCIA VÝNOSOV AKCIÍ

- Ak uvažujeme dve bezdividendové akcie A , B , tak môžeme merať ich kovarianciu - „spoločnú menlivosť“.
- Označme:
 - a_i - výnos akcie A pri nastaní udalosti $\mathcal{U}_i$,
 - b_i - výnos akcie B pri nastaní udalosti $\mathcal{U}_i$,
- potom:
 - $\bar{r}_A = \sum_{i=1}^n p_i a_i$ - výnosnosť akcie A ,
 - $\bar{r}_B = \sum_{i=1}^n p_i b_i$ - výnosnosť akcie B ,
 - $\sigma_A^2 = \sum_{i=1}^n p_i (a_i - \bar{r}_A)^2$ - variancia výnosov akcie A ,
 - $\sigma_B^2 = \sum_{i=1}^n p_i (b_i - \bar{r}_B)^2$ - variancia výnosov akcie B ,
- kovarianciu σ_{AB} výnosov akcií A , B vypočítame ako:

$$\sigma_{AB} = \sum_{i=1}^n p_i (a_i - \bar{r}_A)(b_i - \bar{r}_B) \quad (12)$$

KOEFICIENT KORELÁCIE

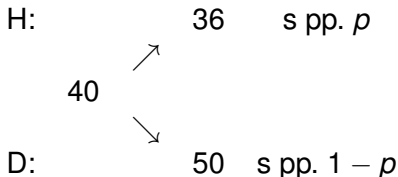
- koeficient korelácie:

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} \quad (13)$$

- platí: $\rho_{AB} \in \langle -1, 1 \rangle$,
- ak:
 - $\rho_{AB} = 0$ - výnosy sú nekorelované,
 - $\rho_{AB} > 0$ - výnosy sú pozitívne korelované,
 - $\rho_{AB} < 0$ - výnosy sú negatívne korelované,
 - $\rho_{AB} = 1$ - perfektná pozitívna korelácia,
 - $\rho_{AB} = -1$ - perfektná negatívna korelácia.

PRÍKLAD

- Ak uvažujeme, že na trhu spolu s akciou A vystupuje iná bezdividendová akcia B s týmito vlastnosťami:



- je možné vypočítať koreláciu medzi výnosmi týchto akcií.
- V čase $T = 1$ bude očakávaná cena akcie A (predtým označená ako P_1): $\bar{P}_A = 24p + 16(1 - p) = 16 + 8p$.
- V čase $T = 1$ bude očakávaná cena akcie B :
 $\bar{P}_B = 36p + 50(1 - p) = 50 - 14p$.
- Čo sa týka výnosností akcií, dostaneme:

$$\bar{r}_A = \frac{8p - 4}{20}, \bar{r}_B = \frac{10 - 14p}{40}.$$

PRÍKLAD

- Variancia v cene akcie A bude
 $\sigma_{P_A}^2 = p(24 - \bar{P}_A)^2 + (1 - p)(16 - \bar{P}_A)^2 =$
 $p(1 - p)(24 - 16)^2 = 64p(1 - p)$ a teda smerodajná
odchýlka $\sigma_{P_A} = 8\sqrt{p(1 - p)}$. Pre výnosy dostaneme:

$$\sigma_A^2 = \frac{64}{400}p(1 - p) \text{ a } \sigma_A = \frac{2}{5}\sqrt{p(1 - p)}.$$

- Podobne pre akciu B máme $\sigma_{P_B}^2 = 196p(1 - p)$,
 $\sigma_{P_B} = 14\sqrt{p(1 - p)}$ a

$$\sigma_B^2 = \frac{196}{1600}p(1 - p), \sigma_B = \frac{7}{20}\sqrt{p(1 - p)}.$$

PRÍKLAD

- Kovariancia cien akcií:

$$\sigma_{P_A P_B} = -112p(1 - p)$$

- Kovariancia výnosov akcií:

$$\sigma_{AB} = -\frac{112}{800}p(1 - p)$$

- Korelačný koeficient cien akcií bude:

$$\rho_{P_A P_B} = \frac{\sigma_{P_A P_B}}{\sigma_{P_A} \sigma_{P_B}} = \frac{-112p(1 - p)}{112p(1 - p)} = -1$$

- Korelačný koeficient výnosov akcií bude:

$$\rho_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{-0,14p(1 - p)}{0,14p(1 - p)} = -1$$

- Vidíme, že korelačný koeficient je rovný -1 , či už ide o ceny alebo výnosy akcií a teda akcie (ich ceny i výnosy) sú perfektne negatívne korelované.

