

DLHOPISY

1. Uvažujte nasledujúcu štruktúru diskrétnych úrokových sadzieb:

obdobie	1 rok	2 roky	3 roky	4 roky
úroková sadzba	$r_1 = 0,002$	$r_2 = 0,006$	$r_3 = 0,011$	$r_4 = 0,018$

Vypočítajte súčasnú hodnotu B_D bezkupónového dlhopisu D s maturitou 3 roky a nominálnou hodnotou $F = 1000$ p.j. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

Vypočítajte súčasnú hodnotu B_E kupónového dlhopisu E s maturitou 4 roky a nominálnou hodnotou $F = 1000$ p.j., ktorý vypláca pravidelný ročný kupón vo výške 4 % z nominálu (tj. ročná kupónová sadzba $c = 0,04$). Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

Riešenie:

Máme:

$$B_D = \frac{F}{(1 + r_3)^3} = \frac{1000 \text{ p.j.}}{(1,011)^3} \doteq 967,71 \text{ p.j.}$$

$$\begin{aligned} B_E &= \frac{cF}{1 + r_1} + \frac{cF}{(1 + r_2)^2} + \frac{cF}{(1 + r_3)^3} + \frac{(1 + c)F}{(1 + r_4)^4} \\ &= \frac{40 \text{ p.j.}}{1,002} + \frac{40 \text{ p.j.}}{(1,006)^2} + \frac{40 \text{ p.j.}}{(1,011)^3} + \frac{1040 \text{ p.j.}}{(1,018)^4} \doteq 1086,53 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

2. Uvažujte nasledujúcu štruktúru spojitých úrokových sadzieb:

obdobie	1 rok	2 roky	3 roky	4 roky
úroková sadzba	$R_1 = 0,002$	$R_2 = 0,006$	$R_3 = 0,011$	$R_4 = 0,018$

Vypočítajte súčasnú hodnotu B_D bezkupónového dlhopisu D s maturitou 3 roky a nominálnou hodnotou $F = 1000$ p.j. Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

Vypočítajte súčasnú hodnotu B_E kupónového dlhopisu E s maturitou 4 roky a nominálnou hodnotou $F = 1000$ p.j., ktorý vypláca pravidelný ročný kupón vo výške 4 % z nominálu (tj. ročná kupónová sadzba $c = 0,04$). Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta.

Riešenie:

Máme:

$$B_D = Fe^{-3R_3} = (1000 \text{ p.j.})e^{-0,033} \doteq 967,54 \text{ p.j.}$$

$$B_E = cFe^{-R_1} + cFe^{-2R_2} + cFe^{-3R_3} + (1 + c)Fe^{-4R_4}$$

$$= (40 \text{ p.j.})(e^{-0,002} + e^{-0,012} + e^{-0,033}) + (1040 \text{ p.j.})e^{-0,072} \\ \doteq 1085,90 \text{ p.j.}$$

Poznámka:

Rovnaká číselná hodnota diskretných a spojitých úrokových sadzieb na jednotlivé obdobia, tj. $r_i = R_i$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ (kde n označuje všeobecne zadany istý počet rokov), implikuje, že v skutočnosti ide o dva rôzne trhy s rozličnou časovou štruktúrou úrokových sadzieb, ako ilustruje aj predchádzajúca dvojica úloh.

Aby sme štruktúru úrokových sadzieb zachovali, musíme pre prípad so spojitým časom predpokladať $R_i = \ln(1 + r_i)$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. V takom prípade budú súčasné hodnoty n -ročného bezkupónového/kupónového dlhopisu rovnaké, či už úročíme diskkrétne alebo spojite. Toto tvrdenie vyplýva z toho, že súčasná hodnota akéhokoľvek budúceho finančného toku C_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$, bude rovnaká ako pri diskretnom, tak pri spojitom úrokovaní:

$$C_i e^{-iR_i} = C_i e^{-i \ln(1+r_i)} = C_i e^{\ln(1+r_i)^{-i}} = C_i (1 + r_i)^{-i} = \frac{C_i}{(1 + r_i)^i}$$

