

PAR BOND a DURÁCIA

1. Uvažujte kupónový dlhopis s maturitou $n = 2$ roky, ktorý vypláca 3 % ročný kupón. Nech $B = F = 100$ p.j., tj. prítomná hodnota dlhopisu je rovná jeho nominálnej hodnote. Nájdite výnos do splatnosti $y > 0$, ak sa úročí diskkrétne.

Riešenie:

$$B = F = 100 \text{ p.j.}, n = 2, c = 0,03, C = cF = 3 \text{ p.j.}, y = ?$$

Hodnotu y dostaneme z rovnice:

$$B = \frac{cF}{1+y} + \frac{(1+c)F}{(1+y)^2}$$

Teda máme:

$$100 \text{ p.j.} = \left(\frac{3}{1+y} + \frac{103}{(1+y)^2} \right) \text{ p.j.}$$

Označme $x = \frac{1}{1+y}$, potom z rovnice dostaneme:

$$103x^2 + 3x - 100 = 0$$

Táto rovnica má dve reálne riešenia: $x_1 = -1, x_2 = \frac{100}{103}$. Pretože hľadáme $y > 0$, uvažujeme iba riešenie x_2 . Odtiaľ:

$$\frac{100}{103} = \frac{1}{1+y}$$

$$1+y = 1,03$$

$$y = 0,03$$

Výnos do splatnosti tohto par bond-u je pri diskkrétnom úrokovaní 3 % ročne.

2. Uvažujte kupónový dlhopis s maturitou $n = 2$ roky, ktorý vypláca 3 % ročný kupón. Nech $B = F = 100$ p.j., tj. prítomná hodnota dlhopisu je

rovná jeho nominálnej hodnote. Nájdite výnos do splatnosti $y > 0$, ak sa úročí spojte.

Riešenie:

$$B = F = 100 \text{ p.j.}, n = 2, c = 0,03, C = cF = 3 \text{ p.j.}, y = ?$$

Hodnotu y dostaneme z rovnice:

$$B = cFe^{-y} + (1 + c)Fe^{-2y}$$

Teda máme:

$$100 \text{ p.j.} = (3e^{-y} + 103e^{-2y}) \text{ p.j.}$$

Označme $x = e^{-y}$, potom z rovnice dostaneme:

$$103x^2 + 3x - 100 = 0$$

Táto rovnica má dve reálne riešenia: $x_1 = -1, x_2 = \frac{100}{103}$. Pretože e^{-y} nemôže nadobúdať záporné hodnoty, uvažujeme iba riešenie x_2 . Odtiaľ:

$$\frac{100}{103} = e^{-y}$$

$$e^y = 1,03$$

$$y = \ln 1,03 \doteq 0,03$$

Výnos do splatnosti dlhopisu je pri spojitom úrokovaní približne 3 % ročne.

3. Uvažujte nasledujúcu časovú štruktúru diskretných úrokových sadzieb r_n na obdobie n rokov, kde $n = 1,2,3,4,5$:

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
0,0123	0,0177	0,0222	0,0248	0,0261

Určte par yield c_n pre kupónový par bond s dobou splatnosti n rokov, kde $n = 1,2,3,4,5$.

Riešenie:

Hodnoty c_n pre $n = 1,2,3,4,5$ dostaneme z rovníc:

$$c_n = \frac{1 - (1 + r_n)^{-n}}{\sum_{t=1}^n (1 + r_t)^{-t}}$$

Máme:

$$c_1 = \frac{1 - \frac{1}{1+r_1}}{\frac{1}{1+r_1}} = \frac{\frac{1+r_1-1}{1+r_1}}{\frac{1}{1+r_1}} = r_1 = 0,0123$$

$$c_2 = \frac{1 - \frac{1}{(1+r_2)^2}}{\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_2)^2}} \doteq 0,0177$$