ARBITRÁŽNA PRÍLEŽITOSŤ

- Uvažujeme bezdividendové akcie A , B popísané vyššie,
- môžeme sa zamyslieť nad tým, či neexistuje na trhu arbitrážna príležitosť,
- skutočne by mohla takáto príležitosť vzniknúť, pretože intuitívne vnímame, že perfektná negatívna korelácia cien akcií by pri vhodne navolených investíciách do akcií v čase 0 mohla viesť ku kladnému zisku bez ohľadu na to, ktorá z udalostí ovplyvňujúcich cenu akcie v čase 1 nastane,
- takýmto spôsobom by bolo možné úplne eliminovať riziko, tj. na rozhodnutia investora, ktorý si arbitráž všimne, nemá vplyv pp. p nastania udalosti H .

ELIMINÁCIA RIZIKA

- Uvažujme nasledujúcim spôsobom:
- Nech veľkosť kapitálu, ktorý je investor ochotný/schopný investovať do kúpy akcií, je m p.j., z toho nech investícia do akcie A predstavuje x p.j. a do akcie B nech je y p.j., tj. máme:

$$x + y = m$$

- S takýmto rozvrhnutím investície je pri nastaní udalosti H výnos investora $1,2x + 0,9y - m$ a pri nastaní udalosti D : $0,8x + 1,25y - m$.
- Aby investor eliminoval riziko, zvolí:

$$1,2x + 0,9y - m = 0,8x + 1,25y - m$$

- Z čoho:

$$y = \frac{8}{7}x$$

ARBITRÁŽNY ZISK INVESTORA

- Keďže $x + y = m$, tak $x = \frac{7m}{15}$ a $y = \frac{8m}{15}$.
- Výnos investora bude v prípade nastania udalosti H rovnaký ako v prípade nastania udalosti D a totiž:

$$\frac{6}{5} \left(\frac{7m}{15} \right) + \frac{9}{10} \left(\frac{8m}{15} \right) - m = \frac{m}{25} > 0$$

- Výška zisku investora, ktorý dosiahne bez rizika vplyvu náhodných udalostí na cenu akcie v čase 1, je určená jeho počiatočným imaním m .
- Teda výnosová sadzba (výnosové percento) investora je pri nastaní oboch udalostí rovnaká, rovná 0,04 (4%).
- Ak napr. uvažujeme $m = 3000$ p.j., tak arbitrážny zisk investora je 120 p.j., ktorý dosiahne v čase 1 pri počiatočnom rozvrhnutí investície $x = 1400$ p.j. (70 kusov akcie) do akcie A a $y = 1600$ p.j. (40 kusov akcie) do akcie B .

BEZARBITRÁŽNA CENA AKCIE

- Existencia arbitrážnej príležitosti implikuje, že niektorá z akcií je nesprávne ohodnotená.
- Predpokladajme, že ňou je akcia B . Aká by mala byť jej súčasná cena P , aby nenastala možnosť arbitráže?
- Eliminujme riziko:

$$0,2x + \left(\frac{36 - P}{P}\right)y = -0,2x + \left(\frac{50 - P}{P}\right)y$$

$$0,4x = \frac{14}{P}y$$

$$x = \frac{35}{P}y$$

BEZARBITRÁŽNA CENA AKCIE

- Aby nebola arbitráž, tak výnosová sadzba musí byť pri nastaní udalosti H alebo D nulová, teda:

$$0 = 0,2 \left(\frac{35}{P} \right) y + \left(\frac{36 - P}{P} \right) y$$

$$0 = \left(\frac{43 - P}{P} \right) y$$

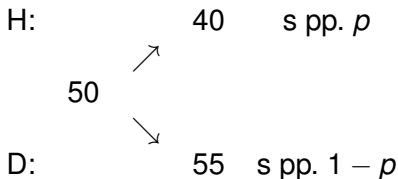
- Čiže P musí byť rovná 43 p.j.
- Ak na trhu existujú práve dve akcie, v prípade stanovenia ich aktuálnych cien sa stáva určujúcou arbitráž. Hovoríme, že oceňujeme na princípe žiadna arbitráž.

