

TEÓRIA PORTFÓLIA

1. Uvažujte trh s tromi rizikovými cennými papiermi **A**, **B**, **C** takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) sú nasledujúce:

	CP A	CP B	CP C
výnosnosť	$r_A = 14$	$r_B = 16$	$r_C = 8$

Kovariančná matica:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 = 81 & \sigma_{AB} = 10 & \sigma_{AC} = -25 \\ \sigma_{AB} = 10 & \sigma_B^2 = 256 & \sigma_{BC} = 64 \\ \sigma_{AC} = -25 & \sigma_{BC} = 64 & \sigma_C^2 = 144 \end{pmatrix}$$

je kladne definitná a smerodajné odchýlky (rizikovosti) jednotlivých cenných papierov sú nasledujúce:

	CP A	CP B	CP C
rizikovosť	$\sigma_A = 9$	$\sigma_B = 16$	$\sigma_C = 12$

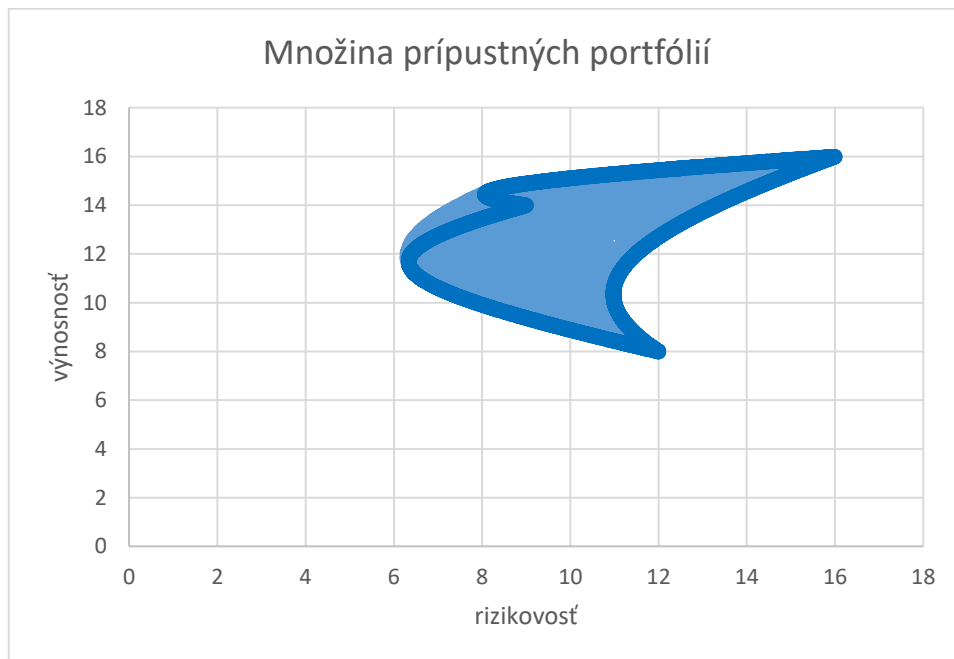
Poznámka:

Kvôli šetreniu miesta a prehľadnosti výpočtov sú údaje v percentách udávané bez symbolu percenta, tj. bez %. Uvedené sa týka aj údajov v predchádzajúcich tabuľkách, resp. v matici.

- a) Na množine všetkých prípustných portfólií pozostávajúcich z cenných papierov **A**, **B**, **C** nájdite efektívnu množinu.

Riešenie:

Skonstruovať množinu prípustných portfólií je pri troch cenných papieroch ťažšia úloha, než pri dvoch cenných papieroch a nejde ju vyjadriť ako funkčnú závislosť rizikovosti portfólia od jeho výnosnosti. Na nasledujúcom obrázku môžete vidieť, ako vyzerá množina všetkých prípustných portfólií pozostávajúcich z cenných papierov **A**, **B**, **C**:



Obr.1: Tmavomodrou – krivky vyjadrujúce množinu portfólií pozostávajúcich z kombinácie dvoch cenných papierov.
Bledomodrou+tmavomodrou – množina všetkých prípustných portfólií

Pretože kovariančná matica je kladne definitná (overte), môžeme na vyjadrenie efektívnej množiny využiť postup z prednášky prednáška6.pdf. Vyjadrime najprv C^{-1} :

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{512}{38247} & \frac{-95}{76494} & \frac{110}{38247} \\ \frac{-95}{76494} & \frac{581}{128832} & \frac{-143}{64416} \\ \frac{110}{38247} & \frac{-143}{64416} & \frac{469}{55632} \end{pmatrix},$$

potom:

$$\begin{aligned} \alpha &= \vec{r}^T C^{-1} \vec{r} = \frac{9393152}{2447808}, \\ \beta &= \vec{r}^T C^{-1} \vec{1} = \frac{733728}{2447808}, \\ \gamma &= \vec{1}^T C^{-1} \vec{1} = \frac{61575}{2447808}. \end{aligned}$$

Následne:

$$\alpha\gamma - \beta^2 = \frac{16352}{2447808}.$$

Dosadením do vzťahov:

$$K = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2}, L = \frac{-2\beta}{\alpha\gamma - \beta^2}, M = \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2},$$

dostaneme:

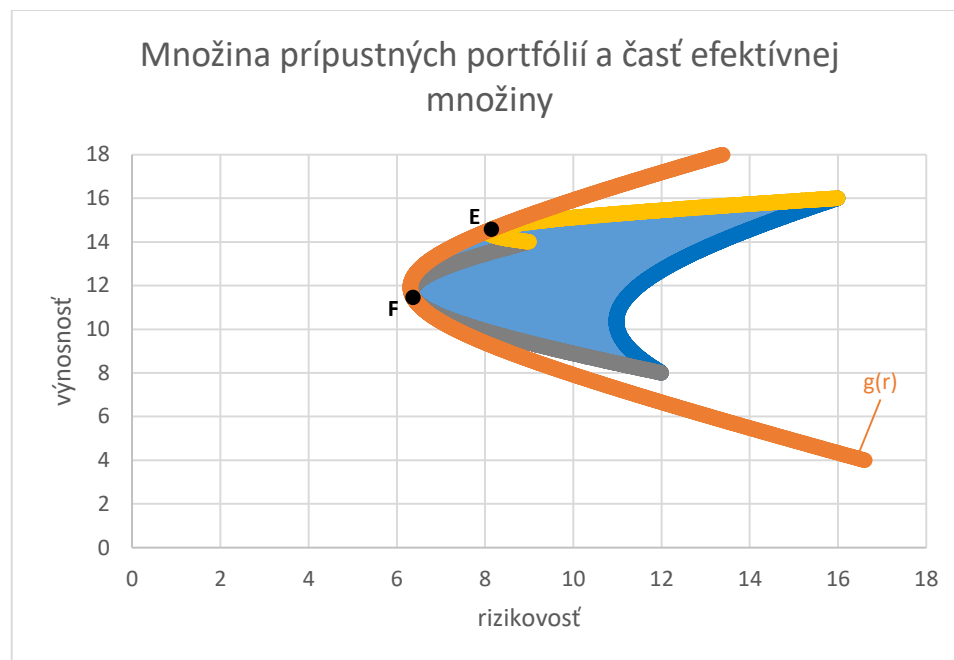
$$K = \frac{62929650}{(4088)^2}, L = \frac{-1499740032}{(4088)^2}, M = \frac{9599801344}{(4088)^2}.$$

