

VÝNOSNOSŤ A RIZIKO

1. Zistite očakávanú výnosovú sadzbu-výnosnosť akcie Annas, ak s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ nastane udalosť A, pri nastaní ktorej dosiahne akcia Annas za dobu držania výnos 10 %, a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ nastane udalosť B, pri nastaní ktorej dosiahne akcia Annas výnos 25 %:

Riešenie:

udalosť	pravdepodobnosť	výnosová miera
A	0,5	0,1
B	0,5	0,25

Označme výnosovú sadzbu akcie spojenú s nastaním udalosti A ako r_A a výnosovú sadzbu akcie spojenú s nastaním udalosti B ako r_B . Nech $E(r)$ označuje očakávanú výnosovú sadzbu akcie, potom:

$$E(r) = 0,5r_A + 0,5r_B = 0,5 \cdot 0,35 = 0,175$$

Poznámka:

Očakávaná výnosová sadzba akcie je teda váženým priemerom všetkých výnosových sadzieb, ktoré môže akcia za dobu držania na trhu pri rôznych podmienkach (v tomto prípade udalosti A, B) dosiahnuť. Váhami sú pravdepodobnosti nastania jednotlivých udalostí. Samozrejme, čím väčšia je pravdepodobnosť nastania nejakej udalosti, tým väčšiu váhu

má tejto udalosti zodpovedajúci výnos (vid'. nasledujúca úloha).

Za úlohou nájsť očakávanú výnosovú sadzbu alebo výnosnosť je snaha vyjadriť potenciálny výnos akcie (všeobecne cenného papiera, resp. investície) jedným číslom.

Investori nakupujúci cenné papiere sa budú pochopiteľne zaujímať len o tie, ktoré poskytujú kladné očakávané výnosové sadzby.

2. Zistite očakávanú výnosovú mieru-výnosnosť akcie Bettaz, ak s pravdepodobnosťou 0,1 nastane udalosť A, pri nastaní ktorej dosiahne akcia za dobu držania výnos 5%, s pravdepodobnosťou 0,5 nastane udalosť B, pri nastaní ktorej dosiahne akcia výnos 20 % a s pravdepodobnosťou 0,4 nastane udalosť C, pri nastaní ktorej dosiahne akcia výnos 15,65 %:

Riešenie:

udalosť	pravdepodobnosť	výnosová miera
A	0,1	5 %
B	0,5	20 %
C	0,4	15,65 %

Vychádzajúc zo značení zavedených v 1.úlohe, dostaneme:

$$\begin{aligned} E(r) &= 0,1r_A + 0,5r_B + 0,4r_C = 0,5 \% + 10 \% + 6,26 \% \\ &= 16,76 \% \end{aligned}$$

3. Zistite očakávanú výnosovú sadzbu a rizikovosť akcie Alfa, ak s pravdepodobnosťou 0,2 nastane udalosť X, pri nastaní ktorej

dosiahne akcia za dobu držania výnos 0,1, s pravdepodobnosťou 0,6 nastane udalosť Y, pri nastaní ktorej dosiahne akcia výnos 0,4 a s pravdepodobnosťou 0,2 nastane udalosť Z, pri nastaní ktorej dosiahne akcia výnos 0,7.

Riešenie:

udalosť	pravdepodobnosť	výnosová miera
X	0,2	0,1
Y	0,6	0,4
Z	0,2	0,7

Očakávaná výnosová sadzba akcie Alfa bude:

$$E_{\alpha}(r) = 0,2r_X + 0,6r_Y + 0,2r_Z = 0,02 + 0,24 + 0,14 = 0,4$$

Vypočítanú $E_{\alpha}(r)$ využijeme na výpočet variancie výnosových sadzieb akcie Alfa:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^2 &= Var_{\alpha}(r) = \\ &= 0,2(r_X - E_{\alpha}(r))^2 + 0,6(r_Y - E_{\alpha}(r))^2 \\ &+ 0,2(r_Z - E_{\alpha}(r))^2 = \\ &= 0,2(-0,3)^2 + 0,6(0)^2 + 0,2(0,3)^2 = 0,4 \cdot 0,09 \\ &= 0,036\end{aligned}$$

Riziko alebo tiež rizikovosť akcie meriame smerodajnou odchýlkou, tj.:

$$\sigma_{\alpha} = \sqrt{Var_{\alpha}(r)} = \sqrt{0,036} \doteq 0,19$$

Poznámka:

Riziko alebo rizikovosť akcie (všeobecne cenného papiera, resp. investície) je vyjadrená odchýlkou, o ktorú sa „vo váže-

nom priemere“ líši skutočný výnos od očakávanej výnosovej sadzby.