3. Uvažujte trh s piatimi bezkupónovými dlhopismi s rovnakou nominálnou hodnotou $F = 10$ p.j., ale s rôznou dobou splatnosti. Nech B_i

označuje súčasnú hodnotu dlhopisu D_i s dobou splatnosti i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Vypočítajte diskkrétne (ročné) úrokové sadzby r_i na jednotlivé obdobia i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ak sa úročí zloženým úrokovaním raz ročne, a vypočítajte spojité (ročné) úrokové sadzby R_i na jednotlivé obdobia i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ak sa úročí spojeným úrokovaním, pričom:

dlhopis	súčasná hodnota
D_1	$B_1 = 9,346 \text{ p. j.}$
D_2	$B_2 = 8,654 \text{ p. j.}$
D_3	$B_3 = 7,939 \text{ p. j.}$
D_4	$B_4 = 7,217 \text{ p. j.}$
D_5	$B_5 = 6,561 \text{ p. j.}$

Riešenie:

Vypočítajme najprv diskkrétne úrokové sadzby r_i . Zo vzťahu na výpočet súčasnej hodnoty dlhopisu D_i s dobou splatnosti i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$B_i = \frac{F}{(1 + r_i)^i}$$

dostávame:

$$r_i = \left(\frac{F}{B_i} \right)^{\frac{1}{i}} - 1$$

Preto:

$$r_1 \doteq 0,07; r_2 \doteq 0,075; r_3 \doteq 0,08; r_4 \doteq 0,085; r_5 \doteq 0,088$$

Poznámka:

Môžeme si všimnúť, že čím má dlhopis dlhšiu maturitu (dobu splatnosti), tým vyššia je úroková sadzba.

Vypočítajme teraz spojité úrokové sadzby R_i . Zo vzťahu na výpočet súčasnej hodnoty dlhopisu D_i s dobou splatnosti i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$B_i = Fe^{-iR_i}$$

dostávame:

$$R_i = \frac{\ln F - \ln B_i}{i}$$

Preto:

$$R_1 \doteq 0,068; R_2 \doteq 0,072; R_3 \doteq 0,077; R_4 \doteq 0,082; R_5 \doteq 0,084$$

Poznámka:

Aj pre spojité úrokové sadzby pozorujeme, že čím má dlhopis dlhšiu maturitu, tým vyššia je úroková sadzba.

4. Uvažujte, že na trhu s dlhopismi z predchádzajúcej úlohy sa nachádza kupónový dlhopis D s nominálnou hodnotou $G = 1000$ p.j. a maturitou 5 rokov, ktorý vypláca ročný kupón vo výške 8 % z nominálu. Aká je jeho súčasná hodnota B ?

Riešenie:

Na výpočet súčasnej hodnoty dlhopisu D môžeme použiť vzťah:

$$B = \sum_{i=1}^5 \frac{0,08G}{(1+r_i)^i} + \frac{G}{(1+r_5)^5}$$

a vypočítané hodnoty diskretných úrokových sadzieb r_i na obdobie i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$, z predchádzajúcej úlohy, alebo vzťah:

$$B = \sum_{i=1}^5 0,08Ge^{-iR_i} + Ge^{-5R_5}$$

a vypočítané hodnoty spojitých úrokových sadzieb R_i na obdobie i rokov, kde $i = 1, 2, 3, 4, 5$, z predchádzajúcej úlohy.

Ak vo výpočte použijeme približné hodnoty úrokových sadzieb, dostaneme diskretným úrokováním:

$$\sum_{i=1}^5 \frac{80 \text{ p.j.}}{(1 + r_i)^i} + \frac{1000 \text{ p.j.}}{(1 + r_5)^5} \doteq 973,63 \text{ p.j.}$$

a spojitým úrokováním:

$$\sum_{i=1}^5 (80 \text{ p.j.})e^{-iR_i} + (1000 \text{ p.j.})e^{-5R_5} \doteq 974,75 \text{ p.j.}$$

Problematické je, že tieto čísla sa navzájom líšia (dokonca o viac ako 1 p.j.), pričom súčasná hodnota dlhopisu D musí byť jediné číslo (podľa možnosti) vyjadrené čo najpresnejšie a nezávisle na tom, aké úrokovanie bolo použité.

