

TEÓRIA PORTFÓLIA

Uvažujte trh s dvoma rizikovými cennými papiermi **A**, **B** takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú nasledujúce:

	výnosnosť	rizikovosť
cenný papier A	$r_A = 3$	$\sigma_A = 1$
cenný papier B	$r_B = 6$	$\sigma_B = 2$

1. Vypočítajte kovarianciu σ_{AB} výnosností cenných papierov **A** a **B**, ak korelačný koeficient ρ_{AB} výnosností cenných papierov **A**, **B** je postupne rovný 1, 0,5, 0, -0,5, -1.

Riešenie:

Pre $\rho_{AB} = 1$ máme: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = \sigma_A\sigma_B = 2$.

Pre $\rho_{AB} = 0,5$ máme: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 1$.

Pre $\rho_{AB} = 0$ máme: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0$.

Pre $\rho_{AB} = -0,5$ máme: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = -1$.

Pre $\rho_{AB} = -1$ máme: $\sigma_{AB} = \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = -\sigma_A\sigma_B = -2$.

2. Zistite váhy x_A, x_B cenných papierov **A**, **B** v portfóliu s celkovou hodnotou 1000 p.j., ak cenný papier **A** sa podieľa na skladbe portfólia v celkovej výške 230 p.j. a cenný papier **B** sa podieľa na skladbe portfólia v celkovej výške 770 p.j.

Riešenie:

$$x_A = \frac{230 \text{ p.j.}}{1000 \text{ p.j.}} = 0,23$$

$$x_B = \frac{770 \text{ p.j.}}{1000 \text{ p.j.}} = 0,77$$

Vidíme, že skutočne platí: $x_A + x_B = 1$.

3. Zistite výnosnosť r_P portfólia dvoch cenných papierov **A** a **B** s váhami x_A, x_B vypočítanými v 2.úlohe.

Riešenie:

$$r_P = x_A r_A + x_B r_B = 0,23.3 + 0,77.6 = 5,31 \%$$

4. Zistite rizikovosť σ_P portfólia dvoch cenných papierov **A** a **B** s váhami x_A, x_B vypočítanými v 2.úlohe, ak $\rho_{AB} = -0,5$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + 2x_A x_B \sigma_{AB} + x_B^2 \sigma_B^2} = \\ &= \sqrt{(0,23)^2(1)^2 - 2 \cdot 0,23 \cdot 0,77 + (0,77)^2(2)^2} = \sqrt{2,0703} \\ &\cong 1,44 \%\end{aligned}$$

5. Zistite váhy x_A, x_B cenných papierov **A** a **B** v portfóliu, ktorého výnosnosť je 4,5%.

Riešenie:

Pretože $r_P = x_A r_A + x_B r_B$ a $x_A + x_B = 1$, tak $r_P = x_A r_A + (1 - x_A) r_B$. Odtiaľ:

$$x_A = \frac{r_P - r_B}{r_A - r_B}.$$

Dosadením za r_P, r_A a r_B dostaneme:

$$x_A = \frac{4,5 - 6}{3 - 6} = \frac{1,5}{3}.$$

Čiže $x_A = 0,5$ a teda $x_B = 1 - x_A = 0,5$.

6. Zistite váhy x_A, x_B cenných papierov **A** a **B** s $\rho_{AB} = 0$ v portfóliu, ktorého rizikovosť je 1%.

Riešenie:

$$\text{Pretože } \sigma_P = \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + 2x_A x_B \sigma_{AB} + x_B^2 \sigma_B^2} = \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2},$$

$\rho_{AB} = 0$ a $x_A + x_B = 1$, tak $\sigma_P = \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + (1 - x_A)^2 \sigma_B^2}$. Odtiaľ dosadením za σ_P , σ_A a σ_B dostaneme:

$$1 = \sqrt{x_A^2 + 4(1 - x_A)^2} = \sqrt{4 - 8x_A + 5x_A^2}.$$

Čiže riešime kvadratickú rovnicu s neznámou x_A :

$$5x_A^2 - 8x_A + 3 = 0$$

Táto rovnica má dva korene: $x_A = 1$, resp. $x_A = 0,6$. Takže hľadané váhy sú buď $x_A = 1$, $x_B = 0$ alebo $x_A = 0,6$, $x_B = 0,4$.

