

OCEŇOVANIE VYBRANÝCH DRUHOV OPCÍÍ

1. Uvažujte typ binárnej opcie bet-or-nothing (v ďalšom BON) na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $\hat{T} = \frac{1}{2}$ roka a realizačnou cenou $K = 21$ p.j., ktorá vypláca $B = K = 21$ p.j. a vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom jednoduchom binárnom strome:

$$\begin{array}{c}
 S_{up} = 24 \\
 \nearrow \\
 S_{now} = 20 \\
 \searrow \\
 S_{down} = 18
 \end{array}$$

Nech bezriziková (ročná) úroková sadzba $r = 0,02$ je konštantná počas obdobia $\hat{T}$. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu kúpnej aj predajnej opcie tohto typu.

Riešenie:

Označme hodnoty call opcie ako B_{now}^C v čase 0, resp. B_{up}^C a B_{down}^C v čase $\hat{T}$ a hodnoty put opcie B_{now}^P v čase 0, resp. B_{up}^P a B_{down}^P v čase $\hat{T}$. Potom: $B_{up}^C = 21, B_{down}^C = 0, B_{up}^P = 0$ a $B_{down}^P = 21$.

Vypočítajme riziko-neutrálnu pravdepodobnosť na strome, dostaneme: $q = \frac{S_{now}e^{r\hat{T}} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{20e^{0,01} - 18}{24 - 18} = \frac{10}{3}e^{0,01} - 3$ a $1 - q = 4 - \frac{10}{3}e^{0,01}$.

Hodnota call BON opcie bude:

$$\begin{aligned}
 B_{now}^C &= e^{-r\hat{T}}(qB_{up}^C + (1 - q)B_{down}^C) = e^{-0,01} \left(21 \left(\frac{10}{3}e^{0,01} - 3 \right) \right) \\
 &= e^{-0,01}(70e^{0,01} - 63) = 70 - 63e^{-0,01} \doteq 7,63 \text{ p.j.}
 \end{aligned}$$

Hodnota put BON opcie bude:

$$B_{now}^P = e^{-r\hat{T}}(qB_{up}^P + (1-q)B_{down}^P) = e^{-0,01} \left(21 \left(4 - \frac{10}{3} e^{0,01} \right) \right) \\ = e^{-0,01}(84 - 70e^{0,01}) = 84e^{-0,01} - 70 \doteq 13,16 \text{ p.j.}$$

Môžeme si všimnúť, že:

$$\mathbf{B}_{now}^C + \mathbf{B}_{now}^P = 70 - 63e^{-0,01} + 84e^{-0,01} - 70 = \\ = 21e^{-0,01} = Ke^{-r\hat{T}} = \mathbf{B}e^{-r\hat{T}}$$

Ide o put-call paritu pre binárne opcie typu BON.

2. Uvažujte typ binárnej opcie asset-or-nothing (v ďalšom AON) na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $\hat{T} = \frac{1}{2}$ roka a realizačnou cenou $K = 21$ p.j., pričom vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom jednoduchom binárnom strome:

$$\begin{array}{c} S_{up} = 24 \\ \nearrow \\ S_{now} = 20 \\ \searrow \\ S_{down} = 18 \end{array}$$

Nech bezriziková (ročná) úroková sadzba $r = 0,02$ je konštantná počas obdobia $\hat{T}$. Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu kúpnej aj predajnej opcie tohto typu.

Riešenie:

Označme hodnoty call opcie ako A_{now}^C v čase 0, resp. A_{up}^C a A_{down}^C v čase $\hat{T}$ a hodnoty put opcie A_{now}^P v čase 0, resp. A_{up}^P a A_{down}^P v čase $\hat{T}$. Potom: $A_{up}^C = 24$, $A_{down}^C = 0$, $A_{up}^P = 0$ a $A_{down}^P = 18$.

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť je rovnaká, ako v prvej úlohe, pretože ide o rovnaké podkladové aktívum, teda: $q = \frac{10}{3}e^{0,01} - 3$ a $1 - q = 4 - \frac{10}{3}e^{0,01}$.