Preto miesto výpočtu s približnými hodnotami, môžeme vo výpočte využiť presné hodnoty, ktoré poznáme:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^5 \frac{80 \text{ p.j.}}{(1 + r_i)^i} + \frac{1000 \text{ p.j.}}{(1 + r_5)^5} = \sum_{i=1}^5 \frac{8F}{(1 + r_i)^i} + \frac{100F}{(1 + r_5)^5} \\ &= 8 \sum_{i=1}^5 B_i + 100B_5 = 973,836 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^5 (80 \text{ p.j.})e^{-iR_i} + (1000 \text{ p.j.})e^{-5R_5} \\ &= \sum_{i=1}^5 8Fe^{-iR_i} + 100Fe^{-5R_5} = 8 \sum_{i=1}^5 B_i + 100B_5 \\ &= 973,836 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Vidíme, že takto sme vypočítali súčasnú hodnotu dlhopisu D úplne presne a nezávisle na tom, či sa úrokuje diskretné alebo spojito.

5. Vypočítajte spojité úrokové sadzby na trhu s nasledujúcimi dlhopismi:

dlhopis	súčasná hodnota (cena)	splatnosť	ročný kupón	nominálna hodnota
<i>A</i>	100 p.j.	2 roky	5 %	100 p.j.
<i>B</i>	93 p.j.	1 rok	0	100 p.j.
<i>C</i>	89 p.j.	3 roky	0	100 p.j.

Riešenie:

Z tretieho riadku tabuľky zistíme spojitú úrokovú sadzbu na obdobie jedného roka. Pretože ide o bezkupónový dlhopis s maturitou 1 rok, tak jeho súčasnú hodnotu dostaneme zo vzťahu:

$$93 \text{ p.j.} = (100 \text{ p.j.})e^{-R_1}, \quad (1)$$

kde R_1 označuje spojitú úrokovú sadzbu na obdobie 1 rok. Odtiaľ získame:

$$R_1 = \ln\left(\frac{100 \text{ p.j.}}{93 \text{ p.j.}}\right) = \ln\left(\frac{100}{93}\right) \doteq 0,0726$$

Zo štvrtého riadku tabuľky zistíme spojitú úrokovú sadzbu na obdobie troch rokov. Pretože ide o bezkupónový dlhopis s maturitou 3 roky, tak jeho súčasnú hodnotu dostaneme zo vzťahu:

$$89 \text{ p.j.} = (100 \text{ p.j.})e^{-3R_3}, \quad (2)$$

kde R_3 označuje spojitú úrokovú sadzbu na obdobie 3 rokov. Odtiaľ máme:

$$R_3 = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{100 \text{ p.j.}}{89 \text{ p.j.}}\right) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{100}{89}\right) \doteq 0,0388$$

Na výpočet spojitej úrokovej sadzby R_2 na obdobie dvoch rokov potrebujeme druhý riadok tabuľky a vypočítanú hodnotu R_1 , resp. vzťah (1). Keďže ide o kupónový dlhopis s maturitou 2 roky, jeho súčasnú hodnotu dostaneme z nasledujúceho vzťahu:

$$100 \text{ p.j.} = (5 \text{ p.j.})e^{-R_1} + (105 \text{ p.j.})e^{-2R_2} \quad (3)$$

Z (3) dostávame:

$$e^{-2R_2} = \frac{(100 - 5e^{-R_1}) \text{ p.j.}}{105 \text{ p.j.}} = \frac{100 - 5e^{-R_1}}{105}$$

Z toho:

$$R_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{105}{100 - 5e^{-R_1}} \right) \quad (4)$$

Z (1) máme:

$$e^{-R_1} = \frac{93 \text{ p.j.}}{100 \text{ p.j.}} = \frac{93}{100} \quad (5)$$

Dosadením (5) do (4) získame:

$$R_2 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{105}{100 - 5 \frac{93}{100}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{10500}{9535} \right) \doteq 0,0482$$

6. Uvažujte, že na trhu s dlhopismi A, B, C z predchádzajúcej úlohy sa nachádza bezkupónový dlhopis D s nominálnou hodnotou 100 p.j. a dvojročnou maturitou, ktorého cena je 92 p.j. Ukážte, že dlhopis D nie je cenovo kompatibilný s ostatnými dlhopismi na tomto trhu a teda je možné vytvoriť arbitrážnu príležitosť. Nájdite ju a popíšte, ako by na nej mohol investor zbohatnúť. Aká by mala byť správna (taká, aby nevznikla arbitrážna príležitosť) súčasná hodnota (cena) dlhopisu D ?