7. Vyjadrite množinu všetkých portfólií pozostávajúcich z cenných papierov **A** a **B** formou funkčnej závislosti rizikovosti portfólia σ od jeho výnosnosti r za predpokladu, že $\rho_{AB} = -0,5$.

Riešenie:

Pre jednoduchosť budeme v ďalšom namiesto r_P písať r a namiesto σ_P písať σ (tak, ako to aj vyžaduje zadanie úlohy).

Vyjadríme x_A zo vzťahu:

$$r = x_A r_A + (1 - x_A) r_B$$

a dosadíme do:

$$\sigma = \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + 2x_A(1 - x_A)\sigma_{AB} + (1 - x_A)^2 \sigma_B^2},$$

dostaneme:

$$\sigma = \sigma(r) = \sqrt{Kr^2 + Lr + M},$$

kde (viď. prednáška: prednáška6.pdf):

$$K = \frac{\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2}{(r_A - r_B)^2},$$

$$L = 2 \frac{(r_A + r_B)\sigma_{AB} - r_B\sigma_A^2 - r_A\sigma_B^2}{(r_A - r_B)^2},$$

$$M = \frac{r_A^2 \sigma_B^2 - 2r_A r_B \sigma_{AB} + r_B^2 \sigma_A^2}{(r_A - r_B)^2}.$$

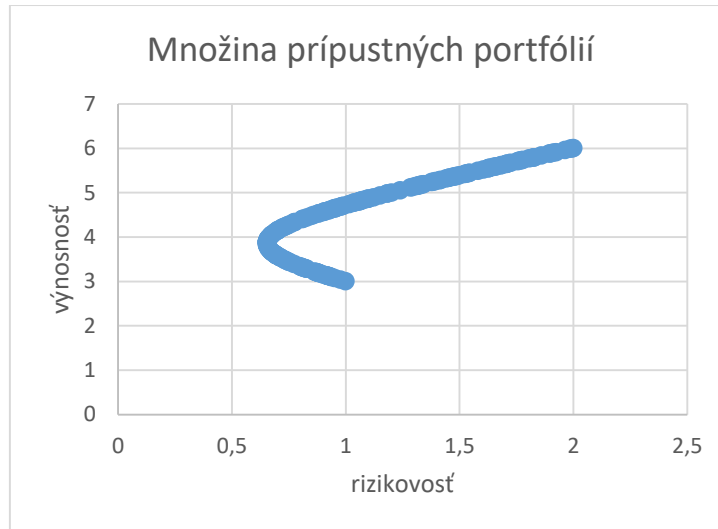
Po dosadení dostaneme:

$$K = \frac{7}{9}, L = -6, M = 12$$

a teda:

$$\sigma = \sigma(r) = \frac{1}{3} \sqrt{7r^2 - 54r + 108}$$

pre $r \in \langle 3,6 \rangle$ vyjadruje funkčnú závislosť rizikovosti portfólia od jeho výnosnosti.



Poznámka: Pre dva cenné papiere **A**, **B** možno vypočítať koeficienty K, L, M prostredníctvom riešenia úlohy na viazaný extrém (vid'. prednáška6.pdf). V tomto prípade by sme dostali K, L, M zo vzťahov:

$$K = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2}, L = \frac{-2\beta}{\alpha\gamma - \beta^2}, M = \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2},$$

kde $\alpha = \vec{r}^T C^{-1} \vec{r}$, $\beta = \vec{r}^T C^{-1} \vec{1}$, $\gamma = \vec{1}^T C^{-1} \vec{1}$ a $\vec{r}^T = (r_A, r_B) = (3,6)$,

$\vec{1}^T = (1,1)$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ je inverzná matica ku kovariančnej

matici $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Z uvedeného potom $\alpha = 36, \beta = 9, \gamma = \frac{7}{3}$.