Investori s vysokým odporom k riziku sa budú zaujímať predovšetkým o investície, ktoré majú pri danej očakávanej výnosovej sadzbe nižšiu smerodajnú odchýlku, pretože uprednostňujú menšie výkyvy výnosov od očakávanej výnosovej sadzby.

4. Zistite očakávanú výnosovú sadzbu a rizikovosť akcie Beta, ak s pravdepodobnosťou 0,2 nastane udalosť X, pri nastaní ktorej dosiahne akcia za dobu držania výnos 0,15, s pravdepodobnosťou 0,6 nastane udalosť Y, pri nastaní ktorej dosiahne akcia výnos 0,45 a s pravdepodobnosťou 0,2 nastane udalosť Z, pri nastaní ktorej dosiahne akcia výnos 0,5.

Riešenie:

udalosť	pravdepodobnosť	výnosová miera
X	0,2	0,15
Y	0,6	0,45
Z	0,2	0,5

Očakávaná výnosová sadzba akcie Beta:

$$E_{\beta}(r) = 0,2 \cdot 0,15 + 0,6 \cdot 0,45 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,03 + 0,27 + 0,1 \\ = 0,4$$

Variancia výnosových sadzieb akcie Beta:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta}^2 &= Var_{\beta}(r) = \\
&= 0,2(0,15 - 0,4)^2 + 0,6(0,45 - 0,4)^2 \\
&+ 0,2(0,5 - 0,4)^2 = \\
&= 0,2(-0,25)^2 + 0,6(0,05)^2 + 0,2(0,1)^2 = 0,016
\end{aligned}$$

Rizikovosť akcie:

$$\sigma_{\beta} = \sqrt{Var_{\beta}(r)} = \sqrt{0,016} \doteq 0,13$$

5. Rozhodnite, ktorá z akcií Alfa, Beta s rovnakou výnosnosťou je menej riziková.

Riešenie:

Akcie Alfa, Beta sa nachádzajú na rovnakom trhu a v predchádzajúcich dvoch úlohách sme zistili, že poskytujú aj rovnakú očakávanú výnosovú sadzbu. Porovnaním ich smerodajných odchýliek:

$$\sigma_{\alpha} = \sqrt{0,036} > \sqrt{0,016} = \sigma_{\beta}$$

dospejeme k záveru, že očakávaný výnos z akcie Beta je menej rizikový a riziko-averzní investori budú preferovať jej nákup pred nákupom akcie Alfa.

Udalosti na trhu, ktoré môžu ovplyvňovať výnosovú sadzbu akcie, môžu byť rôzne, ale väčšinou ide o ekonomické interné alebo externé faktory (napríklad: prednáška5.pdf, str. 5). V nasledujúcich úlohách však pôjde len o akademické príklady takýchto udalostí, ktoré nesúvisia bezprostredne s ekonomickými faktormi vplývajúcimi na výnosovú sadzbu akcie, ale

súvisia s náhodnosťou a teda s pravdepodobnosťou. Poslúžia na lepšiu orientáciu v problematike náhodnosti a počítania charakteristík náhodnej premennej.

6. V zakrytom nepriehľadnom košíku sa nachádza 10 bielych guľôčok a 5 čiernych guľôčok. Zahrajme sa nasledujúcu hru: Ak dvakrát po sebe vytiahnete náhodne bielu guľôčku, pričom prvú nevrátite späť do košíka, vyhráte 1260 p.j. Ak sa vám to nepodarí, prehráte 889 p.j. Hrali by ste túto hru?

