

# CENNÉ PAPIERE

## Dlhopisy

Základy finančnictva

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva>

# CENNÉ PAPIERE

**Cenný papier** – listina potvrdzujúca majetkové právo vlastníka na určité plnenie voči tomu, kto cenný papier emitoval; sú nositeľom právneho nároku (zdroje môžem vymáhať, ak ich dlžník nevráti).

## Klasifikácia CP:

- podľa ekonomickej funkcie:
  - CP slúžiace na premenu úspor na kapitál (akcie, obligácie),
  - CP používané v platobnom styku (šeky),
- podľa štatútu dlžníka:
  - štátne CP,
  - CP miest a obcí,
  - súkromné CP,

# KLASIFIKÁCIA CENNÝCH PAPIEROV

- podľa prevoditeľnosti:
  - voľne prevoditeľné (akcie, depozitné certifikáty),
  - s obmedzenou prevoditeľnosťou (zmenky),
  - neprevoditeľné (šeky),
- podľa spôsobu emisie:
  - individuálne CP (zmenky),
  - hromadné CP (akcie, obligácie),
- podľa charakteru dôchodku:
  - CP s pevným výnosom (šeky),
  - CP s premenlivým výnosom (akcie),
- podľa druhu stelesnenia majetkového práva:
  - účastnícke CP (akcie),
  - CP stelesňujúce práva na zaistenie pohľadávky (hypotekárny záložný list),
  - CP stelesňujúce dispozičné práva – konosamenty.

# DLHOPISY

- **Dlhopisy** – vyjadrujú dlžnícky záväzok emitenta voči veriteľovi,
- majú dobu splatnosti ("maturity")
- práva z dlhopisov sa premlčujú po uplynutí 10 rokov odo dňa splatnosti,
- majú presne určené časové rozvrhnutie splátok, úrokov a iných odmien (prémie, zlosovateľné výhry),
- **nominálna hodnota** (ďalej NH) – dlžná suma uvedená v texte dlhopisu.
- **Patria sem:**
  - štátny dlhopis (obligácia),
  - podnikový dlhopis (obligácia),
  - komunálna obligácia,
  - bankový dlhopis (obligácia),
  - zamestnanecká obligácia (neprevoditeľné dlhopisy na meno vydávané výlučne pre súčasných alebo minulých zamestnancov).

# NÁLEŽITOSTI DLHOPISU

## Náležitosti dlhopisu:

1. označenie emitenta
2. názov dlhopisu a jeho číselné označenie
3. NH dlhopisu
4. spôsob stanovenia úroku, ďalších výplat
5. prehlásenie emitenta, že dlží NH majiteľovi dlhopisu
6. záväzok emitenta, že to splatí
7. v prípade dlhopisu na meno – meno majiteľa
8. dátum vydania
9. odtlačok podpisov predstaviteľov emitenta
10. povolenie k emisii

# DLHOPISY

- dlhopisy môžu znieť:
  - na meno (prevoditeľné rubopisom, neprevoditeľné),
  - na majiteľa (prevod iba odovzdaním),
- dlhopisy môžu byť:
  - bezkupónové (zero coupon bonds),
  - kupónové (coupon bonds),
- dlhopisy ďalej delíme:
  - so zárukou (majetok emitenta, záruka iného subjektu),
  - bez záruky (*na emitentovo dobré slovo*),
- dlhopis má dve časti:
  1. vlastný dlžný úpis (plášť),
  2. kupónový hárok s talónom,
- v súčasnosti - **registrované dlhopisy**, tj. majiteľ je u emitenta registrovaný a ten mu zasiela úroky na účet.