Následne:

$$K = \frac{7}{9}, L = -6, M = 12.$$

8. Na množine všetkých prípustných portfólií z predchádzajúcej úlohy nájdite efektívnu množinu.

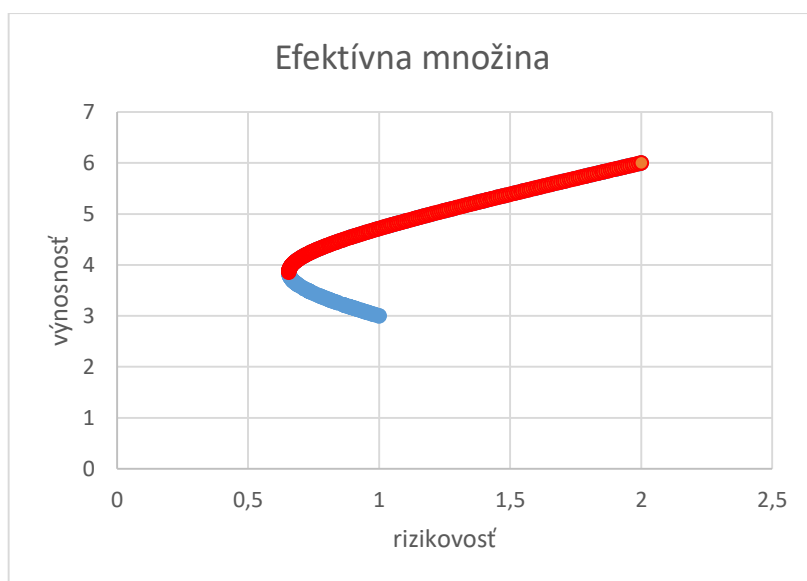
Riešenie:

Vychádzajúc z riešenia predchádzajúcej úlohy máme, že pre $r \in \langle 3,6 \rangle$ funkcia $\sigma(r)$ vyjadruje množinu všetkých prípustných portfólií. Na množine prípustných portfólií na obrázku vyššie môžete zaznamenať, že hodnotám rizikovosti menším alebo rovným 1% zodpovedajú dvojice portfólií, jedno s väčšou a druhé s menšou výnosnosťou. Z týchto dvojíc však možno do efektívnej množiny vybrať len to portfólio, ktoré má výnosnosť vyššiu. Matematicky: musíme nájsť bod minima $\tilde{r}$ funkcie $\sigma(r)$ na intervale $\langle 3,6 \rangle$. Efektívna množina bude potom množina všetkých prípustných portfólií ležiacich na krivke $\sigma = \sigma(r) = \frac{1}{3}\sqrt{7r^2 - 54r + 108}$ pre $r \in \langle \tilde{r}, 6 \rangle$.

Derivovaním $\sigma(r)$ podľa r zistíme, že:

$$\sigma'(r) = \frac{7r - 27}{3\sqrt{7r^2 - 54r + 108}}$$

Hľadané $\tilde{r}$ bude potom také, pre ktoré platí: $\sigma'(\tilde{r}) = 0$, čiže $\tilde{r} = \frac{27}{7} \doteq 3,86$. Tomu zodpovedajúca hodnota minimálnej možnej rizikovosti $\tilde{\sigma} = \sigma(\tilde{r}) \doteq 0,65$ (hodnoty funkcie v krajných bodoch intervalu sú samozrejme vyššie). Efektívna množina je teda množina všetkých bodov (r, σ) ležiacich na krivke: $\sigma = \sigma(r) = \frac{1}{3}\sqrt{7r^2 - 54r + 108}$ pre $r \in \langle \tilde{r}, 6 \rangle$.