Označme:

$$k = 62929650, l = 1499740032, m = 9599801344,$$

Potom časť efektívnej množiny bude ležať na krivke:

$$\sigma = g(r) = \frac{1}{4088} \sqrt{kr^2 - lr + m}.$$



Obr.2: Oranžovou – krivka $g(r)$; žltou – kombinácie cenných papierov A a B; šedou – kombinácie cenných papierov A a C; E, F – body dotyku

Ako vidno z obrázka 2, časť krivky medzi bodmi E a F leží v množine prípustných portfólií, ale jej zvyšok nie. Bod $E = (\sigma_E, r_E) = (8,15; 14,57)$ je bodom dotyku krivky $g(r)$ a krivky, na ktorej ležia kombinácie cenných papierov **A** a **B**:

$$\sigma = ab(r) = \frac{1}{2} \sqrt{317r^2 - 9160r + 66432}.$$

Bod $F = (\sigma_F, r_F) = (6,37; 11,46)$ je bodom dotyku krivky $g(r)$ a krivky, na ktorej ležia kombinácie cenných papierov **A** a **C**:

$$\sigma = ac(r) = \frac{1}{6} \sqrt{275r^2 - 6428r + 39008}.$$

V bodoch E, F „opúšťa“ krivka $g(r)$ množinu prípustných portfólií. V bode E je to preto, že váha cenného papiera $\mathbf{C}$ - x_C prechádza z nulovej hodnoty do záporných čísel, čo je pre úlohu neprípustné. Podobne v bode F prechádza váha cenného papiera $\mathbf{B}$ - x_B z nulovej hodnoty do zápornej.

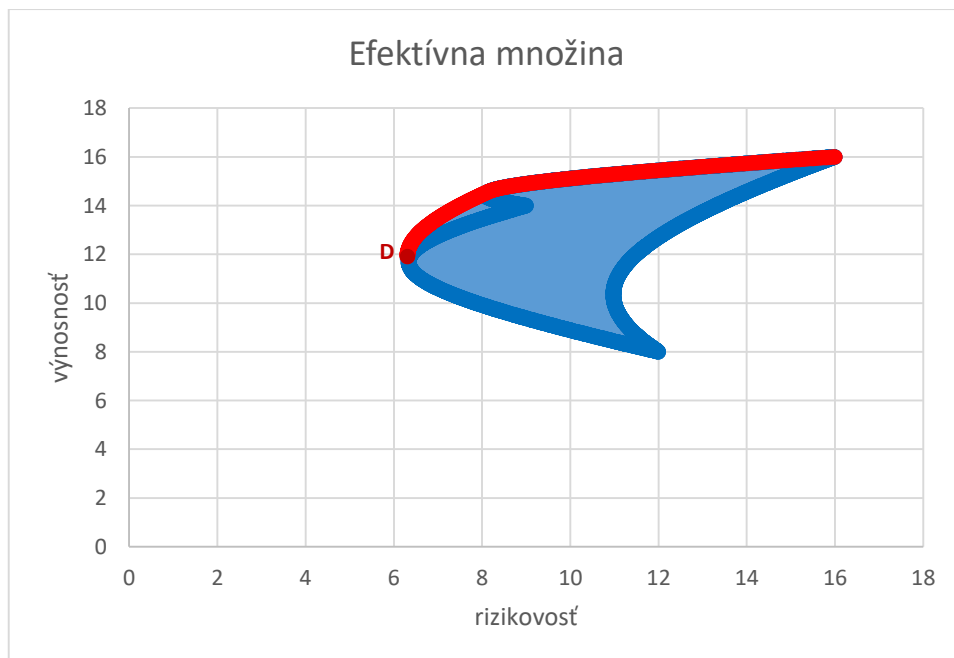
Efektívnu množinu portfólií na množine prípustných portfólií teda zrejme dostaneme zlepením kriviek $g(r)$ a $ab(r)$ v bode E . No napriek tomu krivka $g(r)$ s koncovými bodmi E a F nebude ležať celá v efektívnej množine. Musíme ešte nájsť minimum tejto funkcie na intervale $\langle r_F, r_E \rangle$. Deriváciu funkcie g :

$$g'(r) = \frac{2kr - l}{8176\sqrt{kr^2 - lr + m}}$$

postavíme rovnú nule. Bod, v ktorom funkcia g dosahuje minimum, potom bude: $\tilde{r} = \frac{l}{2k} \doteq 11,92$ a jej minimálna hodnota: $\tilde{\sigma} = g(\tilde{r}) \doteq 6,31$. Označme tento bod D , potom $D = (\tilde{\sigma}, \tilde{r}) = (6,31; 11,92)$.

Efektívnu množinu teda môžeme vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$\sigma = \sigma(r) = \begin{cases} \frac{1}{4088} \sqrt{kr^2 - lr + m}, & \text{pre } r \in \langle \tilde{r}, r_E \rangle; \\ \frac{1}{2} \sqrt{317r^2 - 9160r + 66432}, & \text{pre } r \in \langle r_E, r_B \rangle. \end{cases}$$



Obr. 3: Červenou – efektívna množina.

b) Pre cenné papiere **A**, **B**, **C** nájdite efektívnu množinu, ak je možnosť bezrizikového zapožičiavania (nákup dlhopisov na dobu držania) a vy-požičiavania (predaj/emitácia dlhopisov na dobu držania) s rovnakou bezrizikovou úrokovou mierou na dobu držania vo výške $r_f = 3 \%$.