# OCEŇOVANIE DLHOPISOV

- Aká bude súčasná hodnota  $B$  bezkupónového dlhopisu, ktorého NH je rovná  $F$  za  $n$  rokov?
- Uvažujme zložené úrokovanie.
- Nech  $r_n$  označuje ročnú (nominálnu) úrokovú sadzbu na obdobie  $n$  rokov.
- Hodnota  $r_n$  závisí od  $n$ , pretože úroky závisia od doby splatnosti (maturity) dlhopisu.
- Potom:

$$B = \frac{F}{(1 + r_n)^n}. \quad (1)$$

# HODNOTA BEZKUPÓNOVÉHO DLHOPISU

- Uvažujme spojité úrokovanie.
- Nech  $R(T_0, T)$  - spojitá úroková sadzba na obdobie od času  $T_0$  do času  $T$ .
- Potom súčasná hodnota dlhopisu emitovanom v čase  $T_0$  s dátumom splatnosti v čase  $T$  je:

$$B(T_0, T) = Fe^{-R(T_0, T)(T-T_0)}, \quad (2)$$

- kde  $T - T_0$  predstavuje dobu splatnosti dlhopisu, tj. časový rozdiel medzi dátumom splatnosti a dátumom emitácie dlhopisu.



# DISKONTNÝ DLHOPIS

- **Diskontný dlhopis** (discount bond) je taký dlhopis, ktorého  $F = 1$  p.j.
- Jeho súčasná hodnota:

$$P = \frac{1}{(1 + r_n)^n}, \quad (3)$$

- ak uvažujeme zložené úrokovanie, resp.:

$$P(T_0, T) = e^{-R(T_0, T)(T - T_0)}, \quad (4)$$

- ak úročíme spojte.
- Hodnota dlhopisu s NH vo výške  $F$  je potom:

$$B(T_0, T) = FP(T_0, T). \quad (5)$$

# DISKONTNÝ DLHOPIS

- Zo vzťahu (4) vyplýva:

$$R(T_0, T) = -\frac{\ln P(T_0, T)}{(T - T_0)},$$

- Zo vzťahu (4), resp. (2) vyplýva:

$$P(T, T) = 1 = P(T_0, T_0),$$

- resp.:

$$B(T, T) = F = B(T_0, T_0).$$

- Teda súčasná hodnota dlhopisu, ktorý je splatný práve teraz, je rovná jeho NH.

## ARBITRÁŽNA PRÍLEŽITOSŤ

- fixujme  $T_0$  - napr. dnes,
- uvažujme dva diskontné dlhopisy  $A$ ,  $B$ , ktorých dátumy splatnosti sú  $T_A$ , resp.  $T_B$ , pričom  $0 < T_A < T_B$  (a teda  $T_A - T_0 < T_B - T_0$ ),
- nech  $P(T_0, T_A)$  označuje súčasnú hodnotu dlhopisu  $A$  a nech  $P(T_0, T_B)$  označuje súčasnú hodnotu dlhopisu  $B$ ,
- potom by malo platiť:  $P(T_0, T_A) \geq P(T_0, T_B)$ .
- Nech by to nebola pravda, tj. platí:

$$P(T_0, T_A) < P(T_0, T_B). \quad (6)$$

- V čase  $T_0$  kúpme dlhopis  $A$  a predajme (emitujme) dlhopis  $B$ , keďže predpokladáme (6), tak získame  $P(T_0, T_B) - P(T_0, T_A) > 0$  p.j.
- v čase  $T_A$  obdržíme 1 p.j. a v čase  $T_B$  (väčšom ako  $T_A$ ) zaplatíme 1 p.j.

# ARBITRÁŽNA PRÍLEŽITOSŤ

- Bez rizika vieme vyrobiť z 0 p.j. kladný zisk.
- Toto sa nazýva **arbitráž**.
- Všetky rozumné oceňovania by mali rešpektovať princíp:

ŽIADNA ARBITRÁŽ

(NO ARBITRAGE, NO FREE LUNCH)

- Je to princíp, ktorý vracia ceny naspäť. V súvislosti s predchádzajúcim príkladom, ak by nastalo  $P(T_0, T_A) < P(T_0, T_B)$ , tak by trh zareagoval prepadom ceny dlhopisu  $B$  (nepredával by sa) a naopak cena dlhopisu  $A$  by vzrástla vďaka jeho zvýšenému predaju.
- Takže súčasná hodnota diskontného dlhopisu je pri fixnom  $T_0$  klesajúcou funkciou maturity  $(T - T_0)$ .