9. Predpokladajte investorove preferencie v tvare: $r = c + 9\sigma^2$, kde c je hladina preferencie. Nájdite investorovo optimálne portfólio na efektívnej množine vypočítanej v predchádzajúcej úlohe

Riešenie:

Vyjadrame najprv investorove preferencie ako funkcionálnu závislosť

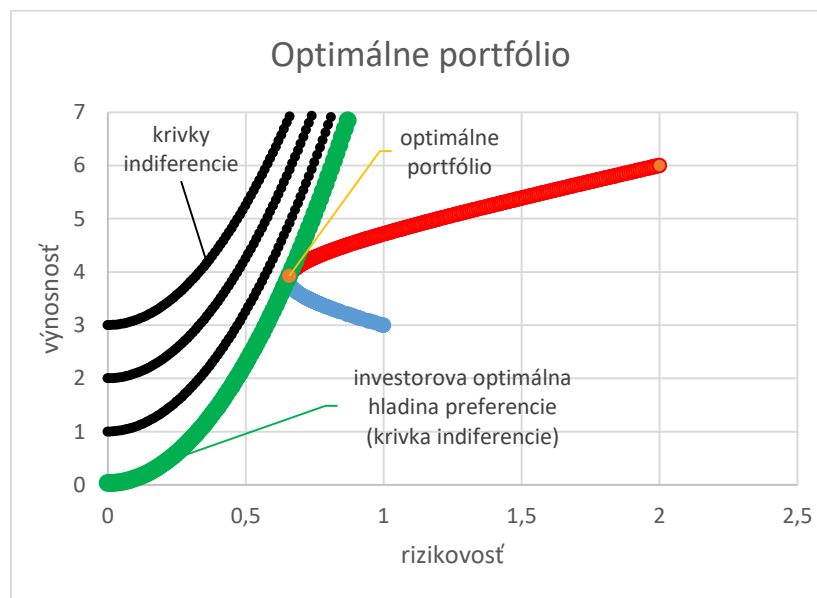
σ od r : $\sigma = h(r) = \frac{1}{3}\sqrt{r - c}$.

Potom podľa prednášky prednáška6.pdf musí optimálne portfólio s parametrami (r^*, σ^*) spĺňať:

$$\frac{1}{3}\sqrt{r^* - c^*} = \frac{1}{3}\sqrt{7(r^*)^2 - 54r^* + 108},$$

$$\frac{1}{6\sqrt{r^* - c^*}} = \frac{14r^* - 54}{6\sqrt{7(r^*)^2 - 54r^* + 108}}.$$

Riešením tejto sústavy dostaneme: $r^* = \frac{55}{14} \doteq 3,93$, $\sigma^* \doteq 0,66$, $c^* \doteq 0,04$, kde c^* je investorova optimálna hladina preferencie. Váhy jednotlivých cenných papierov v optimálnom portfóliu sú: $x_A^* \doteq 0,69$ a $x_B^* \doteq 0,31$.



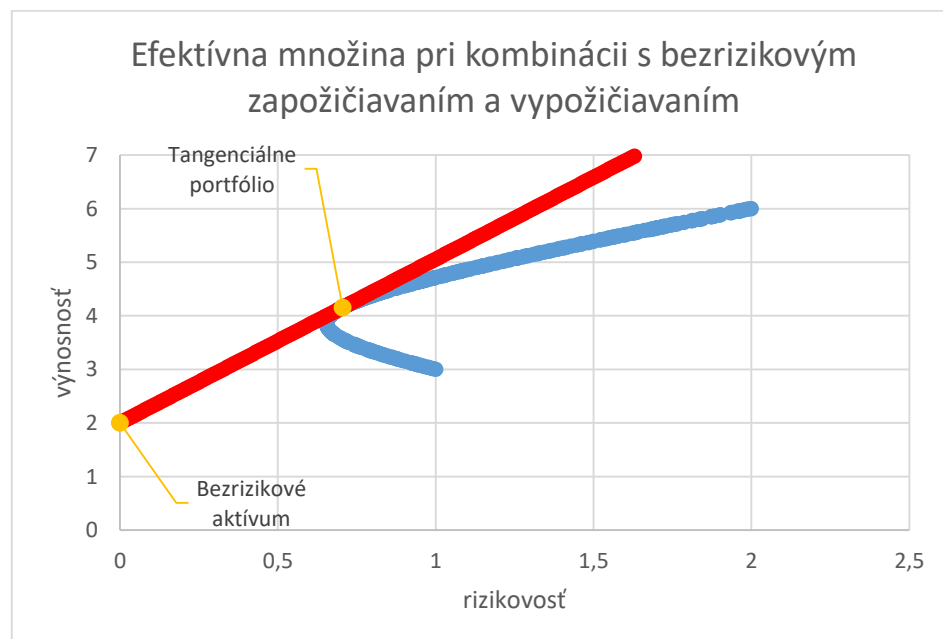
10. Pre cenné papiere **A**, **B** nájdite efektívnu množinu, ak je možnosť bezrizikového zapožičiavania (nákup dlhopisov na dobu držania) a vypožičiavania (predaj dlhopisov na dobu držania) s rovnakou bezrizikovou úrokovou mierou na dobu držania vo výške $r_f = 2\%$.