Riešenie:

Dlhopis D možno „vyskladať“ ako portfólio pozostávajúce z ostatných dlhopisov na trhu. Keďže má dvojročnú maturitu, investor nemusí do portfólia zahrnúť dlhopis C a v čase 0 (dnes) môže zostrojiť portfólio nasledujúcim spôsobom:

- kúpi a kusov dlhopisu A
- predá/emituje b kusov dlhopisu B

Poznámka:

Za účelom vytvorenia takéhoto portfólia nie je nutné vyžadovať, aby boli čísla a, b celé. Stačí, aby $a, b \in \mathbb{R}$ boli kladné. Príslušné celé počty kusov sa dajú získať dodatočne pre násobením vhodnou konštantou.

Portfólio má v čase 0 cenu $(100a - 93b)$ p.j. Finančné toky plynúce z držby portfólia v nasledujúcich rokoch sa nachádzajú v tabuľke:

dlhopis\rok	1	2
A	$5a \text{ p.j.}$	$105a \text{ p.j.}$
B	$-100b \text{ p.j.}$	0 p.j.
cash flow	0 p.j.	100 p.j.

Finančné toky plynúce z držby portfólia musia byť v každom roku rovnaké ako toky plynúce z držby dlhopisu D (posledný riadok tabuľky). Aby teda investor dosiahol to, že portfólio „robí“ to isté, čo dlhopis D , musí byť splnené:

$$\begin{aligned}(5a - 100b) \text{ p.j.} &= 0 \text{ p.j.} \\ 105a \text{ p.j.} &= 100 \text{ p.j.}\end{aligned}$$

Z toho získame:

$$a = \frac{100}{105}, b = \frac{5}{105}.$$

Skutočne potom existuje možnosť arbitráže. Za cieľom jej dosiahnutia stačí v čase 0 predat' ľubovoľný počet (resp. taký, aký okolnosti dovoľujú) d kusov dlhopisu D , ktorý sa na trhu predáva za 92 p.j. a kúpiť d kusov replikačného portfólia, tj. kúpiť $\frac{100}{105}d$ kusov dlhopisu A a predat' $\frac{5}{105}d$ kusov dlhopisu B . Nech napr. $d = 105$ (aby sme dostali celé čísla), potom bilancia je v nasledujúcej tabuľke:

dlhopis\rok	0	1	2
A	-10000 p.j.	500 p.j.	10500 p.j.
B	465 p.j.	-500 p.j.	0 p.j.
D	9660 p.j.	0 p.j.	-10500 p.j.
cash flow	125 p.j.	0 p.j.	0 p.j.

Vidíme, že predchádzajúca stratégia umožňuje investorovi v čase 0 nadobudnúť kladný výnos 125 p.j. , pričom v nasledujúcich rokoch sa finančné toky vynulujú. Udeje sa tak bez toho, aby investor v čase 0 čokoľvek investoval zo svojho a navyše bez rizika možných budúcich strát.

Aká by teda mala byť správna (taká, aby nevznikla arbitrážna príležitosť) cena dlhopisu D ? Aby nevznikla arbitráž, zrejme musí byť rovná cene replikačného portfólia, tj. hodnote $(100a - 93b)$ p.j. s vypočítanými a, b . Konkrétne: $\left(\frac{10000}{105} - \frac{465}{105}\right) \text{ p.j.} = \frac{9535}{105} \text{ p.j.} \doteq 90,81 \text{ p.j.}$

Poznámka:

Úrokové sadzby musia zohľadňovať princíp oceňovania bez arbitráže, tzn. súčasnú hodnotu dlhopisu D (označme ju B_D) je možné vypočítať pomocou získanej úrokovej sadzy R_2 .