# HODNOTA DISKONTNÉHO DLHOPISU

- fixujme teraz  $T$  a sledujme ako sa vyvíja hodnota diskontného dlhopisu s meniacim sa  $T_0$ ,
- aby tento vývoj korešpondoval s predchádzajúcim tvrdením a totiž, že hodnota diskontných dlhopisov s dlhšou maturitou je nižšia ako hodnota diskontného dlhopisu s kratšou maturitou, tak  $P(T_0, T)$  musí byť rastúcou funkciou  $T_0 \leq T$
- v tomto prípade sa však môžu vyskytnúť krátkodobé poklesy hodnoty dlhopisu súvisiace s nárastom úrokovej miery

## KUPÓNOVÉ DLHOPISY

- **kupónové dlhopisy** - vyplácajú okrem NH na konci doby splatnosti aj pravidelný kupón počas doby splatnosti určený ako percentá z NH dlhopisu.
- Nech dlhopis vypláca raz ročne pravidelný kupón vo výške  $C = cF$ , kde  $c \in \langle 0, 1 \rangle$  je ročná kupónová sadzba. Aká je súčasná hodnota takéhoto dlhopisu, keď NH je rovná  $F$  a doba splatnosti je  $n$  rokov?
- ak uvažujeme zložené (v ďalšom diskkrétne) úrokovanie, tak súčasná hodnota takéhoto dlhopisu je:

$$B = \sum_{t=1}^n \frac{C}{(1 + r_t)^t} + \frac{F}{(1 + r_n)^n}. \quad (7)$$

- všeobecne, ak hotovostné toky prichádzajúce v každom roku majú rôznu výšku, tak súčasná hodnota bude:

$$B = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1 + r_t)^t}.$$

## KUPÓNOVÉ DLHOPISY

- Uvažujme spojité úrokovanie, pričom platby prichádzajú v časoch  $T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n = T$ , kde  $T_i = T_0 + i\Delta$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$  (teda  $\Delta$  označuje periódu vyplácania kupónu).
- Nech dlhopis v každom čase  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , vypláca kupón vo výške  $\Delta C$ , kde  $C = cF$  s  $c \in \langle 0, 1 \rangle$ .
- Potom súčasnú hodnotu takéhoto dlhopisu vypočítame ako:

$$B(T_0, T) = \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)} \quad (8)$$

- alebo s využitím vzťahu (4) na výpočet hodnoty diskontovaného dlhopisu ako:

$$B(T_0, T) = \sum_{i=1}^n \Delta C P(T_0, T_i) + F P(T_0, T_n) \quad (9)$$

# PRÍTOMNÁ HODNOTA

- vo všeobecnosti, ak z držby dlhopisu plyní v čase  $T_i$  výplata (finančný tok)  $C_i$ , tak prítomná hodnota takéhoto dlhopisu je:

$$V(T_0, T) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} = \sum_{i=1}^n C_i P(T_0, T_i).$$



# VÝNOS DO SPLATNOSTI

- **výnos do splatnosti** (yield to maturity) –  $y$  je výnosová sadzba (tiež, výnosová miera, resp. výnosové percento), pri ktorej sa bude súčasná hodnota budúcich príjmov z dlhopisu rovnať súčasnej hodnote dlhopisu
- diskrétné úrokovanie:
- pretože prítomnú hodnotu kupónového dlhopisu vypočítame zo vzťahu (7), tak  $y$  dostaneme z rovnosti:

$$\sum_{t=1}^n \frac{C}{(1+r_t)^t} + \frac{F}{(1+r_n)^n} = \sum_{t=1}^n \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{F}{(1+y)^n} \quad (10)$$

- pre  $n > 2$  sa rieši numericky

## PRÍKLAD

Uvažujme kupónový dlhopis s maturitou  $n = 2$  roky, ktorý vypláca 5% ročný kupón. Nech  $B = F = 100$  EUR (dlhopis, ktorého prítomná hodnota je rovná jeho NH sa nazýva par bond) Nájdite výnos do splatnosti  $y > 0$ .