ZÁNİK ARBITRÁŽNEJ PRÍLEŽITOSTI

- Existencia arbitrážnej príležitosti spôsobí jej takmer okamžitý zánik.
- Investori na trhu začnú okamžite nakupovať akcie vo veľkých množstvách v zodpovedajúcom riziko eliminačnom pomere.
- Zvýšený dopyt po akciách, skoro okamžite zdvihne ich aktuálnu cenu, čo povedie k prerovnaniu cien a výnosov akcií a arbitráž zanikne.
- Preto oceňovanie na princípe žiadna arbitráž je rozumné oceňovanie.

ARBITRÁŽ SPOJENÁ S PREDAJOM AKCIÍ

- Arbitráž možno dosiahnuť aj predajom akcií v čase 0 a ich spätným dokúpením v rovnakých množstvách v čase 1.
- Uvažujme napr., že spolu s akciou A existuje na trhu akcia C s týmito vlastnosťami:



- Ceny a výnosy akcií sú aj v tomto prípade perfektne negatívne korelované.

ARBITRÁŽ SPOJENÁ S PREDAJOM AKCIÍ

- Postup nájdania a využitia arbitrážnej príležitosti ostáva rovnaký, t.j. najprv investor eliminuje riziko spojené s náhodnými udalosťami H , D :

$$1,2x + 0,8y = 0,8x + 1,1y$$

- Z čoho:

$$y = \frac{4}{3}x$$

- V tomto prípade investor akcie v čase 0 predáva, preto volí $x < 0$ a súčasne $y < 0$ pri $x + y = m$, kde $-m$ je počiatočná veľkosť kapitálu uloženého v akciách A , C .
- Čiže: $x = \frac{3}{7}m$, $y = \frac{4}{7}m$. Tzn. ak napr. $m = 7000$ p.j., tak v čase 0 vlastní investor 150 kusov akcie A a 80 kusov akcie C .

ARBITRÁŽ SPOJENÁ S PREDAJOM AKCIÍ

- Ak v čase 1 príde k udalosti H , tak investor dokúpi späť akcie A , C v príslušných počtoch kusov:

$$-150(24 \text{ p.j.}) - 80(40 \text{ p.j.}) = -6800 \text{ p.j.}$$

- Podobne pri nastaní udalosti D :

$$-150(16 \text{ p.j.}) - 80(55 \text{ p.j.}) = -6800 \text{ p.j.}$$

- Pretože v čase 0 bol investor vlastníkom rovnakého počtu kusov akcií v celkovej hodnote 7000 p.j., ich predajom v tomto čase získal finančné prostriedky v tejto výške a spätným dokúpením akcií zarobil 200 p.j. bez ohľadu na to, ktorá z udalostí nastala, a súčasne má rovnaké množstvo akcií späť.

ZOVŠEOBECNENIE

- V predchádzajúcich príkladoch sme zakaždým uvažovali dvojicu perfektne negatívne korelovaných cien (výnosov) akcií. Zovšeobecnenie môžeme urobiť pre akúkoľvek dvojicu akcií, ktorých cena sa za časové obdobie T zmení s nejakou pravdepodobnosťou $p \in (0, 1)$, resp. $1 - p$ na inú hodnotu.
- Uvažujme nasledujúcu dvojicu akcií E, F :



- kde S, W je cena akcie E , resp. F v čase 0 a u, d, g, h sú kladné koeficienty, ktorými je pre násobená S , resp. W v čase T , reprezentujú tak zmenu ceny v dôsledku nastania udalosti H alebo D .