$$c_3 = \frac{1 - \frac{1}{(1+r_3)^3}}{\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_2)^2} + \frac{1}{(1+r_3)^3}} \doteq 0,0221$$

$$c_4 = \frac{1 - \frac{1}{(1+r_4)^4}}{\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_2)^2} + \frac{1}{(1+r_3)^3} + \frac{1}{(1+r_4)^4}} \doteq 0,0246$$

$$c_5 = \frac{1 - \frac{1}{(1+r_5)^5}}{\frac{1}{1+r_1} + \frac{1}{(1+r_2)^2} + \frac{1}{(1+r_3)^3} + \frac{1}{(1+r_4)^4} + \frac{1}{(1+r_5)^5}} \doteq 0,0259$$

4. Uvažujte nasledujúcu časovú štruktúru spojitých úrokových sadzieb R_n na obdobie n rokov, kde $n = 1,2,3,4,5$:

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
0,0123	0,0177	0,0222	0,0248	0,0261

Určte par yield c_n pre kupónový par bond s dobou splatnosti n rokov, kde $n = 1,2,3,4,5$.

Riešenie:

Hodnoty c_n pre $n = 1,2,3,4,5$ dostaneme z rovníc:

$$c_n = \frac{1 - e^{-nR_n}}{\sum_{t=1}^n e^{-tR_t}}$$

Máme:

$$c_1 = \frac{1 - e^{-R_1}}{e^{-R_1}} = e^{R_1} - 1 \doteq 0,0124$$

$$c_2 = \frac{1 - e^{-2R_2}}{e^{-R_1} + e^{-2R_2}} \doteq 0,0178$$

$$c_3 = \frac{1 - e^{-3R_3}}{e^{-R_1} + e^{-2R_2} + e^{-3R_3}} \doteq 0,0223$$

$$c_4 = \frac{1 - e^{-4R_4}}{e^{-R_1} + e^{-2R_2} + e^{-3R_3} + e^{-4R_4}} \doteq 0,0249$$

$$c_5 = \frac{1 - e^{-5R_5}}{e^{-R_1} + e^{-2R_2} + e^{-3R_3} + e^{-4R_4} + e^{-5R_5}} \doteq 0,0262$$

5. Uvažujte nasledujúce hodnoty par yield c_n pre kupónový par bond s dobou splatnosti n rokov, kde $n = 1,2,3,4,5$:

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
0,0116	0,0128	0,0139	0,0172	0,0203

Určte časovú štruktúru diskretných r_n aj spojitých R_n úrokových sadzieb na obdobie n rokov, kde $n = 1,2,3,4,5$

Riešenie:

Keďže hodnoty c_n pre $n = 1,2,3,4,5$ dostaneme pre diskrétné úrokovanie z rovníc:

$$c_n = \frac{1 - (1 + r_n)^{-n}}{\sum_{t=1}^n (1 + r_t)^{-t}},$$

Tak pre $n = 1$ máme:

$$r_1 = c_1$$

a pre $n = 2,3,4,5$:

$$c_n \sum_{t=1}^n (1 + r_t)^{-t} = 1 - (1 + r_n)^{-n}$$

$$(1 + c_n)(1 + r_n)^{-n} = 1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} (1 + r_t)^{-t}$$

$$\frac{1}{(1+r_n)^n} = \left(\frac{1}{1+c_n} \right) \left(1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} (1+r_t)^{-t} \right)$$

$$(1+r_n)^n = \left(\frac{1+c_n}{1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} (1+r_t)^{-t}} \right)$$

$$r_n = \left(\frac{1+c_n}{1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} (1+r_t)^{-t}} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Z toho:

$$r_1 = c_1 = 0,0116$$

$$r_2 = \left(\frac{1+c_2}{1 - c_2(1+r_1)^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \doteq 0,0128$$

$$r_3 = \left(\frac{1+c_3}{1 - c_3 \sum_{t=1}^2 (1+r_t)^{-t}} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \doteq 0,0139$$

$$r_4 = \left(\frac{1+c_4}{1 - c_4 \sum_{t=1}^3 (1+r_t)^{-t}} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \doteq 0,0173$$

$$r_5 = \left(\frac{1+c_5}{1 - c_5 \sum_{t=1}^4 (1+r_t)^{-t}} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 \doteq 0,0205$$