### Riešenie:

$B = F = 100$  EUR,  $n = 2$ ,  $c = 0,05$ ,  $C = cF = 5$  EUR,  $y = ?$

S využitím (10) dostaneme rovnicu:

$$100 = \frac{5}{(1+y)} + \frac{105}{(1+y)^2}.$$

Odtiaľ po úprave:

$$0 = 100(1+y)^2 - 5(1+y) - 105,$$

$$0 = 20(1+y)^2 - (1+y) - 21,$$

$$y = 0,05.$$

Výnos do splatnosti takéhoto dlhopisu bude 5%.

# VÝNOS DO SPLATNOSTI

- Vo všeobecnosti, ak uvažujeme kupónový par bond s maturitou  $n$  rokov a ročným kupónom  $C = cF$ , tak  $y = c \geq 0$ .
- Ukážeme:

$$F = B = cF \sum_{t=1}^n \left( \frac{1}{1+y} \right)^t + F \left( \frac{1}{1+y} \right)^n,$$

$$1 = \frac{c}{(1+y)} \frac{1 - \left( \frac{1}{1+y} \right)^n}{1 - \frac{1}{1+y}} + \left( \frac{1}{1+y} \right)^n,$$

$$0 = \left( 1 - \frac{c}{y} \right) \left( 1 - \left( \frac{1}{1+y} \right)^n \right).$$

- tzn.  $1 = \frac{c}{y}$  a teda  $y = c$  alebo  $1 = \left( \frac{1}{1+y} \right)^n$  a v tom prípade  $y = 0$ . Ak ale  $y = 0$ , tak  $c = 0$  a teda opäť  $y = c$ .

# VÝNOS DO SPLATNOSTI

- spojité úrokovanie:
- pretože prítomnú hodnotu kupónového dlhopisu vypočítame zo vzťahu (8), tak  $y$  dostaneme z rovnosti:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)} = \\ = \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-y(T_i - T_0)} + F e^{-y(T_n - T_0)} \end{aligned} \quad (11)$$

- opäť numerický problém

# VÝNOS DO SPLATNOSTI

- vo všeobecnosti:  $y \neq R(T_0, T_n)$
- ak je však dlhopis bezkupónový, tak  $y = R(T_0, T_n)$
- predpokladajme, že  $R(T_0, T)$  je rýdzo rastúca v  $T$ , potom dostávame:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-y(T_i - T_0)} + F e^{-y(T_n - T_0)} = \\ & \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)} > \\ & > \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-R(T_0, T_n)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)} \end{aligned}$$

- a teda  $y < R(T_0, T_n)$ .

# VÝNOS DO SPLATNOSTI

- v prípade par bond-u tvrdenie  $y = c$  platné pri diskretnom úrokovaní s ročným vyplácaním kupónov platí pri spojitom úrokovaní len približne, pretože:

$$\begin{aligned}F = B &= cF \sum_{i=1}^n e^{-yi} + Fe^{-yn}, \\1 &= \frac{c}{e^y} \frac{1 - e^{-yn}}{1 - e^{-y}} + e^{-yn}, \\0 &= (1 - e^{-yn}) \left( \frac{c}{e^y - 1} - 1 \right).\end{aligned}$$

- tzn. buď  $e^y = c + 1$  a teda  $y = \ln(c + 1) \approx c$  alebo  $0 = (1 - e^{-yn})$ ,
- v druhom prípade  $y = c$ , pretože  $y = 0$  a v tom prípade aj  $c = 0$ .