Riešenie:

Novú efektívnu množinu budú vytvárať tie kombinácie rizikového portfólia cenných papierov **A**, **B**, **C** a bezrizikového aktíva s $r_f = 3 \%$, ktoré ležia pre $\sigma \geq 0$ na polpriamke:

$$r = r_f + k\sigma, \text{ resp. } \sigma = \frac{r-r_f}{k},$$

kde $k > 0$ je jej smernica (viď. prednáška: prednáška6.pdf). Táto polpriamka je určená dvoma bodmi na nej ležiacimi: $(0, r_f)$ a (σ_T, r_T) , kde bod (σ_T, r_T) určuje tangenciálne (dotykové) portfólio, v ktorom sa polpriamka dotýka pôvodnej efektívnej množiny (vypočítanej v úlohe **1a**). Keďže je to dotykové portfólio, jeho súradnice a smernicu polpriamky získame vyriešením nasledujúcej sústavy rovníc (rozmyslite si, prečo práve tejto sústavy):

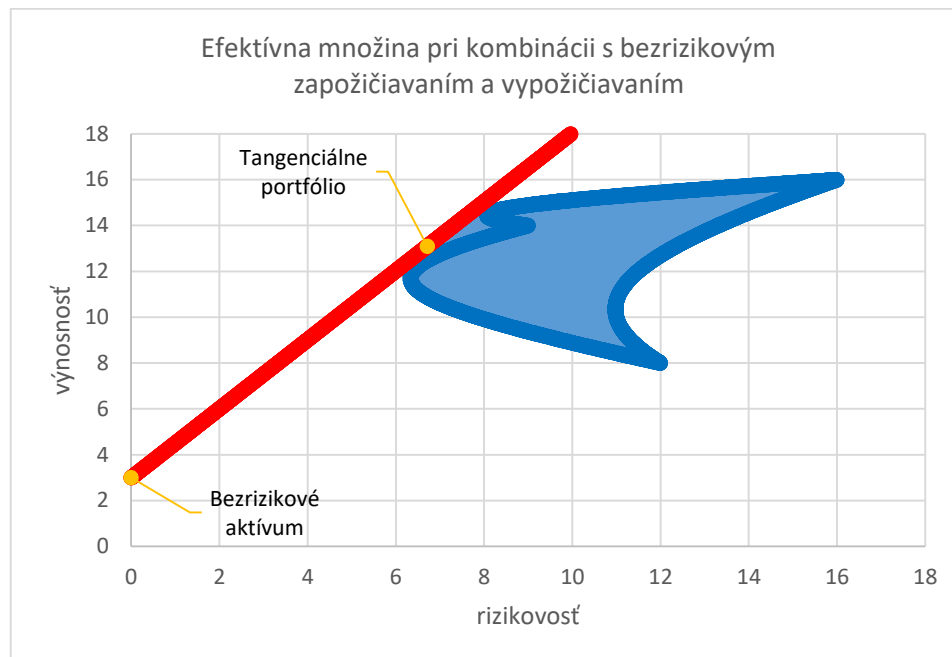
$$\begin{aligned} \frac{r_T - 3}{k} &= \sigma_T = \frac{1}{4088} \sqrt{kr_T^2 - lr_T + m}, \\ \frac{1}{k} &= \frac{2kr_T - l}{8176\sqrt{kr_T^2 - lr_T + m}}. \end{aligned}$$

Dostaneme $r_T = \frac{2m-3l}{l-6k} \doteq 13,1 \%$, $\sigma_T \doteq 6,71 \%$ a $k = \frac{r_T-3}{\sigma_T} \doteq 1,51$.

Nová efektívna množina je teda množina všetkých bodov (r, σ) , kde $\sigma \geq 0$, ležiacich na polpriamke:

$$r = r_f + \left(\frac{r_T - 3}{\sigma_T} \right) \sigma.$$

Pozrite nasledujúci obrázok.



Obr. 4: Červenou – efektívna množina.

c) Predpokladajte investorove preferencie v tvare: $r = c + \sigma^2$, kde c je hladina preferencie. Nájdite investorovo optimálne portfólio na efektívnej množine vypočítanej v predchádzajúcej úlohe

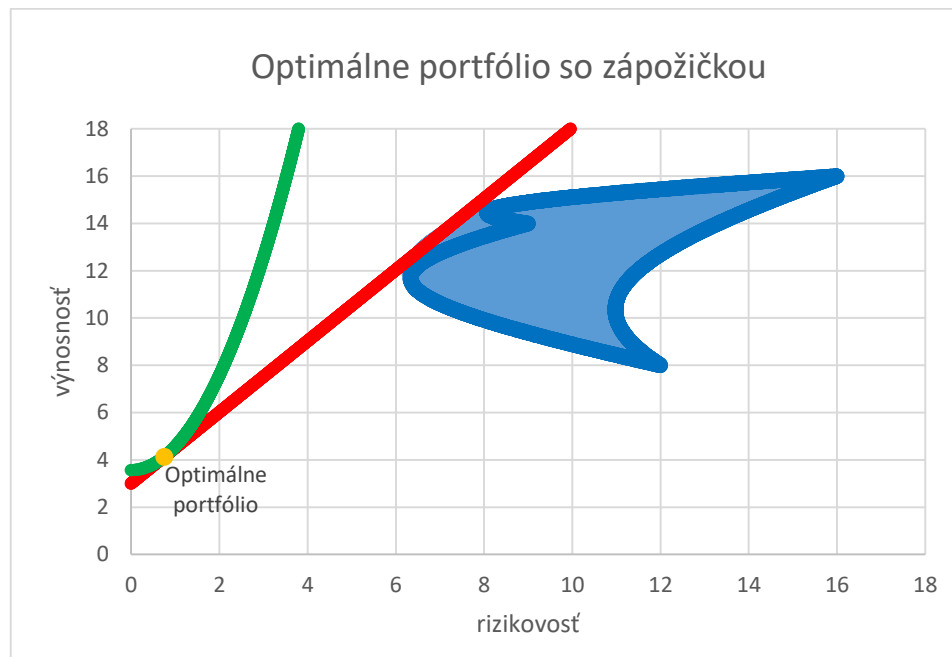
Riešenie:

Optimálne portfólio s parametrami (r^*, σ^*) bude také, ktoré vyhovuje sústave:

$$\begin{aligned} c^* + (\sigma^*)^2 &= r^* = 3 + k\sigma^*, \\ 2\sigma^* &= k, \end{aligned}$$

kde k vypočítané v úlohe **1b**). Riešením tejto sústavy dostaneme: $\sigma^* \doteq 0,75, r^* \doteq 4,13, c^* \doteq 3,57$, kde c^* je investorova optimálna hladina preferencie. Označme x_f váhu bezrizikového aktíva v optimálnom portfóliu, potom $x_f \doteq 0,89$. Váha tangenciálneho portfólia v optimálnom portfóliu bude $1 - x_f \doteq 0,11$. Ide teda o kombináciu tangenciálneho portfólia a zapožičiavania (nákup dlhopisov).