Riešenie:

Spočítajme najprv pravdepodobnosť, s ktorou sa vám podarí vytiahnuť dve biele guľôčky. Pravdepodobnosť, že vyberiete ako prvú guľôčku bielu guľôčku je určená podielom počtu bielych guľôčok v košíku k celkovému počtu guľôčok v košíku, teda $\frac{10}{15}$. Ak bola vytiahnutá guľôčka biela a nevrátite ju späť, v košíku ostane 14 guľôčok, z toho 9 bielych. Teda pravdepodobnosť, že obe vytiahnuté guľôčky sú biele, je rovná $\frac{10}{15} \frac{9}{14} = \frac{2}{3} \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$. Pravdepodobnosť, že sa to nestane potom bude $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$. Pravdepodobnosť vašej výhry je síce blízka 0,5 (zhruba 0,43), ale je menšia než 0,5.

Ak sa zamariate pri svojom rozhodovaní len na pravdepodobnosť, máte zhruba 43%-nú šancu vyhrať 1260 p.j., ale súčasne môžete s pravdepodobnosťou cca 57% prehrať 889 p.j. Nieкого môže lákať vidina vysokej výhry s relatívne veľkou šancou na ňu, ale súčasne existuje riziko, že prehráte taktiež pomerne vysokú sumu, hoci nižšiu. Opatrnejší volia skôr

nehrať takúto hru, pretože sa obávajú straty. Na to, či si takúto hru zahráte, má teda vplyv i váš postoj k výnosu a riziku.

Vypočítajme veľkosť očakávanej výhry, teda strednú hodnotu:

$$\frac{3}{7} 1260 \text{ p.j.} + \frac{4}{7} (-889) \text{ p.j.} = 32 \text{ p.j.}$$

Tým reprezentujeme veľkosť výhry jedným číslom. Hoci je kladné, v tomto prípade nám neposkytuje dostatok relevantných informácií. Potrebujeme ešte spočítať smerodajnú odchýlku, teda riziko, s ktorým sa pri dosiahnutí tohto čísla musíte vysporiadať:

$$\sqrt{\frac{3}{7} (1260 \text{ p.j.} - 32 \text{ p.j.})^2 + \frac{4}{7} (-889 \text{ p.j.} - 32 \text{ p.j.})^2} \\ \doteq 1063,48 \text{ p.j.}$$

Vidíme, že riziko je aj vzhľadom k tomu, aká malá je stredná hodnota, veľmi vysoké. Opäť platia závery z predchádzajúcich úvah, že investori naklonení riziku, budú preferovať túto hru hrať, kým riziko-averzní investori budú radšej uprednostňovať investície s veľmi podobným očakávaným výnosom, ale menším rizikom.

Teda záverom: Či sa rozhodnete hrať túto hru, závisí na tom, aké sú vaše preferencie ohľadom výnosu a rizika.

Poznámka:

Na druhej strane vaše rozhodnutie ohľadom toho, či hrať alebo nehrať hru z predchádzajúceho príkladu môže ovplyvňovať aj vaša bonita, pretože pre niekoho môže byť vsádzaná suma vysoká a nemôže si dovoliť takéto peniaze

postrádať, kým pre iného je to tak malá suma, že by hranie tejto hry neovplyvnilo jeho rozpočet a je otázne, či by preňho bola vôbec zaujímavá.

7. V zakrytom nepriehľadnom košíku sa nachádza 10 bielych guľôčok a 5 čiernych guľôčok. Zahrajme sa nasledujúcu hru: Ak dvakrát po sebe náhodne vytiahnete bielu guľôčku, pričom prvú vrátite späť do košíka, vyhráte $x > 0$ p.j. Ak sa vám to nepodarí, prehráte $2x$ p.j. Hrali by ste túto hru, ak si môžete sami zvoliť x ?

Riešenie:

Spočítajme najprv pravdepodobnosť, s ktorou sa vám podarí vytiahnuť dve biele guľôčky. Pretože, prvú guľôčku v tomto prípade vraciate späť do košíka, pravdepodobnosť, že vytiahnete dve biele guľôčky je $\frac{10}{15} \frac{10}{15} = \frac{4}{9}$. Pravdepodobnosť, že sa tak nestane potom bude $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Pravdepodobnosť vašej výhry je menšia než 0,5 a pri prehre navyše stratíte dvakrát toľko. Takže, ak ste riziko-averzný investor, volíte hru radšej nehrať a ak už musíte, volíte x čo najviac blízke nule.