## PAR YIELD

- v literatúre sa môžeme stretnúť s pojmom „par yield“, myslí sa tým percentuálna výška kupónu z NH pri určitej maturite dlhopisu, ktorého aktuálna hodnota sa rovná jeho nominálnej hodnote (čiže ide o par bond)
- v prípade diskrétného úrokovania dostaneme výšku  $c$  z rovnosti:

$$F = B = \sum_{t=1}^n \frac{cF}{(1+r_t)^t} + \frac{F}{(1+r_n)^n},$$

- odkiaľ:

$$c = \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+r_n)^n}\right)}{\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+r_t)^t}}. \quad (12)$$

# PAR YIELD

- v prípade spojitého úrokovania dostaneme výšku  $c$  z rovnosti:

$$F = B = \sum_{i=1}^n c \Delta F e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)},$$

- odkiaľ:

$$c = \frac{1 - e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)}}{\Delta \sum_{i=1}^n e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)}} = \frac{1 - P(T_0, T_n)}{\Delta \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i)}. \quad (13)$$



# DLHOPISY S PLÁVAJÚCIMI KUPÓNMI

- floating rate bonds
- dopredu nie je výška kupónov daná; ujasňuje sa priebežne na základe pohybu úrokových sadzieb EURIBOR alebo LIBOR
- je však dané pravidlo úrokovania
- označme  $L_{\Delta}(T)$  LIBOR(EURIBOR) sadzba na obdobie  $\Delta$  od času  $T$  (napr. od dnes)
- potom hodnota diskontného dlhopisu na obdobie  $\Delta$  bude pri diskretnom úrokovaní:

$$P(T, T + \Delta) = \frac{1}{1 + \Delta L_{\Delta}(T)}. \quad (14)$$

- z toho:

$$L_{\Delta}(T) = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{1}{P(T, T + \Delta)} - 1 \right). \quad (15)$$

# DLHOPISY S PLÁVAJÚCIMI KUPÓNMI

- uvažujme dlhopis s plávajúcimi kupónmi a NH rovnou 1 p.j.,
- nech v časoch  $T_i = T_0 + i\Delta$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$ , prichádzajú k majiteľovi dlhopisu kupóny vo výške  $C_i = \Delta L_\Delta(T_{i-1})$ ,
- tzn. v čase  $T_{i-1}$  majiteľ dlhopisu vie, aký kupón dostane v čase  $T_i$  („vždy vidí jeden kupón dopredu“),
- v čase splatnosti dlhopisu  $T_n$  dostane majiteľ dlhopisu  $1 + \Delta L_\Delta(T_{n-1})$
- potom **súčasná hodnota takéhoto dlhopisu je rovná 1 p.j.**

# HODNOTA DLHOPISU S PLÁVAJÚCIMI KUPÓNMI

- ukážeme, že jeho hodnota je naozaj rovná 1 p.j.:
- použijeme „rolovacu strategiu“ a taký dlhopis vyrobíme,
- uvažujme, že v čase  $T_0$  použijeme 1 p.j. na nákup diskontného dlhopisu na obdobie  $T_1 - T_0$  (ide o obdobie dĺžky  $\Delta$ ); keďže jeho hodnota je  $P(T_0, T_1)$ , tak za 1 p.j. dostaneme  $\frac{1}{P(T_0, T_1)}$  kusov takéhoto dlhopisu,
- takže v čase  $T_1$  nám  $\frac{1}{P(T_0, T_1)}$  kusov takéhoto dlhopisu prinesie  $\frac{1}{P(T_0, T_1)}$  p.j.,
- z tejto sumy odložíme bokom  $\frac{1}{P(T_0, T_1)} - 1$  p.j. a zvyšok, tj. 1 p.j. použijeme na nákup ďalšieho diskontného dlhopisu na obdobie  $T_2 - T_1$ , ktorého hodnota je  $P(T_1, T_2)$ ,
- dostaneme  $\frac{1}{P(T_1, T_2)}$  kusov tohto dlhopisu, ktoré nám v čase  $T_2$  prinesú  $\frac{1}{P(T_1, T_2)}$  p.j.