Overme to. Pre súčasnú hodnotu dlhopisu D platí:

$$B_D = (100 \text{ p.j.})e^{-2R_2} \quad (6)$$

Dosadením (5) do (4) a následným dosadením do (6) získame:

$$B_D = (100 \text{ p.j.}) \left(\frac{100 - 5 \frac{93}{100}}{105} \right) = \frac{9535}{105} \text{ p.j.} \doteq 90,81 \text{ p.j.}$$

7. Uvažujte, že na trhu s dlhopismi A, B, C sa nachádza kupónový dlhopis E s nominálnou hodnotou 100 p.j. a trojročnou maturitou, ktorý vypláca 3 %-ný ročný kupón a ktorého cena je 95 p.j. Ukážte, že dlhopis E nie je cenovo kompatibilný s ostatnými dlhopismi na tomto trhu a teda je možné vytvoriť arbitrážnu príležitosť. Nájdite ju a popíšte, ako by na nej mohol investor zbohatnúť. Aká by mala byť správna (taká, aby nevznikla arbitrážna príležitosť) súčasná hodnota (cena) dlhopisu E ?

Riešenie:

Dlhopis E možno „vyskladať“ ako portfólio pozostávajúce z ostatných dlhopisov na trhu. V čase 0 (dnes) môže investor zostrojiť toto portfólio nasledujúcim spôsobom:

- kúpi a kusov dlhopisu A
- kúpi b kusov dlhopisu B
- kúpi c kusov dlhopisu C

Takéto portfólio má v čase 0 cenu $(100a + 93b + 89c)$ p.j. Finančné toky plynúce z držby portfólia v nasledujúcich rokoch sa nachádzajú v tabuľke:

dlhopis\rok	1	2	3
<i>A</i>	$5a$ p.j.	$105a$ p.j.	0 p.j.
<i>B</i>	$100b$ p.j.	0 p.j.	0 p.j.
<i>C</i>	0 p.j.	0 p.j.	$100c$ p.j.
cash flow	3 p.j.	3 p.j.	103 p.j.

Finančné toky plynúce z držby portfólia musia byť v každom roku rovnaké ako toky plynúce z držby dlhopisu *E* (posledný riadok tabuľky). Aby teda investor dosiahol to, že portfólio „robí“ to isté, čo dlhopis *E*, musí byť splnené:

$$(5a + 100b) \text{ p.j.} = 3 \text{ p.j.}$$

$$105a \text{ p.j.} = 3 \text{ p.j.}$$

$$100c \text{ p.j.} = 103 \text{ p.j.}$$

Z toho ziskame:

$$a = \frac{1}{35}, b = \frac{1}{35}, c = \frac{103}{100}.$$

Skutočne potom existuje možnosť arbitráže. Za cieľom jej dosiahnutia stačí v čase 0 kúpiť ľubovoľný počet (resp. taký, aký okolnosti dovoľujú) e kusov dlhopisu *E*, ktorý sa na trhu predáva za 95 p.j. a predat' e kusov replikačného portfólia, tj. predat' $\frac{1}{35}e$ kusov dlhopisu *A*, $\frac{1}{35}e$ kusov dlhopisu *B* a $\frac{103}{100}e$ kusov dlhopisu *C*. Nech napr. $e = 700$ (aby sme dostali celé čísla), potom bilancia je v nasledujúcej tabuľke:

dlhopis\rok	0	1	2	3
<i>A</i>	2000 p.j.	-100 p.j.	-2100 p.j.	0 p.j.
<i>B</i>	1860 p.j.	-2000 p.j.	0 p.j.	0 p.j.
<i>C</i>	64169 p.j.	0 p.j.	0 p.j.	-72100 p.j.
<i>E</i>	-66500 p.j.	2100 p.j.	2100 p.j.	72100 p.j.
cash flow	1529 p.j.	0 p.j.	0 p.j.	0 p.j.

Vidíme, že predchádzajúca stratégia umožňuje investorovi v čase 0 nadobudnúť kladný výnos 1529 p.j., pričom v nasledujúcich rokoch sa finančné toky vynulujú. Udeje sa tak bez toho, aby investor v čase 0 čokoľvek investoval zo svojho a navyše touto stratégiou eliminuje riziko možných budúcich strát.