Bezrizikové aktívum má v tomto portfóliu takmer 90 %-nú váhu, čo sa prejavuje výnosnosťou bližšou bezrizikovej a súčasne nižšou rizikovosťou, ako to dobre ilustruje nasledujúci obrázok.



Obr. 5: Zelenou – krivka indiferencie investora pri optimálnej hladine

d) Predpokladajte zadanie ako úlohe **1c)**, ale s inými preferenciami investora: $r = c + \frac{\sigma^2}{12}$.

Riešenie:

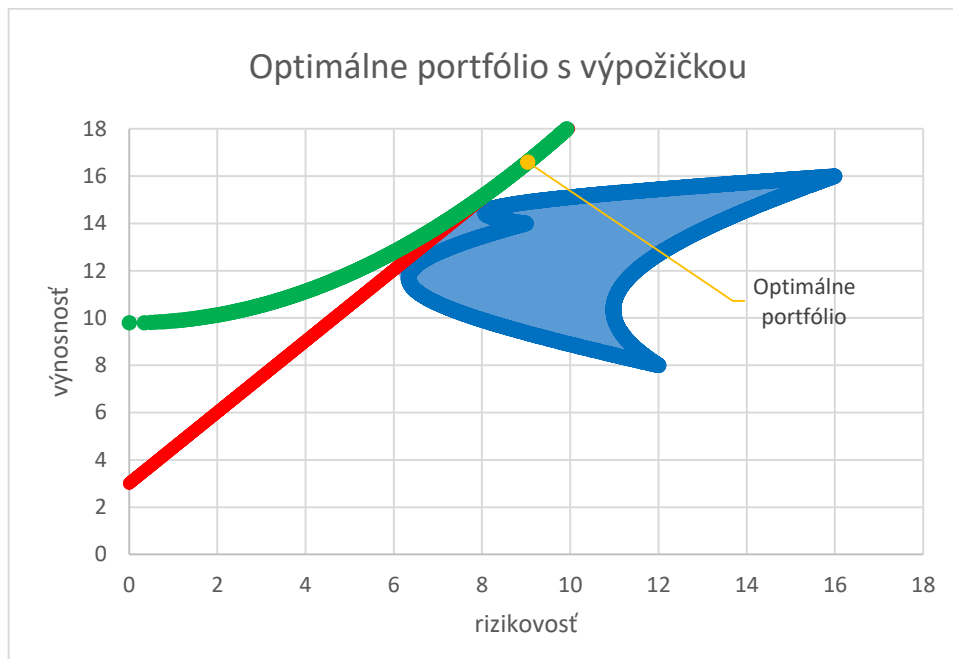
Rovnako ako v úlohe **1c)** nájdeme parametre optimálneho portfólia (r^*, σ^*) riešením sústavy rovníc:

$$c^* + \frac{(\sigma^*)^2}{12} = r^* = 3 + k\sigma^*,$$

$$\frac{\sigma^*}{6} = k,$$

kde k vypočítané v úlohe **1b)**. Dostaneme: $\sigma^* \cong 9,03, r^* \cong 16,59, c^* \cong 9,8$, kde c^* je investorova optimálna hladina preferencie. Označme x_f váhu bezrizikového aktíva v optimálnom portfóliu, potom $x_f \cong -0,35$. Váha tangenciálneho portfólia v optimálnom portfóliu potom bude $1 - x_f \cong 1,35$. Ide teda o kombináciu tangenciálneho portfólia a vypožičiavania (predaj/emitácia dlhopisov) ako indikuje záporná váha pri bezrizikovom aktíve

V tomto prípade si investor peniaze predajom dlhopisov požičia na to, aby investoval do nákupu portfólia rizikových cenných papierov, čo sa prejaví vyššou výnosnosťou, ale i rizikovosťou optimálneho portfólia.



Obr. 6: Zelenou – krivka indiferencie investora pri optimálnej hladine

2. Uvažujte trh s tromi rizikovými cennými papiermi **A**, **B**, **C** takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) sú nasledujúce:

	CP A	CP B	CP C
výnosnosť	$r_A = 5$	$r_B = 9$	$r_C = 10$

Kovariančná matica:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 = 9 & \sigma_{AB} = 0 & \sigma_{AC} = -12 \\ \sigma_{AB} = 0 & \sigma_B^2 = 16 & \sigma_{BC} = -12 \\ \sigma_{AC} = -12 & \sigma_{BC} = -12 & \sigma_C^2 = 25 \end{pmatrix}$$

je kladne semidefinitná a smerodajné odchýlky (rizikovosti) jednotlivých cenných papierov sú nasledujúce:

	CP A	CP B	CP C
rizikovosť	$\sigma_A = 3$	$\sigma_B = 4$	$\sigma_C = 5$

a) Ukážte, že kovariančná matica je semidefinitná. Nájdite váhy $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C$ cenných papierov **A**, **B**, **C** v portfóliu také, že portfólio s týmito váhami vykazuje kladnú výnosnosť a nulovú rizikovosť (tj. na trhu existuje možnosť arbitráže).