KORELÁCIA AKCIÍ

- Potom očakávané ceny v čase T pre jednotlivé akcie budú:

$$\bar{P}_E = (pu + (1 - p)d) S$$

$$\bar{P}_F = (pg + (1 - p)h) W$$

- Smerodajné odchýlky budú:

$$\sigma_E = \sqrt{p(1 - p)} |u - d| S$$

$$\sigma_F = \sqrt{p(1 - p)} |g - h| W$$

- Kovariancia:

$$\sigma_{EF} = p(1 - p)(u - d)(g - h)SW$$

- Teda korelačný koeficient bude:

$$\rho_{EF} = \frac{p(1 - p)(u - d)(g - h)SW}{p(1 - p) |u - d| |g - h| SW} = \frac{(u - d)(g - h)}{|u - d| |g - h|}$$

KORELÁCIA AKCIÍ

- Ak $u > d$ a súčasne $g < h$ alebo ak $u < d$ a súčasne $g > h$, tak $\rho_{EF} = -1$.
- To znamená, že medzi cenami akcií existuje perfektná negatívna korelácia a teda je tu možnosť vzniku arbitrážnej príležitosti.
- Ak $u > d$ a súčasne $g > h$ alebo ak $u < d$ a súčasne $g < h$, tak $\rho_{EF} = 1$.
- To znamená, že medzi cenami akcií existuje perfektná pozitívna korelácia. Neskôr ukážeme, že aj v tomto prípade môže na trhu existovať arbitrážna príležitosť.
- Poznámka: Všetky uvádzané závery platia aj pre výnosy akcií E, F . Ak teda hovoríme, že ceny akcií E, F sú perfektne negatívne (pozitívne) korelované, znamená to, že aj výnosy z nich sú také.

PREDPOKLADY OCEŇOVANIA

- Technika nájdenia maximálneho arbitrážneho zisku je pre dve akcie na trhu rovnaká bez ohľadu na koreláciu cien (výnosov) akcií.
- Skôr než sa pustíme do jej popisu, urobme niekoľko predpokladov kladených na koeficienty u , d , g , h .
- Nech u , d , g , h spĺňajú:

$$u > 1 > d \quad \text{a súčasne} \quad g < 1 < h \quad (14)$$

alebo

$$u < 1 < d \quad \text{a súčasne} \quad g > 1 > h \quad (15)$$

alebo

$$u > 1 > d \quad \text{a súčasne} \quad g > 1 > h \quad (16)$$

alebo

$$u < 1 < d \quad \text{a súčasne} \quad g < 1 < h \quad (17)$$

- Pri splnení (14), (15) nastáva perfektná negatívna korelácia, pri splnení (16), (17) perfektná pozitívna.

ELIMINÁCIA RIZIKA A ARBITRÁŽNY VÝNOS

- Nech x p.j. je investícia do akcie E a y je investícia do akcie F . Uvažujeme, že x, y sú ľubovoľné reálne čísla spĺňajúce $x + y = m$, kde m je výška investorovho počiatočného imania (pre tento moment predpokladajme, že $m \neq 0$).
- Aby investor eliminoval riziko, musí platiť:

$$(u - 1)x + (g - 1)y = (d - 1)x + (h - 1)y$$

- Z toho dostaneme: $y = \left(\frac{u-d}{h-g} \right) x$.
- Teda $x = \left(\frac{h-g}{u-d+h-g} \right) m$, $y = \left(\frac{u-d}{u-d+h-g} \right) m$.
- Výnos pri nastaní ktorejkoľvek z udalostí potom bude:

$$\frac{(u-1)(h-g)}{u-d+h-g} + \frac{(g-1)(u-d)}{u-d+h-g} = \frac{uh - dg - (u-d) - (h-g)}{u-d+h-g}$$

NEEXISTENCIA ARBITRÁŽE

- Označme

$$J = \frac{uh - dg - (u - d) - (h - g)}{u - d + h - g},$$

potom arbitrážny zisk investora bude rovný Jm .