Aká by teda mala byť správna (taká, aby nevznikla arbitrážna príležitosť) cena dlhopisu E ? Aby nevznikla arbitráž, musí byť rovná cene replikačného portfólia, tj. hodnote $(100a + 93b + 89c)$ p.j. s vypočítanými a, b, c . Konkrétne: $\left(\frac{100}{35} + \frac{93}{35} + \frac{9167}{100}\right) \text{ p.j.} = \frac{68029}{700} \text{ p.j.} \doteq 97,18 \text{ p.j.}$

Poznámka:

Úrokové sadzby musia zohľadňovať princíp oceňovania bez arbitráže, tzn. súčasnú hodnotu dlhopisu E (označme ju B_E) je možné vypočítať pomocou úrokových sadzieb R_1, R_2, R_3 získaných v 5.úlohe.

Overme to. Pre súčasnú hodnotu dlhopisu E platí:

$$B_E = (3 \text{ p.j.})e^{-R_1} + (3 \text{ p.j.})e^{-2R_2} + (103 \text{ p.j.})e^{-3R_3} \quad (7)$$

Dosadením za R_1, R_2, R_3 do (7) získame:

$$\begin{aligned} B_E &= (3 \text{ p.j.}) \frac{93}{100} + (3 \text{ p.j.}) \left(\frac{100 - 5 \frac{93}{100}}{105} \right) + (103 \text{ p.j.}) \frac{89}{100} \\ &= \left(\frac{1953}{700} + \frac{1907}{700} + \frac{64169}{700} \right) \text{ p.j.} = \frac{68029}{700} \text{ p.j.} \doteq 97,18 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

8. Uvažujte trh s nasledujúcimi dlhopismi:

dlhopis	splatnosť	ročný kupón	cena	nominál F
D_1	3 mesiace	0	$B_1 = 99,8 \text{ p.j.}$	100 p.j.
D_2	6 mesiacov	0	$B_2 = 99,1 \text{ p.j.}$	100 p.j.
D_3	12 mesiacov	0	$B_3 = 97,7 \text{ p.j.}$	100 p.j.
D_4	18 mesiacov	8 %	$B_4 = 106 \text{ p.j.}$	100 p.j.
D_5	24 mesiacov	12 %	$B_5 = 112,3 \text{ p.j.}$	100 p.j.
D_6	33 mesiacov	10 %	$B_6 = 108,4 \text{ p.j.}$	100 p.j.

kde pri kupónových dlhopisoch je kupón vyplácaný polročne. Zistite, aká je časová štruktúra spojitých úrokových sadzieb, tj. vypočítajte spojité úrokové sadzby $R_{0,25}, R_{0,5}, R_1, R_{1,5}, R_2, R_{2,75}$ pre jednotlivé časové obdobia.

Riešenie:

Spojité úrokové sadzby na jednotlivé obdobia budeme počítat' postupne od sadzby na obdobie 3 mesiacov až po sadzbu na 33 mesiacov. Úrokovú sadzbu na obdobie troch mesiacov dostaneme zo súčasnej a nominálnej hodnoty dlhopisu D_1 . Máme:

$$99,8 \text{ p.j.} = B_1 = Fe^{-\frac{1}{4}R_{0,25}} = (100 \text{ p.j.})e^{-\frac{1}{4}R_{0,25}}$$

Z toho:

$$e^{-\frac{1}{4}R_{0,25}} = \frac{99,8}{100} \quad (8)$$

$$R_{0,25} = 4 \ln\left(\frac{100}{99,8}\right) \doteq 0,008$$

Spojitá úroková miera na obdobie 3 mesiacov je približne 0,8 %.

Úrokovú sadzbu na obdobie polroka dostaneme zo súčasnej a nominálnej hodnoty dlhopisu D_2 . Máme:

$$99,1 \text{ p.j.} = B_2 = Fe^{-\frac{1}{2}R_{0,5}} = (100 \text{ p.j.})e^{-\frac{1}{2}R_{0,5}}$$

Z toho:

$$e^{-\frac{1}{2}R_{0,5}} = \frac{99,1}{100} \quad (9)$$

$$R_{0,5} = 2 \ln\left(\frac{100}{99,1}\right) \doteq 0,018$$

Spojitá úroková miera na obdobie 6 mesiacov je približne 1,8 %.

