

ÚROKOVANIE

ZLOŽENÉ ÚROKOVANIE S m KONVERZIAMI ROČNE

1. Určte budúcu hodnotu kapitálu 500 peňažných jednotiek (ďalej p.j.) úročenom štvrťročne po dobu 5 rokov pri nominálnej (ročnej) úrokovej sadzbe 0,06.

Riešenie:

$$K_0 = 500 \text{ p.j.}, n = 5, m = 4, r = 0,06, K_n = ? \text{ p.j.}$$

Máme:

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = (500 \text{ p.j.}) \left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^{20} \\ &= (500 \text{ p.j.})(1,015)^{20} \doteq 673,43 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Budúca hodnota kapitálu je po piatich rokoch približne 673,43 p.j.

2. Vypočítajte, či je výhodnejšie vložiť vklad 5000 p.j. na účet s $r = 0,04$ pri ročnom alebo polročnom úrokovaní na obdobie 10 rokov.

Riešenie:

$$\begin{aligned} K_0 &= 5000 \text{ p.j.}, n = 10, m = 1, \bar{m} = 2, r = 0,04, \\ K_n &= ? \text{ p.j.}, \bar{K}_n = ? \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Máme:

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = (5000 \text{ p.j.})(1 + 0,04)^{10} \\ &= (5000 \text{ p.j.})(1,04)^{10} \doteq 7401,22 \text{ p.j.} \\ \bar{K}_n &= K_0 \left(1 + \frac{r}{\bar{m}}\right)^{\bar{m}n} = (5000 \text{ p.j.}) \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{20} \\ &= (5000 \text{ p.j.})(1,02)^{20} \doteq 7429,74 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Porovnaním K_n a $\bar{K}_n$ ($\bar{K}_n > K_n$) zistíme, že výhodnejšie je vložiť vklad na účet pri polročnom úrokovaní.

3. Určte nominálnu úrokovú sadzbu, pri ktorej vzrastie kapitál 150 p.j. pri mesačnom úrokovaní za 5 rokov na 200 p.j.

Riešenie:

$$\boxed{K_0 = 150 \text{ p.j.}, n = 5, m = 12, K_n = 200 \text{ p.j.}, r = ?}$$

Zo vzťahu $K_n = K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$ dostaneme:

$$\frac{K_n}{K_0} = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn}$$

$$\left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{mn}} = 1 + \frac{r}{m}$$

$$r = m \left(\left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1 \right)$$

Z toho máme:

$$r = 12 \left(\left(\frac{200 \text{ p.j.}}{150 \text{ p.j.}} \right)^{\frac{1}{60}} - 1 \right) = 12 \left(\left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{60}} - 1 \right) \doteq 0,0577$$

Deje sa tak pri nominálnej úrokovej sadzbe približne 0,0577.

4. Osoba V požičala osobe D 500 p.j. pri nominálnej (ročnej) úrokovej sadzbe $r = 0,08$ a polročnom úrokovaní na dobu 5 rokov? Neskôr si to osoba D rozmyslela a rozhodla sa dlh splatiť už po 2,5 roku. Osoba V súhlasí avšak len pri zmene úrokovej sadzby na $\bar{r} = 0,06$. Koľko osoba D zaplatí osobe V po 2,5 roku?

Riešenie:

Najprv potrebujeme zistiť hodnotu dlhu v čase jeho pôvodnej splatnosti (tzn. o 5 rokov) pri pôvodných podmienkach pôžičky a následne túto hodnotu odúročiť (diskontovať) o 2,5 roka späť. Označme K_n budúcu hodnotu dlhu o 5 rokov pri pôvodných podmienkach pôžičky, tj. pri $r = 0,08$, $m = 2$, $n = 5$ a $K_0 = 500 \text{ p.j.}$ Potom:

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn} = (500 \text{ p.j.}) \left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^{10} = (500 \text{ p.j.})(1,04)^{10}$$

Označme $\bar{K}_{2,5}$ hodnotu dlhu po odúročení o 2,5 roku pri nových podmienkach pôžičky, tj. pri $\bar{r} = 0,06$, $m = 2$, $\bar{n} = 2,5$ a $K_n = 500(1,04)^{10}$ p.j. Potom:

$$\bar{K}_{2,5} = K_n \left(1 + \frac{\bar{r}}{m}\right)^{-m\bar{n}} = (500 \text{ p.j.})(1,04)^{10}(1,03)^{-5} \doteq 638,44 \text{ p.j.}$$

Osoba D zaplatí osobe V po 2,5 roku sumu približne 638,44 p.j.