# ROLOVACIA STRATÉGIA

- postup opakujeme  $n$  krát, tj. do času  $T_{n-1}$  (vrátane),
- v čase splatnosti dlhopisu s plávajúcimi kupónmi  $T_n$  potom dostaneme  $1 + \frac{1}{P(T_{n-1}, T_n)} - 1$  p.j. z poslednej držby dlhopisov,
- sumy, ktoré odkladáme bokom predstavujú výšku kupónov dlhopisu s plávajúcimi kupónmi a NH rovnou 1 p.j.,
- skutočne; z (15) máme:

$$C_i = \Delta L_{\Delta}(T_{i-1}) = \Delta \frac{1}{\Delta} \left( \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right).$$

- pre všetky  $i = 1, 2, \dots, n$ ,
- na konci (tj. v čase  $T_n$ ) potom dostaneme  $C_n + 1$  p.j., čo predstavuje súčet posledného kupónu a jednotkovej NH dlhopisu.

# ROLOVACIA STRATÉGIA

- pri zisťovaní hodnoty dlhopisu s plávajúcimi kupónmi a NH rovnou  $F$  p.j., stačí na to, aby sme ukázali, že súčasná hodnota takéhoto dlhopisu je rovná  $F$  p.j., zopakovať predchádzajúci postup, v ktorom pozmeníme výšku NH a výšku prichádzajúcich kupónov pre násobením  $F$ ,
- rovnaké závery dostaneme aj v prípade spojitého úrokovania, ak uvažujeme kupónový dlhopis s plávajúcimi kupónmi a NH rovnou 1 p.j., pričom kupóny prichádzajúce k majiteľovi dlhopisu v časoch  $T_i = T_0 + i\Delta$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$ , budú  $C_i = e^{\Delta L_{\Delta}(T_{i-1})} - 1$ .

# FORWARDOVÉ ÚROKOVÉ MIERY

- **Forward (forwardový kontrakt)**– dohoda o budúcom obchode; zmluva medzi dvoma stranami uzavretá v súčasnosti o povinnosti kúpiť alebo predat' nejaké podkladové aktívum („underlying asset“) v stanovenom čase v budúcnosti (dátum vypršania – „maturity“) za cenu stanovenú v súčasnosti
- uvažujme podkladové aktívum – diskontný dlhopis
- strany **A**, **B** sa dnes (v čase  $T_0$ ) dohodnú, že v čase  $T_1 > T_0$  strana **A** kúpi od strany **B** za dohodnutú cenu  $K$  diskontný dlhopis (tj. dlhopis s NH rovnou 1 p.j.) splatný v čase  $T_2 > T_1$
- v čase  $T_1$  jedna z tých dvoch strán bude stratová (prehrá), kým druhá zisková, pretože  $P(T_1, T_2)$  nie je vopred jasné číslo

# FORWARDOVÉ ÚROKOVÉ MIERY

- Pýtame sa, aké má byť  $K$ , aby hodnota kontraktu v čase  $T_0$  bola rovná 0? Teda, aby to bol férový kontrakt pre obe strany.
- Kontrakt vieme „vyrobiť“:
- z pohľadu strany **A**: v čase  $T_0$  predá  $K$  kusov dlhopisu  $P(T_0, T_1)$  a kúpi 1 kus dlhopisu  $P(T_0, T_2)$ ,
- bilancia v čase  $T_1$ :  $P(T_1, T_2) - K$ ,
- bilancia v čase  $T_0$ :  $KP(T_0, T_1) - P(T_0, T_2)$ ,
- aby hodnota kontraktu v čase  $T_0$  bola rovná 0, musí platiť:

$$KP(T_0, T_1) - P(T_0, T_2) = 0,$$

- z toho:

$$K = \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}.$$

## ARBITRÁŽNA PRÍLEŽITOSŤ

- ak by  $K > \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$ , strana **A** nemá záujem o takýto kontrakt, pretože si vie „vyrobiť“ lepšie  $K$  cez predchádzajúcu stratégiu
- ak naopak  $K < \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$ , tak strana **A** prejaví záujem o kontrakt a k tomu nakúpi  $K$  kusov dlhopisu  $P(T_0, T_1)$  a predá 1 kus dlhopisu  $P(T_0, T_2)$
- pretože  $K < \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$ , tak je v čase  $T_0$  v pluse
- v čase  $T_1$  zaplatí sumu  $K$  za dlhopis plynúcu z kontraktu, ale dostane  $K$  p.j. z nominálnych hodnôt  $K$  kusov dlhopisov  $P(T_0, T_1)$
- v čase  $T_2$  dostane 1 p. j. ako NH dlhopisu z kontraktu a súčasne zaplatí 1 p. j. ako NH dlhopisu  $P(T_0, T_2)$
- máme arbitráž, veľký dopyt po dlhopisoch  $P(T_0, T_1)$  tlačí ich cenu nahor, čím znižuje pomer  $\frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$  na úroveň  $K$



# FORWARDOVÉ ÚROKOVÉ MIERY

- diskrétny prístup:
- uvažujme, že 1 p. j. môžeme buď uložiť na 2 roky na účet v banke pri  $r_2$  - úrokovej sadzbe na 2 roky (ekvivaletne investovať do nákupu dvojročných bezkupónových dlhopisov) alebo sa 1 p. j. zúročí nasledujúcim spôsobom: prvý rok sa bude úročiť pri  $r_1$  - úrokovej sadzbe na 1 rok a nasledujúci rok pri  $f_{1,2}$  - čo je forwardová úroková sadzba platná na 2.rok dohodnutá dnes
- aby nebola arbitráž, musí platiť:  
 $(1 + r_1)(1 + f_{1,2}) = (1 + r_2)^2$ ,
- z toho:

$$\frac{1}{1 + f_{1,2}} = \frac{\frac{1}{(1+r_2)^2}}{\frac{1}{(1+r_1)}} \left( = \frac{P_{0,2}}{P_{0,1}} \right),$$

- resp.:

$$f_{1,2} = \frac{(1 + r_2)^2}{(1 + r_1)} - 1.$$

# FORWARDOVÉ ÚROKOVÉ MIERY

- vo všeobecnosti, ak  $f_{i,j}$  označuje forwardú úrokovú sadzbu na obdobie od roku  $i$  po rok  $j$  dohodnutú dnes, tak musí platiť:

$$(1 + r_i)^i (1 + f_{i,j})^{j-i} = (1 + r_j)^j,$$

- odtiaľ:

$$f_{i,j} = \left( \frac{(1 + r_j)^j}{(1 + r_i)^i} \right)^{\frac{1}{j-i}} - 1.$$

# DURÁCIA A IMUNIZÁCIA

- nárast úrokových mier môže spôsobiť pád hodnoty portfólia,
- pre jednoduchosť predpokladajme, že úroková sadzba  $r = 0,05$  je rovnaká pre všetky časové obdobia a vzrastie pre všetky časové obdobia rovnako na  $0,051$  (paralelný posun),
- nech investor má  $10^6$  p.j. v 1-ročných a v 20-ročných bezkupónových dlhopisoch (ďalej ZCB),
- aktuálna hodnota jeho 1-ročných ZCB sa potom zníži z  $\frac{10^6}{(1+0,05)} \doteq 952381$  p.j. na  $\frac{10^6}{(1+0,051)} \doteq 951475$  p.j., čo predstavuje stratu cca 906 p.j.
- na druhej strane hodnota jeho 20-ročných ZCB sa zníži z  $\frac{10^6}{(1+0,05)^{20}} \doteq 376890$  p.j. na  $\frac{10^6}{(1+0,051)^{20}} \doteq 369782$  p.j., čo predstavuje stratu cca 7108 p.j.
- **dlhodobejšie dlhopisy sú citlivejšie na pohyb úrokových sadzieb ako krátkodobejšie**