Uvedenej úvahe zodpovedá i očakávaná výplata (stredná hodnota) z tejto hry:

$$\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}(-2x) = -\frac{2}{3}x,$$

ktorá je pre ľubovoľné $x > 0$ záporná. Rizikovosť je takisto funkciou x :

$$\sqrt{\frac{4}{9}\left(x - \left(-\frac{2}{3}x\right)\right)^2 + \frac{5}{9}\left(-2x - \left(-\frac{2}{3}x\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{180x^2}{81}}$$

$$= \frac{\sqrt{20}x}{3} \doteq 1,49x$$

8. V zakrytom nepriehľadnom košíku sa nachádza 10 bielych guľôčok a 5 čiernych guľôčok. Zahrajme sa nasledujúcu hru: Ak dvakrát po sebe náhodne vytiahnete bielu guľôčku, pričom prvú vrátite späť do košíka, vyhráte $y > 0$ p.j. Ak sa vám to nepodarí, prehráte $\frac{y}{5}$ p.j. Hrali by ste túto hru, ak si môžete sami zvoliť y ?

Riešenie:

V tomto prípade stredná hodnota bude:

$$\frac{4}{9}y + \frac{5}{9}\left(-\frac{y}{5}\right) = \frac{1}{3}y.$$

To je pre ľubovoľné $y > 0$ kladná hodnota. Takže čím vyššie y zvolíte, tým vyššiu očakávanú výplatu získate. Na druhej strane, opäť platí, že rizikovosť je funkciou y :

$$\sqrt{\frac{4}{9}\left(y - \frac{y}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}\left(-\frac{y}{5} - \frac{y}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{144y^2}{405}} = \frac{4y}{3\sqrt{5}} \doteq 0,6y$$

Takže s vyšším y sa nezvyšuje len očakávaná výplata z hry plynúca, ale aj riziko, s ktorým túto výplatu nadobudnete. Preto voľba y opäť závisí od toho, aké sú vaše preferencie ohľadom výnosu a rizika.

9. V zakrytom nepriehľadnom košíku sa nachádza 10 bielych guľôčok, 4 modré guľôčky a 6 zelených guľôčok. Zahrajme sa nasledujúcu hru: Ak si náhodne vytiahnete modrú guľôčku, vyhráte 20 p.j. Ak si náhodne vytiahnete zelenú guľôčku, vyhráte $z > 0$ p.j. Ak si náhodne vytiahnete bielu guľôčku, prehráte z^2 p.j. Hrali by ste túto hru, ak si môžete sami zvoliť z ?

Riešenie:

Stredná hodnota bude:

$$\frac{4}{20}20 + \frac{6}{20}z + \frac{10}{20}(-z^2) = -\frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{10}z + 4.$$

Aby ste zabezpečili jej kladnú hodnotu potrebujete zvoliť $z > 0$ tak, že:

$$-\frac{1}{2}z^2 + \frac{3}{10}z + 4 > 0.$$

Upravme túto nerovnicu:

$$-5z^2 + 3z + 40 > 0,$$

$$5z^2 - 3z - 40 < 0,$$

$$5(z - z_1)(z - z_2) < 0,$$

kde $z_1 = \frac{3+\sqrt{809}}{10} > 0$ a $z_2 = \frac{3-\sqrt{809}}{10} < 0$. Stredná hodnota teda bude kladná pri voľbe $z \in (0, z_1)$. Môžeme sa pozrieť, pre aké z z tohto intervalu bude maximálna. Označme: $f(z) = -0,5z^2 + 0,3z + 4$, potom $f'(z) = -z + 0,3$. Jediným kandidátom na lokálny extrém tejto funkcie je preto bod 0,3. Označme túto hodnotu ako $\bar{z}$, teda $\bar{z} = 0,3$. Potom funkcia f dosahuje v bode $\bar{z}$ svoje (globálne) maximum s hodnotou:

$$f(\bar{z}) = 4,045 \text{ p.j.}$$

Voľbou $z = \bar{z}$, teda dosiahnete najvyššiu možnú strednú hodnotu z takejto hry. Pričom, keď vytiahnete bielu guľôčku, prehráte 0,09 p.j. Táto možnosť nastane s pravdepodobnosťou 0,5.

Na druhej strane, ak by ste mali možnosť voľby $z = 0$ p.j., tak by ste s pravdepodobnosťou 0,2 vyhrali 20 p.j. (stredná hodnota by bola rovná 4 p.j.) a s pravdepodobnosťou 0,8 by ste nič nevyhrali, ale ani nič neprehrali.