Riešenie:

Výnosnosť r a rizikovosť σ portfólia pozostávajúceho z cenných papierov **A**, **B**, **C** musí spĺňať vzťahy:

$$r = x_A r_A + x_B r_B + x_C r_C \quad (1)$$

$$\sigma = \sqrt{(x_A, x_B, x_C) \begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 16 & -12 \\ -12 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}} \quad (2)$$

Ukážme, že matica C je semidefinitná. Využijeme zápis zo vzťahu (2):

$$\begin{aligned} (x_A, x_B, x_C) C \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} &= (x_A, x_B, x_C) \begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 16 & -12 \\ -12 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \\ &= (x_A, x_B, x_C) \begin{pmatrix} 9x_A - 12x_C \\ 16x_B - 12x_C \\ -12x_A - 12x_B + 25x_C \end{pmatrix} \\ &= 9x_A^2 - 24x_Ax_C + 16x_B^2 - 24x_Bx_C + 25x_C^2 \\ &= 9x_A^2 - 24x_Ax_C + 16x_C^2 + 16x_B^2 - 24x_Bx_C + 9x_C^2 \\ &= (3x_A - 4x_C)^2 + (4x_B - 3x_C)^2 \end{aligned}$$

To znamená, že pre ľubovoľný nenulový vektor (x_A, x_B, x_C) platí:

$$(x_A, x_B, x_C) C \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \geq 0,$$

pričom rovné nule je to vtedy a len vtedy, keď $3x_A = 4x_C$ a súčasne $4x_B = 3x_C$. Ak využijeme, že x_A, x_B, x_C označujú váhy cenných papierov **A**, **B**, **C** v portfóliu a teda musia spĺňať $x_A + x_B + x_C = 1$, tak hľadané váhy $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C$ musia vyhovovať sústave rovníc:

$$\bar{x}_A + \bar{x}_B + \bar{x}_C = 1$$

$$3\bar{x}_A - 4\bar{x}_C = 0$$

$$4\bar{x}_B - 3\bar{x}_C = 0$$

Riešením tejto sústavy je:

$$\bar{x}_A = \frac{16}{37}, \bar{x}_B = \frac{9}{37}, \bar{x}_C = \frac{12}{37}. \quad (3)$$

Dosadením (3) do (2) a (1) získame:

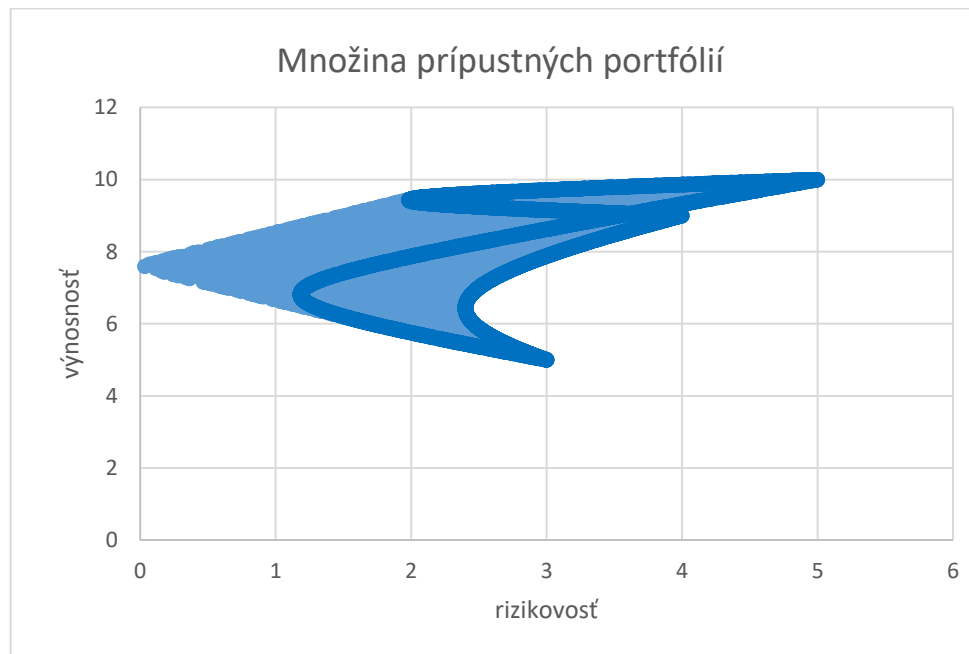
$$\bar{\sigma} = 0, \bar{r} = \bar{x}_A r_A + \bar{x}_B r_B + \bar{x}_C r_C = \frac{80}{37} + \frac{81}{37} + \frac{120}{37} = \frac{281}{37} \doteq 7,59$$

Voľbou váh v (3) je možné dosiahnuť kladnú výnosnosť portfólia (zhruba 7,59 %) pri nulovom riziku a teda na trhu existuje arbitrážna príležitosť.

b) Na množine všetkých prípustných portfólií pozostávajúcich z cenných papierov **A, B, C** nájdite efektívnu množinu.

Riešenie:

Na nasledujúcom obrázku môžete vidieť, ako vyzerá množina všetkých prípustných portfólií pozostávajúcich z cenných papierov **A, B, C**:



Obr.7: Tmavomodrou – krivky vyjadrujúce množinu portfólií pozostávajúcich z kombinácie dvoch cenných papierov.
Bledomodrou+tmavomodrou – množina všetkých prípustných portfólií

Z obrázku možno vidieť, že množina všetkých prípustných portfólií sa dotýka zvislej osi pre výnosnosť. Súradnice bodu dotyku vyjadrujú, že pre vhodnú kombináciu cenných papierov **A, B, C** v portfóliu, je možné dosiahnuť kladnú výnosnosť s nulovým rizikom, teda na trhu existuje arbitráž.

Nájsť efektívnu množinu pomocou postupu využívajúceho inverznú maticu C^{-1} v tomto prípade nie je možné, pretože matica C nie je regulárna a teda k nej neexistuje inverzná matica. Zapojiť musíme iné

nástroje. Môžeme napr. pracovať so vzťahmi (1) a (2) a vzťahom pre súčet váh v portfóliu, tj.:

$$x_A + x_B + x_C = 1 \quad (4)$$

Vyjadrime zo vzťahu (4) premennú x_C a dosadíme do (1), dostaneme:

$$\begin{aligned} r &= x_A r_A + x_B r_B + x_C r_C = x_A r_A + x_B r_B + r_C (1 - x_A - x_B) \\ &= r_C + x_A (r_A - r_C) + x_B (r_B - r_C) \end{aligned}$$

Odtiaľ máme:

$$x_B = \frac{r - r_C}{r_B - r_C} + x_A \frac{r_C - r_A}{r_B - r_C}$$

resp.:

$$\begin{aligned} x_C &= 1 - x_A - x_B = 1 - x_A - \frac{r - r_C}{r_B - r_C} + x_A \frac{r_A - r_C}{r_B - r_C} \\ &= \frac{r_B - r}{r_B - r_C} + x_A \frac{r_A - r_B}{r_B - r_C} \end{aligned}$$