# DURÁCIA

- z anglického „duration“ (trvanie),
- spojitý prípad:
- uvažujme, že v časoch  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  prichádzajú hotovostné toky („cash-flow“)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (plynúce napr. z držby dlhopisu, resp. portfólia),
- súčasná hodnota („present value“):  $PV = \sum_{i=1}^n x_i e^{-r_{t_i} t_i}$ , kde  $r_{t_i}$  - spojitá úroková sadzba na obdobie od 0 po  $t_i$ ,
- **Fisher-Weilova durácia**:

$$D_{FW} = \frac{1}{PV} \sum_{i=1}^n t_i x_i e^{-r_{t_i} t_i}.$$

- ak označíme  $w_i = \frac{x_i e^{-r_{t_i} t_i}}{PV}$ , tak  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  a  $D_{FW} = \sum_{i=1}^n t_i w_i$  (vážený priemer časov, v ktorých prichádzajú platby); platí:  $t_1 \leq D_{FW} \leq t_n$ ,
- pre ZCB je  $D_{FW} = t_n$  a so zvyšujúcou sa splatnosťou dlhopisu sa zvyšuje i durácia.

# DURÁCIA

- Urobme paralelný posun:  $r_{t_i}$  na  $r_{t_i} + \lambda$ ,
- potom nová  $PV = \sum_{i=1}^n x_i e^{-(r_{t_i} + \lambda)t_i}$ ; označíme ju ako  $P(\lambda)$  (tj. pôvodná  $PV = P(0)$ ),
- pokiaľ nastane len malý posun úrokových sadzieb, tak môžeme skúmať:  $\frac{dP(0)}{d\lambda}$ ,
- dostaneme:

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = - \sum_{i=1}^n t_i x_i e^{-(r_{t_i} + 0)t_i} = -P(0)D_{FW}.$$

- Z toho približne:  $\Delta P \approx -D_{FW}P\Delta\lambda$ .
- Čiže ak  $\Delta\lambda > 0$ , tak  $\Delta P < 0$ ; čím vyššia je  $D_{FW}$ , tým je tá zmena výraznejšia.

# DURÁCIA

- Pre investora je dôležité, aby jeho portfólio reagovalo na zmenu úrokových sadzieb rovnako ako pohľadávka, teda aby mali rovnakú duráciu,
- je to ochrana len proti „malým“ paralelným posunom časovej štruktúry úrokových mier,
- práve preto, že durácia závisí od časovej štruktúry úrokových mier, treba ju pri pohybe znovu prepočítať.

# DURÁCIA

- diskrétny prípad:
- uvažujme, že v ekvidistantných časoch  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  prichádzajú hotovostné toky („cash-flow“)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,
- ak  $m$  označuje počet periód (napr.  $m = 2$  - polročne), potom:  $t_i = \frac{i}{m}$  a súčasná hodnota platby v čase  $t_i$  je  $PV(x_i) = x_i \left(1 + \frac{r_i}{m}\right)^{-i}$ ,
- predpokladajúc paralelný posun  $\lambda$  potom:

$$P(0) = PV = \sum_{i=1}^n PV(x_i),$$

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \left(1 + \frac{r_i + \lambda}{m}\right)^{-i},$$

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n -\frac{i}{m} x_i \left(1 + \frac{r_i + 0}{m}\right)^{-i-1}.$$

# KVÁZIMODIFIKOVANÁ DURÁCIA

- **Kvázimodifikovaná durácia:**

$$D_Q = \frac{-1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{i}{m} x_i (1 + \frac{r_i}{m})^{-i-1}}{\sum_{i=1}^n x_i (1 + \frac{r_i}{m})^{-i}}.$$

- Už to nie je vážený priemer časov, napr. ak máme ZCB a  $m = 1$ , tak:

$$D_Q = \frac{nx_n(1 + r_n)^{-n-1}}{x_n(1 + r_n)^{-n}} = \frac{n}{1 + r_n}.$$

- Nadďalej však platí:  $\Delta P \approx -D_Q P \Delta \lambda$ , tj. súčasná hodnota budúcich hotovostných tokov je pri malých paralelných posunoch úrokových mier citlivejšia tým viac, čím vyššia je durácia.