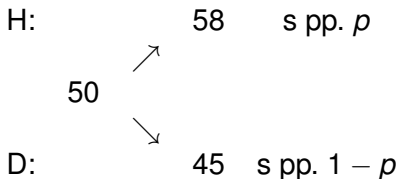
- Arbitrážna príležitosť zrejme nenastane v tom prípade, keď $J = 0$, t.j. keď platí:

$$uh - dg = u - d + h - g, \quad (18)$$

- Poznámka: Nulový bezrizikový zisk môže samozrejme investor dosiahnuť aj voľbou $x = 0 = y$. Hoci pri tejto možnosti je skutočne dosiahnutý zisk bez rizika (investor nič neinvestuje, nič nezíska, ani nič nestratí), očividne na takúto investíciu nemá vplyv to, či arbitráž existuje alebo nie.

ARBITRÁŽ PRI PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÝCH AKCIÁCH

- Technika eliminácie rizika a maximalizácie arbitrážneho zisku je popísaná vyššie, preto sa venujme tejto situácii iba nasledujúcim príkladom:
- Nech spolu s akciou A existuje na trhu iná bezdividendová akcia α s týmito vlastnosťami:



- Máme: $u = 1,2$, $d = 0,8$, $g = 1,16$ a $h = 0,9$.
- Ďalej platí:

$$y = \left(\frac{u - d}{h - g} \right) x = - \left(\frac{20}{13} \right) x$$

ARBITRÁŽ PRI PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÝCH AKCIÁCH

- Keďže $J = \frac{3}{35}$, tak na využitie núkajúcej sa arbitrážnej príležitosti je potrebné voliť $m > 0$, t.j. vlastniť v čase 0 nejaké akcie tak, aby $x + y > 0$. Ich predajom získané peňažné prostriedky sa potom spolu s počiatočným imaním použijú na nákup druhej z akcií.
- Pretože $m > 0$ a $x = -\left(\frac{13}{7}\right)m$, $y = \left(\frac{20}{7}\right)m$, tak je potrebné vlastniť akcie A , ktorých predajom v čase 0 nadobudne investor peňažné prostriedky na kúpu akcií α .
- Aby investor dosiahol na kladný arbitrážny zisk, kúpu a predaj uskutoční v zodpovedajúcom riziko eliminačnom pomere.
- Nech investor v čase 0 vlastní 65 kusov akcie A (tzn. $m = 700$ p.j.). Ich predajom nadobudne 1300 p.j., ktoré spolu s počiatočným imaním 700 p.j. použije na kúpu 40 kusov akcie α .

ARBITRÁŽ PRI PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÝCH AKCIÁCH

- Ak nastane udalosť H , investor predá akcie α za

$$40(58 \text{ p.j.}) = 2320 \text{ p.j.}$$

- a súčasne musí dokúpiť 65 kusov akcie A späť celkovo za

$$65(24 \text{ p.j.}) = 1560 \text{ p.j.}$$

- Pretože na začiatku bol držiteľom peňažných prostriedkov vo výške $m = 700 \text{ p.j.}$, tak jeho arbitrážny zisk činí $2320 - 2260 = 60 \text{ p.j.}$

- Ak nastane udalosť D , investor predá akcie α za

$$40(45 \text{ p.j.}) = 1800 \text{ p.j.}$$

- a súčasne musí dokúpiť 65 kusov akcie A späť celkovo za

$$65(16 \text{ p.j.}) = 1040 \text{ p.j.}$$

- Aj v tomto prípade jeho zisk bude $1800 - 1740 = 60 \text{ p.j.}$

ARBITRÁŽ PRI PERFEKTNE POZITÍVNE KORELOVANÝCH AKCIÁCH

- Vidíme, že investor dosiahol bez rizika kladný zisk a súčasne má akciu A v rovnakom počte kusov ako na začiatku späť.
- Nastala arbitráž a investor ju využil.
- Poznámka: V špeciálnom prípade, v ktorom $\frac{u-d}{h-g} = -1$, investor na využitie arbitráže (ak existuje) nepotrebuje žiadne dodatočné prostriedky, t.j. $m = 0$, keďže nákup jednej z akcií je plne hrađený predajom druhej akcie. V tomto prípade arbitráž existuje, ak $u - g \neq 0$.