Po dosadení hodnôt zo zadania úlohy získame:

$$x_B = \frac{r - 10}{9 - 10} + x_A \left(\frac{10 - 5}{9 - 10} \right) = 10 - r - 5x_A \quad (5)$$

$$x_C = \frac{9 - r}{9 - 10} + x_A \left(\frac{5 - 9}{9 - 10} \right) = r + 4x_A - 9 \quad (6)$$

Dosadením (5), (6) do (2) dostaneme:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{(3x_A - 4x_C)^2 + (4x_B - 3x_C)^2} \\ &= \sqrt{(3x_A - 4r - 16x_A + 36)^2 + (40 - 4r - 20x_A - 3r - 12x_A + 27)^2} \\ &= \sqrt{(36 - 4r - 13x_A)^2 + (67 - 7r - 32x_A)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Pre danú hodnotu $r \in \langle 5, 10 \rangle$ môžeme chápať (7) ako funkciu σ od x_A , čo zapíšeme:

$$\sigma = \sigma_r(x_A) = \sqrt{(36 - 4r - 13x_A)^2 + (67 - 7r - 32x_A)^2} \quad (8)$$

Keďže efektívnu množinu dostaneme tak, že pre dané r volíme najmenšie možné σ , tak potrebujeme zderivovať funkciu $\sigma_r(x_A)$ v (8) podľa x_A a deriváciu postaviť rovnú nule.

Vypočítajme deriváciu funkcie σ_r podľa x_A , dostaneme:

$$\sigma'_r(x_A) = \frac{-13(36 - 4r - 13x_A) - 32(67 - 7r - 32x_A)}{\sqrt{(36 - 4r - 13x_A)^2 + (67 - 7r - 32x_A)^2}}$$

Na tomto mieste treba upozorniť na to, že pre $r = \bar{r} := \frac{281}{37}$ funkcia $\sigma_{\bar{r}}(x_A)$ nie je diferencovateľná v bode $x_A = \frac{208}{481}$, avšak túto nepríjemnosť možno obísť tak, že minimalizovať budeme druhú mocninu funkcie, a to bez nepríjemných následkov prípadných zmien v ďalších výpočtoch, keďže obe minimalizačné úlohy sú v tomto ohľade ekvivalentné.

Takže (s výnimkou vyššie) platí:

$$\sigma'_r(x_A) = 0 \Leftrightarrow x_A = \frac{2612 - 276r}{1193} \quad (9)$$

Pretože $x_A \in \langle 0, 1 \rangle$, voľbu r musíme obmedziť aspoň na interval $\langle \frac{473}{92}, \frac{653}{69} \rangle$, prípadne menší v zmysle inklúzie (závisí to od splniteľnosti podmienok stanovených na váhy, tj. $0 \leq x_j \leq 1$ pre $j = A, B, C$).

Dosaďme (9) do (8), získame:

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma(r) &= \frac{\sqrt{(8992 - 1184r)^2 + (481r - 3653)^2}}{1193} \\ &= \frac{\sqrt{(32)^2(281 - 37r)^2 + (13)^2(37r - 281)^2}}{1193} \\ &= \frac{|281 - 37r|}{1193} \sqrt{1193} = \frac{|281 - 37r|}{\sqrt{1193}} \end{aligned} \quad (10)$$

Časť efektívnej množiny bude teda ležať na krivke (10) pre $r \in \langle \frac{281}{37}, \frac{653}{69} \rangle$, kde hodnota $\bar{r} = \frac{281}{37}$ spĺňa $\sigma(\bar{r}) = 0$, ako ľahko vidno zo vzťahu (10).

Podobne ako v úlohe **1a**) možno ukázať, že zvyšná časť efektívnej množiny bude ležať na krivke, na ktorej ležia kombinácie cenných papierov **B** a **C** (tj. $x_A = 0$) s $r \in \langle \frac{653}{69}, 10 \rangle$. Váhy cenných papierov **B** a **C** ležiacich na tejto krivke musia spĺňať:

$$r = x_B r_B + x_C r_C \quad (11)$$

$$\sigma = \sqrt{(0, x_B, x_C) \begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 16 & -12 \\ -12 & -12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}} \quad (12)$$

$$x_B + x_C = 1 \quad (13)$$

Dosadením (13) do (11) a následným dosadením do (12) získame:

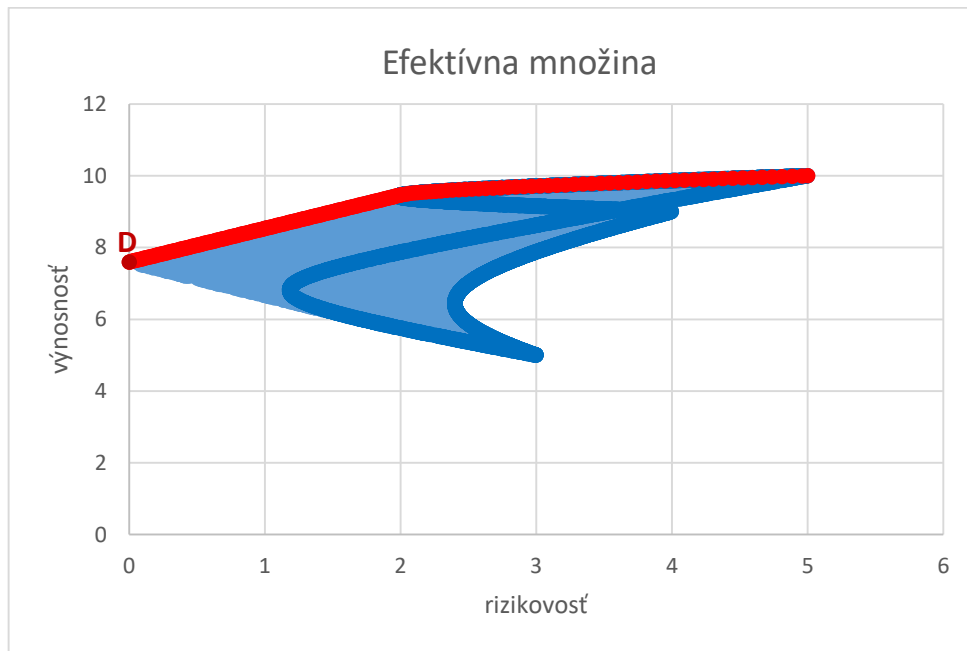
$$\sigma = bc(r) = \sqrt{65r^2 - 1226r + 5785} \quad (14)$$

Krivka vyjadrená funkciou (14) je pre $r \in \langle \frac{653}{69}, 10 \rangle$ zvyšnou časťou efektívnej množiny. Pre bod $\hat{r} = \frac{653}{69}$ platí:

$$\sigma(\hat{r}) = bc(\hat{r}) \text{ a } \sigma'(\hat{r}) = bc'(\hat{r}).$$

Takže celkovo máme, že efektívnu množinu môžeme vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$\sigma = \sigma_{efkt}(r) = \begin{cases} \frac{|281 - 37r|}{\sqrt{1193}}, & \text{pre } r \in \langle \bar{r}, \hat{r} \rangle; \\ \sqrt{65r^2 - 1226r + 5785}, & \text{pre } r \in \langle \hat{r}, r_C \rangle. \end{cases}$$



Obr. 8: Červenou – efektívna množina.