Riešenie:

Novú efektívnu množinu budú vytvárať tie kombinácie rizikového portfólia cenných papierov **A**, **B** a bezrizikového aktíva s $r_f = 2\%$, ktoré ležia pre $\sigma \geq 0$ na polpriamke: $r = r_f + k\sigma$, resp. $\sigma = \frac{r-r_f}{k}$, kde $k > 0$ je jej smernica (viď. prednáška: prednáška6.pdf). Táto polpriamka je pre $\sigma \geq 0$ úplne určená dvoma bodmi na nej ležiacimi: $(0, r_f)$ a (σ_T, r_T) , kde bod (σ_T, r_T) určuje tangenciálne (dotykové) portfólio, v ktorom sa polpriamka dotýka pôvodnej efektívnej množiny (vypočítanej v 8.úlohe). Keďže je to dotykové portfólio, jeho súradnice a smernicu polpriamky získame vyriešením nasledujúcej sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} \frac{r_T - 2}{k} &= \sigma_T = \frac{1}{3} \sqrt{7r_T^2 - 54r_T + 108}, \\ \frac{1}{k} &= \frac{1}{3\sqrt{7r_T^2 - 54r_T + 108}}. \end{aligned}$$

Dostaneme $r_T = \frac{54}{13} \doteq 4,15\%$, $\sigma_T \doteq 0,71\%$ a $k = \frac{r_T - 2}{\sigma_T} \doteq 3,06$. Nová efektívna množina je teda množina všetkých bodov (r, σ) , kde $\sigma \geq 0$, ležiacich na polpriamke: $r = r_f + \left(\frac{r_T - 2}{\sigma_T}\right) \sigma$.



11. Predpokladajte investorove preferencie ako v 9.úlohe. Nájdite investorovo optimálne portfólio na efektívnej množine vypočítanej v 10.úlohe.

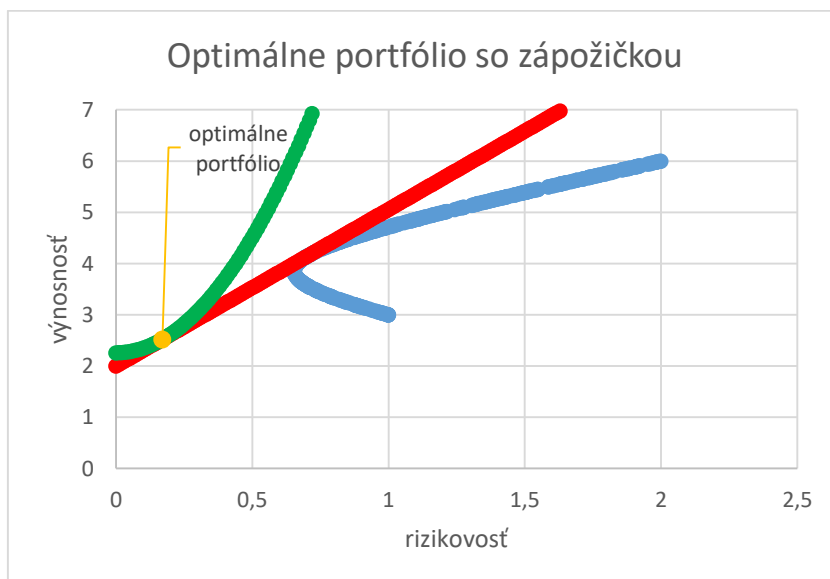
Riešenie:

Optimálne portfólio s parametrami (r^*, σ^*) bude také, ktoré vyhovuje sústave:

$$\begin{aligned} c^* + 9(\sigma^*)^2 &= r^* = 2 + k\sigma^*, \\ 18\sigma^* &= k, \end{aligned}$$

kde k vypočítané v 10.úlohe. Riešením tejto sústavy dostaneme: $\sigma^* \doteq 0,17, r^* \doteq 2,52, c^* \doteq 2,26$, kde c^* je investorova optimálna hladina preferencie. Označme x_f váhu bezrizikového aktíva v optimálnom portfóliu, potom $x_f \doteq 0,76$. Váha tangenciálneho portfólia v optimálnom portfóliu bude $1 - x_f \doteq 0,24$. Ide teda o kombináciu tangenciálneho portfólia a zapožičiavania (nákup dlhopisov). Toto nevidno len z váh bezrizikového aktíva, resp. tangenciálneho portfólia v optimálnom portfóliu, ale vyplýva to už z toho, že $\sigma^* < \sigma_T$.

Bezrizikové aktívum má v tomto portfóliu až trojštvrťinovú váhu, čo sa prejavuje výnosnosťou bližšou bezrizikovej a súčasne nižšou rizikovosťou. Navyše hladina preferencie je väčšia než 2, čo je pre investora vzhľadom k jeho preferenciám výhodnejšie než, keby bezrizikové aktívum na trhu nebolo.



12. Predpokladajte zadanie ako v 11.úlohe, ale s inými preferenciami investora: $r = c + \sigma^2$.

Riešenie:

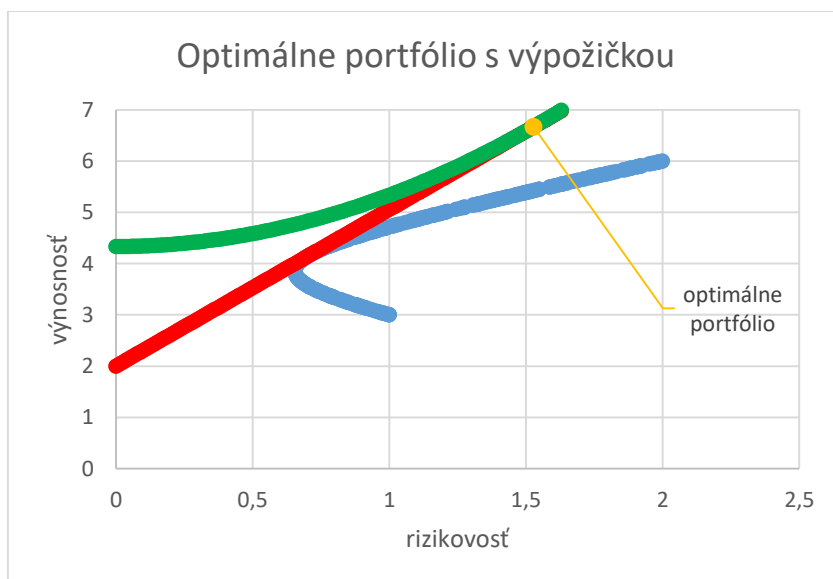
Rovnako ako v 11.úlohe nájdeme parametre optimálneho portfólia (r^*, σ^*) riešením sústavy rovníc:

$$c^* + (\sigma^*)^2 = r^* = 2 + k\sigma^*,$$

$$2\sigma^* = k,$$

kde k vypočítané v 10.úlohe. Dostaneme: $\sigma^* \doteq 1,53$, $r^* \doteq 6,67$, $c^* \doteq 4,33$, kde c^* je investorova optimálna hladina preferencie. Označme x_f váhu bezrizikového aktíva v optimálnom portfóliu, potom $x_f \doteq -1,17$. Váha tangenciálneho portfólia v optimálnom portfóliu potom bude $1 - x_f \doteq 2,17$. Ide teda o kombináciu tangenciálneho portfólia a vypožičiavania (predaj/emitácia dlhopisov) ako indikuje záporná váha pri bezrizikovom aktíve. Opäť poznamenajme, že to vyplýva už z toho, že $\sigma^* > \sigma_T$.