DVE AKCIE A DLHOPIS

- Predpokladajme, že spolu s akciami E , F existuje na trhu aj diskontný dlhopis úročený na príslušné obdobie držania akcií bezrizikovou úrokovou sadzbou $r_f > 0$.
- Ďalej predpokladajme, že nárast v cene ktorejkoľvek akcie je väčší než r_f a rovnako tak, že pokles v cene akcie je menší než 1.
- Keďže investor má možnosť zahrnúť do svojho portfólia aj dlhopis, ktorý sa na jeho skladbe bude podieľať podielom vo výške z p.j., tak platí: $x + y + z = m > 0$.
- Investor môže dlhopisy aj emitovať (predávať) v ľubovoľnom množstve, teda predpokladáme, že z môže byť aj ľubovoľné záporné číslo.
- Pretože na trhu teraz vystupuje aj diskontný dlhopis s dobou splatnosti rovnou práve 1 č.j. a diskrétnou bezrizikovou úrokovou sadzbou r_f určenou práve na toto obdobie (t.j. 1 p.j. vzrastie na $(1 + r_f)$ p.j. za toto obdobie), tak hodnota peňažných jednotiek sa s časom mení.

DVE AKCIE A DLHOPIS

- Výnos z dlhopisu je istý, preto naň nemá vplyv, aká udalosť nastane. Investor má teda možnosť za 1 č.j. zarobiť na každej peňažnej jednotke r_f p.j. a preto je nevýhodné držať peniaze neinvestované.
- Výhodnejšie než len do dlhopisov, môže byť súbežné investovanie do akcií, špeciálne v tom prípade, ak existuje arbitrážna príležitosť.
- Eliminujeme riziko vplyvu náhodných udalostí:

$$(u - 1)x + (g - 1)y + r_f z = (d - 1)x + (h - 1)y + r_f z$$

- Odtiaľ získame $y = \left(\frac{u-d}{h-g} \right) x$.
- Keďže $x + y + z = m$, tak

$$x = \left(\frac{h - g}{u - d + h - g} \right) (m - z), y = \left(\frac{u - d}{u - d + h - g} \right) (m - z).$$

DVE AKCIE A DLHOPIS

- Investor maximalizuje arbitrážny zisk voľbou z :

$$\max_z (u-1)x + (g-1)y + r_f z = J(m-z) + r_f z = Jm + z(r_f - J)$$

- Voľba z závisí od toho, či $r_f > J$, $r_f < J$ alebo $r_f = J$.
- Ak $r_f > J$, tak existuje arbitráž a investor dokáže navýšiť svoj zisk potenciálne až do nekonečna voľbou $z \rightarrow \infty$.
Na financovanie nákupu dlhopisov však potrebuje vlastniť v čase 0 nejaké akcie, ktorých predajom v riziko eliminujúcim pomere spolu s počiatočným kapitálom m p.j. získa finančné prostriedky potrebné na investíciu do dlhopisov.
- Ak $r_f < J$, tak existuje arbitráž a investor dokáže navýšiť svoj zisk potenciálne až do nekonečna voľbou $z \rightarrow -\infty$.
Predajom dlhopisov získa peňažné prostriedky, ktoré spolu s počiatočným kapitálom m p.j. použije na nákup akcií v zodpovedajúcom riziko eliminujúcom pomere.

DVE AKCIE A DLHOPIS

- Ak $r_f = J$, tak je možné voliť z ľubovoľne, pretože pre akúkoľvek jeho hodnotu bude zisk investora Jm bez ohľadu na voľbu z . V tomto prípade neexistuje na trhu arbitrážna príležitosť a bezriziková úroková sadzba je správne (bezarbitrážne) navolená.
- Predchádzajúce odvodenia predpokladali, že $\frac{u-d}{h-g} \neq -1$.
- Ak $\frac{u-d}{h-g} = -1$, tak z eliminácie rizika dostaneme $y = -x$. Na maximalizáciu arbitrážneho zisku (ak arbitráž existuje) nemá v tomto prípade vplyv z , pretože z $x + y + z = m$ dostaneme $z = m$.
- Kladný arbitrážny zisk:

$$(u - 1)x + (g - 1)y + r_f z = ux + gy + r_f m = (u - g)x + r_f m.$$

bude možné dosiahnuť pre $u \neq g$.