Bod $D = (0, \bar{r})$ na obrázku 8 reprezentuje arbitrážnu kombináciu cenných papierov **A**, **B**, **C** v portfóliu.

Poznámka:

Hoci je nájdená efektívna množina pre investorov z hľadiska ich preferencií zaujímavá, vzhľadom k tomu, že predpokladáme riziko-averzných investorov, najzaujímavejší je pre nich práve bod D a jemu

zodpovedajúce portfólio ponúkajúce arbitráž. Práve snahou vytvoriť takéto portfólio by sa všetci investori rozhodli zaoberať.

Teoretický koncept (model) si aj z tohto dôvodu „priam pýta“ existenciu bezrizikového aktíva na dobu držania. Ak by sa totiž na trhu s týmito cennými papiermi vyskytoval bezrizikový cenný papier s bezrizikovou úrokovou (výnosovou) mierou na dobu držania rovnou r_f , tak by malo platiť $r_f = \bar{r}$ práve preto, aby nevznikla arbitráž.

3. Uvažujte trh s tromi rizikovými cennými papiermi **A**, **B**, **C** takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) sú nasledujúce:

	CP A	CP B	CP C
výnosnosť	$r_A = 4$	$r_B = 5$	$r_C = 8$

Kovariančná matica:

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 = 1 & \sigma_{AB} = -2 & \sigma_{AC} = -3 \\ \sigma_{AB} = -2 & \sigma_B^2 = 4 & \sigma_{BC} = 6 \\ \sigma_{AC} = -3 & \sigma_{BC} = 6 & \sigma_C^2 = 9 \end{pmatrix}$$

je kladne semidefinitná a smerodajné odchýlky (rizikovosti) jednotlivých cenných papierov sú nasledujúce:

	CP A	CP B	CP C
rizikovosť	$\sigma_A = 1$	$\sigma_B = 2$	$\sigma_C = 3$

Ukážte, že kovariančná matica je semidefinitná. Nájdite váhy $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C$ cenných papierov **A**, **B**, **C** v portfóliu také, že portfólio s týmito váhami vykazuje kladnú výnosnosť a nulovú rizikovosť (tj. na trhu existuje možnosť arbitráže).

Riešenie:

Výnosnosť r a rizikovosť σ portfólia pozostávajúceho z cenných papierov **A**, **B**, **C** musí spĺňať vzťahy:

$$r = 4x_A + 5x_B + 8x_C \quad (15)$$

$$\sigma = \sqrt{(x_A, x_B, x_C) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}} \quad (16)$$

Ukážeme, že matica C je semidefinitná. Využijeme zápis zo vzťahu (16):

$$\begin{aligned}(x_A, x_B, x_C)C \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} &= (x_A, x_B, x_C) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \\ &= x_A^2 - 4x_Ax_B + 4x_B^2 - 6x_Ax_C + 12x_Bx_C + 9x_C^2 \\ &= (x_A - 2x_B - 3x_C)^2\end{aligned}$$

To znamená, že pre ľubovoľný nenulový vektor (x_A, x_B, x_C) platí:

$$(x_A, x_B, x_C)C \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \geq 0,$$

pričom rovné nule je to vtedy a len vtedy, keď $x_A = 2x_B + 3x_C$. Ak využijeme, že x_A, x_B, x_C označujú váhy cenných papierov **A**, **B**, **C** v portfóliu a teda musia spĺňať $x_A + x_B + x_C = 1$, tak hľadané váhy $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C$ musia vyhovovať sústave rovníc:

$$\bar{x}_A + \bar{x}_B + \bar{x}_C = 1$$

$$\bar{x}_A - 2\bar{x}_B - 3\bar{x}_C = 0$$

Riešení tejto sústavy je nekonečne veľa:

$$\bar{x}_A \in \mathbb{R}, \bar{x}_B = 3 - 4\bar{x}_A, \bar{x}_C = 3\bar{x}_A - 2. \quad (17)$$

Dosadením (17) do (16) a (15) získame:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} = 0, \bar{r} = 4\bar{x}_A + 5\bar{x}_B + 8\bar{x}_C &= 4\bar{x}_A + 15 - 20\bar{x}_A + 24\bar{x}_A - 16 \\ &= 8\bar{x}_A - 1, \text{ resp. } \bar{x}_A = \frac{\bar{r} + 1}{8}\end{aligned}$$

Z toho:

$$\begin{aligned}\bar{x}_B &= \frac{24 - 4\bar{r} - 4}{8} = \frac{5 - \bar{r}}{2} \\ \bar{x}_C &= \frac{3\bar{r} + 3 - 16}{8} = \frac{3\bar{r} - 13}{8}\end{aligned}$$

Pretože $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C$ sú váhy, musia spĺňať: $0 \leq \bar{x}_A \leq 1, 0 \leq \bar{x}_B \leq 1, 0 \leq \bar{x}_C \leq 1$. Takže v skutočnosti pre $\bar{x}_A$ zo (17) platí $\bar{x}_A \in \langle 0, 1 \rangle$ a hľadané riešenia neležia na celej priamke (17), ale iba na jej časti. Z toho

vyplýva, že aj výnosnosť portfólia $\bar{r}$, pre ktorú je portfólio bezrizikové ($\bar{\sigma} = 0$), nie je ľubovoľná z intervalu $\langle 4,8 \rangle$, ale musí vyhovovať istým obmedzeniam. Konkrétne pre $\bar{r}$ musí platiť:

$$0 \leq \frac{\bar{r} + 1}{8} \leq 1, 0 \leq \frac{5 - \bar{r}}{2} \leq 1, 0 \leq \frac{3\bar{r} - 13}{8} \leq 1.$$