V tomto prípade si investor peniaze predajom dlhopisov požičia na to, aby investoval do nákupu portfólia rizikových cenných papierov, čo sa prejaví vyššou výnosnosťou, ale i rizikovosťou optimálneho portfólia. Krivky indiferencie tohto investora sú rastúce, ale menej strmé. To znamená, že hoci ide o riziko-averzného investora, investor má k riziku menší odpor.



13. Uvažujte trh s dvomi cennými papiermi – akciami **A** a **B** nevplácajúcimi dividendy takými, že ich súčasné ceny sú pre akciu **A**: 20 p.j. a pre akciu **B**: 100 p.j. Uvažujte, že doba držania portfólia pozostávajúcho z akcií **A** a **B** je $T = 1$ jednotka času, počas ktorej je bezriziková úroková sadzba $r_f = 0$ (teda na trhu sa nepredávajú/nenakupujú dlhopisy). Nech na ceny akcií počas doby držania majú vplyv dve náhodné udalosti H a D , ktoré obe môžu nastať s pravdepodobnosťou 0,5. Pričom, ak nastane udalosť H , cena akcie **A** v čase $T = 1$ bude 23 p.j. a cena akcie **B** bude 103 p.j. Ak nastane udalosť D , cena akcie **A** v čase $T = 1$ bude 21 p.j. a cena akcie **B** bude 127 p.j. (teda ide o perfektnú negatívnu koreláciu výnosností akcií).

Ukážte, že výnosnosti aj rizikovosti akcií sú zhodné s tými, ktoré boli uvádzané v ilustračnom príklade zo strany 10 z prednášky: prednáška6.pdf, tj.:

	výnosnosť	rizikovosť
cenný papier A	$r_A = 0,1$	$\sigma_A = 0,05$
cenný papier B	$r_B = 0,15$	$\sigma_B = 0,12$

Ukážte, že existuje arbitrážna príležitosť na takomto trhu. Inými slovami: s využitím eliminácie rizika (výnos portfólia pri nastaní udalosti H je rovnaký, ako výnos pri nastaní udalosti D) určte váhy $x_A \geq 0$ akcie **A** a $x_B \geq 0$ akcie **B** v portfóliu (pričom $x_A + x_B = 1$) tak, aby ste v čase $T = 1$ dosiahli kladný výnos. (Ak budete správne počítat', mali by ste dostať rovnaké váhy, ako sú tie zo strany 15 prednáškového súboru prednáška6.pdf.)

Komentár:

Úloha je za 4 prémiové body, ktoré získajú prví pätnásti riešitelia, ktorí úlohu celú správne vyriešia. Riešenia **zasielajte výhradne** z vášho **univerzitného webmailu** alebo **stuba-gmailu** na adresu: michal.zakopcan@stuba.sk do štvrtka 1.4.2021, do 13:00, vo formáte pdf, jpg, jpeg alebo png. Nezabudnite na označenie študenta, tzn. **meno, priezvisko** - uveďte čitateľne na každej strane riešenia

spolu s vaším podpisom. Každý študent môže zaslať len jedno svoje riešenie. V prípade, že prvých pätnásť správnych riešení bude odovzdaných skôr, než vo štvrtok 1.4.2021 o 13:00, hromadnou správou prostredníctvom AIS budete v najbližšom možnom termíne upozornení, aby ste žiadne ďalšie riešenia neposielali a termínom ukončenia zasielania riešení sa stane termín odovzdania v poradí pätnásteho správneho riešenia.