5. Uvažujte rovnaký dlh a podmienky jeho uhradenia ako zo začiatku predchádzajúcej úlohy s tým rozdielom, že osoba V súhlasí s uhradením dlžoby už po 2,5 roku avšak len pri zmene úrokovej sadzby na $\bar{r} = 0,1$. Koľko osoba D zaplatí osobe V po 2,5 roku?

Riešenie:

Využijeme, že poznáme budúcu hodnotu dlhu K_n :

$$K_n = 500(1,04)^{10} \text{ p.j.}$$

a odúročením dopočítame jeho hodnotu po 2,5 roku:

$$\bar{K}_{2,5} = (500 \text{ p.j.})(1,04)^{10}(1,05)^{-5} \doteq 579,91 \text{ p.j.}$$

Osoba D zaplatí osobe V po 2,5 roku sumu približne 579,91 p.j.

SPOJITÉ ÚROKOVANIE

6. Nájdite budúcu hodnotu kapitálu 1000 p.j. uloženom v banke pri 3 % spojitej úrokovej miere na dobu 3 roky a 2 mesiace.

Riešenie:

$$K_0 = 1000 \text{ p.j.}, n = \frac{38}{12}, p = 3 \%, K_n = ? \text{ p.j.}$$

Máme:

$$r = \frac{p}{100} = 0,03.$$

Zo vzťahu $K_n = K_0 e^{rn}$ dostaneme:

$K_n = (1000 \text{ p.j.})e^{0,03\frac{19}{6}} = 1000 e^{0,095} \text{ p.j.} \doteq 1099,66 \text{ p.j.}$
Budúca hodnota kapitálu je približne 1099,66 p.j.

7. Kapitál na účte v banke sa za 5 rokov zhodnotil pri 3 % spojitej úrokovej miere na 30000 p.j. Aká bola hodnota kapitálu pred 5 rokmi?

Riešenie:

$$\boxed{K_n = 30000 \text{ p.j.}, p = 3 \%, n = 5, K_0 = ? \text{ p.j.}}$$

Máme:

$$r = \frac{p}{100} = 0,03.$$

Zo vzťahu $K_n = K_0 e^{rn}$ dostaneme:

$$K_0 = K_n e^{-rn} = (30000 \text{ p.j.})e^{-0,03 \cdot 5} = 30000 e^{-0,15} \\ \doteq 25821,24 \text{ p.j.}$$

Hodnota kapitálu pred piatimi rokmi bola približne 25821,24 p.j.,

8. Za ako dlho vzrastie kapitál 625 p.j. úročený pri spojitej úrokovej sadzbe $r = \ln 1,2$ na 900 p.j.?

Riešenie:

$$\boxed{K_0 = 625 \text{ p.j.}, K_n = 900 \text{ p.j.}, r = \ln 1,2, n = ?}$$

Zo vzťahu $K_n = K_0 e^{rn}$ dostaneme:

$$\frac{K_n}{K_0} = e^{rn} \\ \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \ln e^{rn} \\ rn = \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right) \\ n = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$$

Z toho máme:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{900}{625}\right)}{\ln 1,2} = \frac{\ln\left(\frac{36}{25}\right)}{\ln 1,2} = \frac{\ln 1,44}{\ln 1,2} = \frac{\ln(1,2)^2}{\ln 1,2} = 2$$

Sú to presne dva roky.

9. Súčasná hodnota dvoch dlhov spolu je 40939 p.j. Prvý dlh vo výške 20000 p.j. je splatný za 2 roky. Druhý dlh vo výške 40000 p.j. je splatný za 4 roky. Určte spojitú úrokovú sadzbu, pri ktorej sú oba úročené.

Riešenie:

Platí:

$$40939 \text{ p.j.} = (20000 e^{-2r} + 40000 e^{-4r}) \text{ p.j.}$$

Označme $x = e^{-2r}$, potom získame:

$$40000x^2 + 20000x - 40939 = 0,$$

čo je obyčajná kvadratická rovnica. Vyriešme ju:

$$D = 4 \cdot 10^8 + (40939)16 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^4(173756)$$

Potom:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \cdot 10^4 \pm 200\sqrt{173756}}{8 \cdot 10^4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{173756}}{400}$$

Teda $x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{173756}}{400} < 0$ a $x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{173756}}{400} > 0$. Pretože $x = e^{-2r}$, tak uvažujeme len riešenie x_2 . Z toho potom dostávame:

$$e^{-2r} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{173756}}{400}$$

$$\ln e^{-2r} = \ln \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{173756}}{400} \right)$$

$$-2r = \ln \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{173756}}{400} \right)$$

$$r = -\frac{1}{2} \ln \left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{173756}}{400} \right) \doteq 0,1165$$

Spojité úrokové sadzby, ktorou sú oba dlhy úročené, je približne 0,1165, tzn. približne 11,65 % ročne.