Z toho máme:

$$-1 \leq \bar{r} \leq 7; 3 \leq \bar{r} \leq 5; \frac{13}{3} \leq \bar{r} \leq 7.$$

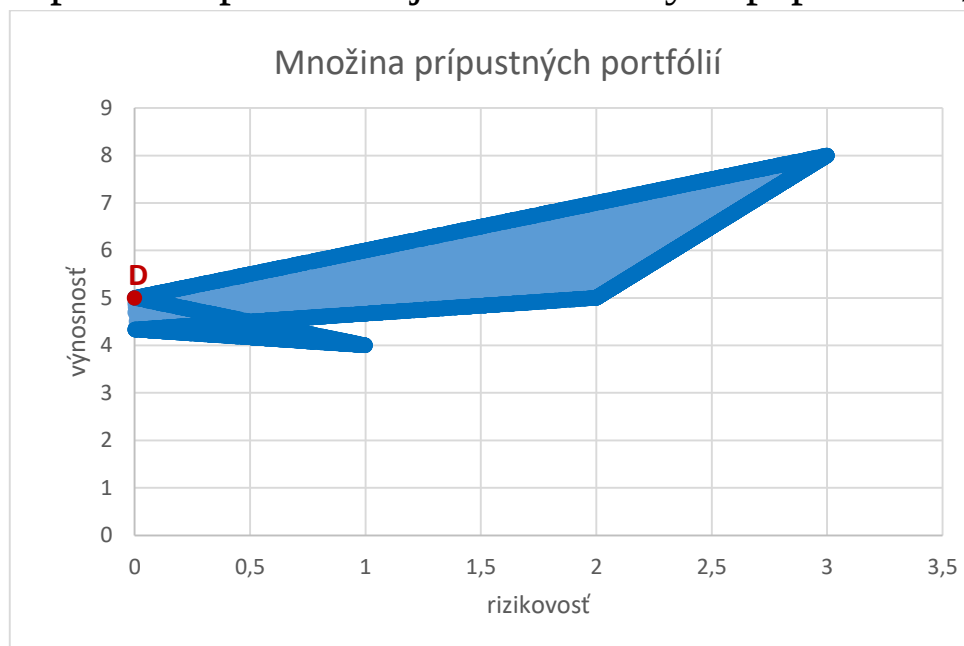
Všetky uvádzané obmedzenia musia platiť súčasne, z čoho pre $\bar{r}$ vyplýva:

$$\frac{13}{3} \leq \bar{r} \leq 5.$$

Takže najvyššia výnosnosť, ktorú možno pri nulovom riziku dosiahnuť, je 5 % a dosiahne sa voľbou váh $\bar{x}_A = \frac{3}{4}, \bar{x}_B = 0, \bar{x}_C = \frac{1}{4}$.

Na trhu teda existuje množstvo arbitrážnych príležitostí, ale najvýhodnejšia z nich je tá, pri ktorej je možné dosiahnuť 5 %-ný výnos pri nulovom riziku.

Na nasledujúcom obrázku môžete vidieť, ako vyzerá množina všetkých prípustných portfólií pozostávajúcich z cenných papierov **A, B, C**:



Obr.9: Tmavomodrou – krivky vyjadrujúce množinu portfólií pozostávajúcich z kombinácie dvoch cenných papierov.
Bledomodrou+tmavomodrou – množina všetkých prípustných portfólií

Bod D na obrázku č. 9 je kombináciou cenných papierov A , B , C v portfóliu, pri ktorej možno dosiahnuť najvyššiu kladnú výnosnosť pri nulovom riziku.

Poznámka:

Pri tejto úlohe poznamenajme, že v prípade semidefinitnej kovariančnej matice, úlohu nájsť maximálnu výnosnosť pri nulovom riziku je možné riešiť ako úlohu lineárneho programovania, v ktorej hľadáme také nezáporné váhy x_A, x_B, x_C , ktoré maximalizujú hodnotu r zo vzťahu (15) pri splnení podmienok $x_A + x_B + x_C = 1$ a

$$C \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Označme hľadané váhy tak, ako predtým, tj. $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C$. Váhy $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C$ musia potom vyhovovať sústave rovníc:

$$\begin{aligned} \bar{x}_A + \bar{x}_B + \bar{x}_C &= 1, \\ \bar{x}_A - 2\bar{x}_B - 3\bar{x}_C &= 0, \\ -2\bar{x}_A + 4\bar{x}_B + 6\bar{x}_C &= 0, \\ -3\bar{x}_A + 6\bar{x}_B + 9\bar{x}_C &= 0, \end{aligned}$$

v ktorej posledné dve rovnice neprinášajú žiadnu novú informáciu a sú len násobkom druhej rovnice. Alias $\bar{x}_A, \bar{x}_B, \bar{x}_C$ musia vyhovovať:

$$\begin{aligned} \bar{x}_A + \bar{x}_B + \bar{x}_C &= 1, \\ \bar{x}_A - 2\bar{x}_B - 3\bar{x}_C &= 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že hľadané váhy musia vyhovovať tej istej sústave ako je tá v riešení úlohy 3. Riešenia tejto sústavy sú v (17). Keďže váhy musia spĺňať $0 \leq \bar{x}_A \leq 1, 0 \leq \bar{x}_B \leq 1, 0 \leq \bar{x}_C \leq 1$, tak na priamke (17) musí byť splnené $\frac{2}{3} \leq \bar{x}_A \leq \frac{3}{4}$. Čiže ide vlastne o úsečku:

$$\left\{ (\bar{x}_A, 3 - 4\bar{x}_A, 3\bar{x}_A - 2); \bar{x}_A \in \left\langle \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle \right\} \quad (18)$$

Pozdĺž úsečky v (18) maximalizujeme hodnotu $r = 4\bar{x}_A + 5\bar{x}_B + 8\bar{x}_C$, tj. hľadáme maximálnu hodnotu funkcie:

$$r = r(\bar{x}_A) = 4\bar{x}_A + 5(3 - 4\bar{x}_A) + 8(3\bar{x}_A - 2) = 8\bar{x}_A - 1$$

na intervale $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle$. Je jasné, že maximálna hodnota sa dosiahne pre voľbu $\bar{x}_A = \frac{3}{4}$ a táto hodnota je $r = 5$.