Keďže hodnoty c_n pre $n = 1,2,3,4,5$ dostaneme pre spojité úrokovanie z rovníc:

$$c_n = \frac{1 - e^{-nR_n}}{\sum_{t=1}^n e^{-tR_t}},$$

Tak pre $n = 1$ máme:

$$R_1 = \ln(1 + c_1)$$

a pre $n = 2,3,4,5$:

$$c_n \sum_{t=1}^n e^{-tR_t} = 1 - e^{-nR_n}$$

$$\begin{aligned}
(1 + c_n)e^{-nR_n} &= 1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} e^{-tR_t} \\
e^{-nR_n} &= \left(\frac{1}{1 + c_n} \right) \left(1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} e^{-tR_t} \right) \\
-nR_n &= \ln \left(\left(\frac{1}{1 + c_n} \right) \left(1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} e^{-tR_t} \right) \right) \\
R_n &= -\frac{1}{n} \left(\ln \left(\frac{1}{1 + c_n} \right) + \ln \left(1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} e^{-tR_t} \right) \right) \\
R_n &= \frac{1}{n} \left(\ln(1 + c_n) - \ln \left(1 - c_n \sum_{t=1}^{n-1} e^{-tR_t} \right) \right)
\end{aligned}$$

Odtiaľ:

$$\begin{aligned}
R_1 &\doteq 0,0115 \\
R_2 &= \frac{1}{2} (\ln(1 + c_2) - \ln(1 - c_2 e^{-R_1})) \doteq 0,0127 \\
R_3 &= \frac{1}{3} \left(\ln(1 + c_3) - \ln \left(1 - c_3 \sum_{t=1}^2 e^{-tR_t} \right) \right) \doteq 0,0138 \\
R_4 &= \frac{1}{4} \left(\ln(1 + c_4) - \ln \left(1 - c_4 \sum_{t=1}^3 e^{-tR_t} \right) \right) \doteq 0,0172 \\
R_5 &= \frac{1}{5} \left(\ln(1 + c_5) - \ln \left(1 - c_5 \sum_{t=1}^4 e^{-tR_t} \right) \right) \doteq 0,0203
\end{aligned}$$

6. Uvažujte, že za 5 rokov treba splatiť pôžičku vo výške 10^6 p.j. Najjednoduchšie je kúpiť bezkupónový dlhopis, ktorý za 5 rokov prinesie 10^6 p.j. Predpokladajme, že taký dlhopis na trhu neexistuje. Existujú však kupónové dlhopisy A a B , oba s nominálnou hodnotou

$F = 100$ p.j. také, že dlhopis A je 5-ročný poskytujúci každý rok kupón vo výške 10% z nominálu a dlhopis B je 12-ročný poskytujúci každý rok kupón vo výške 6% z nominálu. Skonstruujte portfólio pozostávajúce z dlhopisov A a B tak, aby bolo imúnne voči krátkodobým paralelným posunom úrokových mier. Uvažujte diskkrétne úrokovanie (ročné) a nasledujúce nominálne úrokové miery na obdobie jedného až dvanástich rokov:

1-ročná	7,67%	7-ročná	10,52%
2-ročná	8,27%	8-ročná	10,85%
3-ročná	8,81%	9-ročná	11,15%
4-ročná	9,31%	10-ročná	11,42%
5-ročná	9,75%	11-ročná	11,67%
6-ročná	10,16%	12-ročná	11,89%

Riešenie:

Označme úrokovú sadzbu na obdobie i -rokov ako r_i , kde $i = 1, 2, 3, \dots, 12$. Potom súčasná hodnota pôžičky je:

$$P = \frac{10^6 \text{ p.j.}}{(1 + r_5)^5} = \frac{10^6 \text{ p.j.}}{(1 + 0,0975)^5} \doteq 628026 \text{ p.j.}$$

Zostrojené portfólio musí mať rovnakú súčasnú hodnotu. Označme súčasnú hodnotu dlhopisu A ako P_A a súčasnú hodnotu dlhopisu B ako P_B . Potom:

$$P_A = \sum_{i=1}^4 \frac{10 \text{ p.j.}}{(1 + r_i)^i} + \frac{110 \text{ p.j.}}{(1 + r_5)^5} \doteq 101,67 \text{ p.j.}$$

$$P_B = \sum_{i=1}^{11} \frac{6 \text{ p.j.}}{(1 + r_i)^i} + \frac{106 \text{ p.j.}}{(1 + r_{12})^{12}} \doteq 65,95 \text{ p.j.}$$

Nech ďalej a označuje počet kusov dlhopisu A v portfóliu a b označuje počet kusov dlhopisu B v portfóliu. Potom súčasná hodnota portfólia je $aP_A + bP_B$ a musí platiť:

$$aP_A + bP_B = P \quad (1)$$

Durácia (trvanie; uvádzaná v rokoch) pôžičky je:

$$D_P = \frac{5}{1 + r_5} \doteq 4,56$$

Označme duráciu dlhopisu A ako D_A a duráciu dlhopisu B ako D_B .
Potom:

$$D_A = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{10i}{(1 + r_i)^{i+1}} + \frac{550}{(1 + r_5)^6}}{P_A} \doteq 3,80$$

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{11} \frac{6i}{(1 + r_i)^{i+1}} + \frac{1272}{(1 + r_{12})^{13}}}{P_B} \doteq 7,07$$

Portfólio musí mať reagovať rovnako na zmeny úrokových sadzieb ako pôžička, tj.:

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = a \frac{dP_A(0)}{d\lambda} + b \frac{dP_B(0)}{d\lambda}$$

Odtiaľ:

$$-D_P P = -a D_A P_A - b D_B P_B$$

Po úprave:

$$a P_A D_A + b P_B D_B = P D_P \quad (2)$$

Máme teda dve rovnice (1), (2) o dvoch neznámych a, b . Vyjadrimo z nich a, b :

$$a = \frac{P (D_P - D_B)}{P_A (D_A - D_B)} \doteq 4745$$

$$b = \frac{P (D_P - D_A)}{P_B (D_B - D_A)} \doteq 2208$$

Do portfólia teda treba nakúpiť 4745 kusov dlhopisu A a 2208 kusov dlhopisu B .

7. Na príklade ukážte, že portfólio zostrojené v 6.úlohe je naozaj imúnne voči malým paralelným posunom úrokových sadzieb. Uvažujte najprv nárast všetkých úrokových sadzieb o 1% a potom pokles všetkých úrokových sadzieb o 1%.

Riešenie:

Uvažujme najprv nárast všetkých úrokových sadzieb o 1% nahor (tj. $\lambda = 0,01$). Potom súčasná hodnota portfólia je:

$$4745 \left(\sum_{i=1}^4 \frac{10 \text{ p.j.}}{(1,01 + r_i)^i} + \frac{110 \text{ p.j.}}{(1,01 + r_5)^5} \right) + 2208 \left(\sum_{i=1}^{11} \frac{6 \text{ p.j.}}{(1,01 + r_i)^i} + \frac{106 \text{ p.j.}}{(1,01 + r_{12})^{12}} \right) \doteq 600365 \text{ p.j.}$$

kým hodnota pôžičky bude:

$$P = \frac{10^6 \text{ p.j.}}{(1 + r_5 + 0,01)^5} = \frac{10^6 \text{ p.j.}}{(1 + 0,1075)^5} \doteq 600180 \text{ p.j.}$$

Vidíme, že hodnota portfólia je zhruba o 185 p.j. vyššia.