Úrokovú sadzbu na obdobie jedného roka dostaneme zo súčasnej a nominálnej hodnoty dlhopisu D_3 . Máme:

$$97,7 \text{ p.j.} = B_3 = Fe^{-R_1} = (100 \text{ p.j.})e^{-R_1}$$

Z toho:

$$e^{-R_1} = \frac{97,7}{100} \quad (10)$$

$$R_1 = \ln\left(\frac{100}{97,7}\right) \doteq 0,023$$

Spojité úroková miera na obdobie 12 mesiacov je približne 2,3 %.

Úrokovú sadzbu na obdobie jedného a pol roka dostaneme zo súčasnej a nominálnej hodnoty dlhopisu D_4 . Dlhopis D_4 však vypláca ročný kupón vo výške 8 % z nominálu každého polroka, tzn. kupón vo výške 4 p.j. každého polroka, s čím musíme pri výpočte kalkulovať. Máme:

$$\begin{aligned} 106 \text{ p.j.} &= B_4 = 0,04F e^{-\frac{1}{2}R_{0,5}} + 0,04F e^{-R_1} + 1,04F e^{-\frac{3}{2}R_{1,5}} \\ &= (4 \text{ p.j.}) \left(e^{-\frac{1}{2}R_{0,5}} + e^{-R_1} \right) + (104 \text{ p.j.}) e^{-\frac{3}{2}R_{1,5}} \end{aligned} \quad (11)$$

Dosadením (9) a (10) do (11) získame:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{3}{2}R_{1,5}} &= \frac{106 - 4 \left(\frac{99,1}{100} + \frac{97,7}{100} \right)}{104} = \frac{6133}{6500} \\ R_{1,5} &= \frac{2}{3} \ln\left(\frac{6500}{6133}\right) \doteq 0,039 \end{aligned} \quad (12)$$

Spojité úroková miera na obdobie 18 mesiacov je približne 3,9 %.

Úrokovú sadzbu na obdobie dvoch rokov dostaneme zo súčasnej a nominálnej hodnoty dlhopisu D_5 . Dlhopis D_5 vypláca ročný kupón vo výške 12 % z nominálu každého polroka, tzn. kupón vo výške 6 p.j. každého polroka. Máme:

$$\begin{aligned} 112,3 \text{ p.j.} &= B_5 \\ &= 0,06F e^{-\frac{1}{2}R_{0,5}} + 0,06F e^{-R_1} + 0,06F e^{-\frac{3}{2}R_{1,5}} + 1,06F e^{-2R_2} \\ &= \left(6 \left(e^{-\frac{1}{2}R_{0,5}} + e^{-R_1} + e^{-\frac{3}{2}R_{1,5}} \right) + 106 e^{-2R_2} \right) \text{ p.j.} \end{aligned} \quad (13)$$

Dosadením (9), (10) a (12) do (13) získame:

$$\begin{aligned} e^{-2R_2} &= \frac{112,3 - 6 \left(\frac{99,1}{100} + \frac{97,7}{100} + \frac{6133}{6500} \right)}{106} = \frac{3082}{3445} \\ R_2 &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3445}{3082}\right) \doteq 0,056 \end{aligned} \quad (14)$$

Spojité úroková miera na obdobie 24 mesiacov je približne 5,6 %.

Ak chceme vypočítať úrokovú sadzbu na obdobie 33 mesiacov, potrebujeme odhadnúť úrokové sadzby na obdobia 9 mesiacov, 15 mesiacov, 21 mesiacov a 27 mesiacov, pretože kupónový dlhopis D_6 vypláca kúpon každého polroka a to práve v termínoch 3, 9, 15, 21, 27 a 33 mesiacov. Máme:

$$\begin{aligned}
 108,4 \text{ p.j.} &= B_6 \\
 &= 0,05Fe^{-\frac{1}{4}R_{0,25}} + 0,05Fe^{-\frac{3}{4}R_{0,75}} + 0,05Fe^{-\frac{5}{4}R_{1,25}} \\
 &\quad + 0,05Fe^{-\frac{7}{4}R_{1,75}} + 0,05Fe^{-\frac{9}{4}R_{2,25}} + 1,05Fe^{-\frac{11}{4}R_{2,75}} \\
 &= (5 \text{ p.j.}) \left(e^{-\frac{1}{4}R_{0,25}} + e^{-\frac{3}{4}R_{0,75}} + e^{-\frac{5}{4}R_{1,25}} + e^{-\frac{7}{4}R_{1,75}} \right. \\
 &\quad \left. + e^{-\frac{9}{4}R_{2,25}} \right) + (105 \text{ p.j.})e^{-\frac{11}{4}R_{2,75}} \tag{15}
 \end{aligned}$$

Z úrokových sadzieb vystupujúcich vo vzťahu (15) však poznáme iba $R_{0,25}$. Ostatné odhadneme:

$$R_{0,75} = \frac{R_{0,5} + R_1}{2} \doteq 0,021 \tag{16}$$

$$R_{1,25} = \frac{R_1 + R_{1,5}}{2} \doteq 0,031 \tag{17}$$

$$R_{1,75} = \frac{R_{1,5} + R_2}{2} \doteq 0,047 \tag{18}$$

$$R_{2,25} = \frac{2R_2 + R_{2,75}}{3} \tag{19}$$

Dosadením (8), (16), (17), (18) a (19) do (15) dostaneme rovnicu:

$$\begin{aligned}
 108,4 - 5 \left(e^{-\frac{1}{4}R_{0,25}} + e^{-\frac{3}{4}R_{0,75}} + e^{-\frac{5}{4}R_{1,25}} + e^{-\frac{7}{4}R_{1,75}} \right) \\
 = \left(5e^{-\frac{3}{2}R_2} \right) \left(e^{-\frac{3}{4}R_{2,75}} \right) + 105e^{-\frac{11}{4}R_{2,75}},
 \end{aligned}$$

ktorú treba počítať numericky. Ak to urobíme, zistíme, že približná hodnota spojitej úrokovej sadzby na obdobie 33 mesiacov je:

$$R_{2,75} \doteq 0,078$$

Zo vzťahu (19) môžeme navyše odhadnúť $R_{2,25}$:

$$R_{2,25} \doteq 0,063$$

Poznámka:

Opäť si môžeme všimnúť, že krivka aproximujúca časovú štruktúru úrokových sadzieb má rastúci charakter, inými slovami čím je úroková sadzba na dlhšie obdobie, tým je vyššia.

9. Majme trh s nasledujúcimi dlhopismi:

dlhopis	súčasná hodnota (cena)	splatnosť	ročný kupón	nominálna hodnota
<i>A</i>	97 p.j.	1 rok	0	100 p.j.
<i>B</i>	93 p.j.	2 roky	0	100 p.j.
<i>C</i>	89 p.j.	3 roky	0	100 p.j.

Uvažujte, že na tomto trhu sa nachádza kupónový dlhopis *D* s nominálnou hodnotou 100 p.j. a trojročnou maturitou, ktorý každý rok vypláca ročný kupón vo výške 4 % z nominálu a ktorého cena je 100 p.j. Ukážte, že dlhopis *D* nie je cenovo kompatibilný s ostatnými dlhopismi na tomto trhu a teda je možné vytvoriť arbitrážnu príležitosť. Nájdite ju a popíšte, ako by na nej mohol investor zbohatnúť. Aká by mala byť správna (taká, aby nevznikla arbitrážna príležitosť) súčasná hodnota (cena) dlhopisu *D*?

Pomôcka:

Pomôžte si 6. úlohou, resp. 7. úlohou.

Komentár:

Úloha je za 3 prémiové body, ktoré získajú prví pätnásť riešitelia, ktorí úlohu celú správne vyriešia. Riešenia **zasielajte výhradne** z vášho **univerzitného webmailu** alebo **stuba-gmailu** na adresu: michal.zakopcan@stuba.sk do piatku 5.3.2021, do 13:00, vo formáte pdf, jpg, jpeg alebo png. Nezabudnite na označenie študenta, tzn. **meno, priezvisko - uveďte čitateľne na každej strane riešenia spolu s vašim podpisom**. Každý študent môže zaslať len jedno svoje riešenie.

V prípade, že prvých pätnásť správnych riešení bude odovzdaných skôr, než v piatok 5.3.2021 o 13:00, hromadnou správou prostredníctvom AIS budete upozornení, aby ste žiadne ďalšie riešenia neposielali a termínom ukončenia zasielania riešení sa stane termín odovzdania v poradí pätnásteho správneho riešenia.