Ak uvažujeme pokles všetkých úrokových sadzieb o 1% nadol (tj. $\lambda = -0,01$), súčasná hodnota portfólia bude:

$$4745 \left(\sum_{i=1}^4 \frac{10 \text{ p.j.}}{(0,99 + r_i)^i} + \frac{110 \text{ p.j.}}{(0,99 + r_5)^5} \right) + 2208 \left(\sum_{i=1}^{11} \frac{6 \text{ p.j.}}{(0,99 + r_i)^i} + \frac{106 \text{ p.j.}}{(0,99 + r_{12})^{12}} \right) \doteq 657647 \text{ p.j.}$$

kým hodnota pôžičky bude:

$$P = \frac{10^6 \text{ p.j.}}{(1 + r_5 - 0,01)^5} = \frac{10^6 \text{ p.j.}}{(1 + 0,0875)^5} \doteq 657436 \text{ p.j.}$$

Vidíme, že hodnota portfólia je aj v tomto prípade vyššia, tentokrát asi o 211 p.j.

8. Na príklade ukážte, že portfólio zostrojené v 6.úlohe nie je imúnne voči posunom úrokových sadzieb, ktoré nie sú paralelné. Uvažujte nárast len 12-ročnej úrokovej sadzby o 1% nahor a ostatné úrokové sadzby ponechajte nezmenené.

Riešenie:

Ak uvažujeme nárast len 12-ročnej úrokovej sadzby o 1%, súčasná hodnota pôžičky, ako i dlhopisu A sa nezmení, ale zmení sa súčasná hodnota dlhopisu B . Pretože ide o nárast úrokovej sadzby r_{12} , hodnota dlhopisu B poklesne a tým pádom poklesne i hodnota celého portfólia. Nová hodnota portfólia bude samozrejme pod úrovňou hodnoty pôžičky, pretože portfólio bolo zostrojené tak, aby malo rovnakú hodnotu ako pôžička. Číselne:

$$2208 \left(\frac{106 \text{ p.j.}}{(1 + r_{12})^{12}} - \frac{106 \text{ p.j.}}{(1,01 + r_{12})^{12}} \right) \doteq 6156 \text{ p.j.}$$

Čiže súčasná hodnota portfólia bude zhruba o 6156 p.j. nižšia než hodnota pôžičky.

Poznámka:

Pretože neskôr budeme vyjadrovať podiel jednotlivých cenných papierov v portfóliu prostredníctvom ich váh v portfóliu, pozrime sa, aký podiel x_A má na skladbe portfólia dlhopis A a aký podiel x_B má na skladbe portfólia dlhopis B . Za tým účelom vydelíme obe strany rovnice (1) hodnotou P , dostaneme:

$$\frac{aP_A}{P} + \frac{bP_B}{P} = 1$$

Označme $x_A = \frac{aP_A}{P}$ a $x_B = \frac{bP_B}{P}$, potom z predchádzajúcej rovnice máme:

$$x_A + x_B = 1,$$

kde x_A je váha dlhopisu A v portfóliu a x_B je váha dlhopisu B v portfóliu. Keby sme hodnoty a, b nepoznali, vedeli by sme x_A, x_B v 6.úlohe vyjadriť ako riešenia sústavy rovníc:

$$\begin{aligned} x_A + x_B &= 1, \\ x_A D_A + x_B D_B &= D_P, \end{aligned}$$

kde druhú z rovníc dostaneme úpravou rovnice (2).

Vyriešiac sústavu, získame:

$$x_A = \frac{(D_P - D_B)}{(D_A - D_B)} \doteq 0,77 \text{ a } x_B = \frac{(D_P - D_A)}{(D_B - D_A)} \doteq 0,23.$$