Hodnota call AON opcie bude:

$$\begin{aligned} A_{now}^C &= e^{-r\hat{T}}(qA_{up}^C + (1-q)A_{down}^C) = e^{-0,01} \left(24 \left(\frac{10}{3} e^{0,01} - 3 \right) \right) \\ &= e^{-0,01}(80e^{0,01} - 72) = 80 - 72e^{-0,01} \doteq 8,72 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Hodnota put AON opcie bude:

$$\begin{aligned} A_{now}^P &= e^{-r\hat{T}}(qA_{up}^P + (1-q)A_{down}^P) = e^{-0,01} \left(18 \left(4 - \frac{10}{3} e^{0,01} \right) \right) \\ &= e^{-0,01}(72 - 60e^{0,01}) = 72e^{-0,01} - 60 \doteq 11,28 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že:

$$\begin{aligned} A_{now}^C + A_{now}^P &= 80 - 72e^{-0,01} + 72e^{-0,01} - 60 = \\ &= 20 = S_{now} \end{aligned}$$

Ide o put-call paritu pre binárne opcie typu AON.

3. Za podmienok z prvej úlohy, resp. druhej úlohy oceňte bez arbitráže európsku predajnú (put) opciu, tj. určte P_{now} . Za podmienok z prvej úlohy, resp. druhej úlohy oceňte bez arbitráže európsku kúpnu (call) opciu, tj. určte C_{now} . Na tomto príklade ukážte, že $C_{now} = A_{now}^C - B_{now}^C$ a $P_{now} = B_{now}^P - A_{now}^P$.

Riešenie:

Využijúc vypočítanú riziko-neutrálnu pravdepodobnosť $q = \frac{10}{3}e^{0,01} - 3$, resp. $1 - q = 4 - \frac{10}{3}e^{0,01}$, dostaneme:

$$\begin{aligned} P_{now} &= e^{-r\hat{T}}(q \max\{0, K - S_{up}\} + (1-q) \max\{0, K - S_{down}\}) \\ &= e^{-0,01} \left(\left(\frac{10}{3} e^{0,01} - 3 \right) \max\{0, 21 - 24\} \right. \\ &\quad \left. + \left(4 - \frac{10}{3} e^{0,01} \right) \max\{0, 21 - 18\} \right) \\ &= e^{-0,01}(12 - 10e^{0,01}) = 12e^{-0,01} - 10 \doteq 1,88 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{now} &= e^{-r\hat{T}}(q \max\{0, S_{up} - K\} + (1 - q) \max\{0, S_{down} - K\}) \\
&= e^{-0,01} \left(\left(\frac{10}{3} e^{0,01} - 3 \right) \max\{0, 24 - 21\} \right. \\
&\quad \left. + \left(4 - \frac{10}{3} e^{0,01} \right) \max\{0, 18 - 21\} \right) \\
&= e^{-0,01} (10e^{0,01} - 9) = 10 - 9e^{-0,01} \doteq 1,09 \text{ p.j.}
\end{aligned}$$

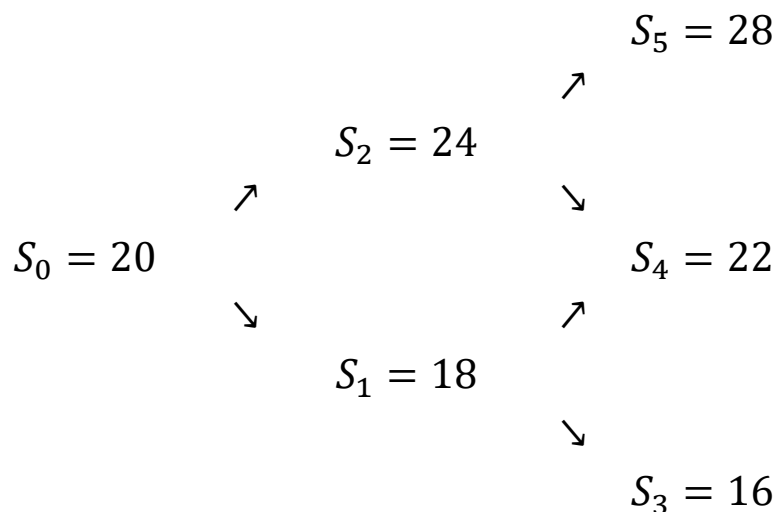
Skutočne potom:

$$\begin{aligned}
B_{now}^P - A_{now}^P &= 84e^{-0,01} - 70 - (72e^{-0,01} - 60) = 12e^{-0,01} - 10 \\
&= P_{now}
\end{aligned}$$

resp.:

$$\begin{aligned}
A_{now}^C - B_{now}^C &= 80 - 72e^{-0,01} - (70 - 63e^{-0,01}) = 10 - 9e^{-0,01} \\
&= C_{now}
\end{aligned}$$

4. Uvažujte plávajúcu (floating) dozadu hľadiacu (lookback) opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti $\hat{T} = 2$ časové jednotky (ďalej č.j.), pričom vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom dvojkrovovom binárnom strome:

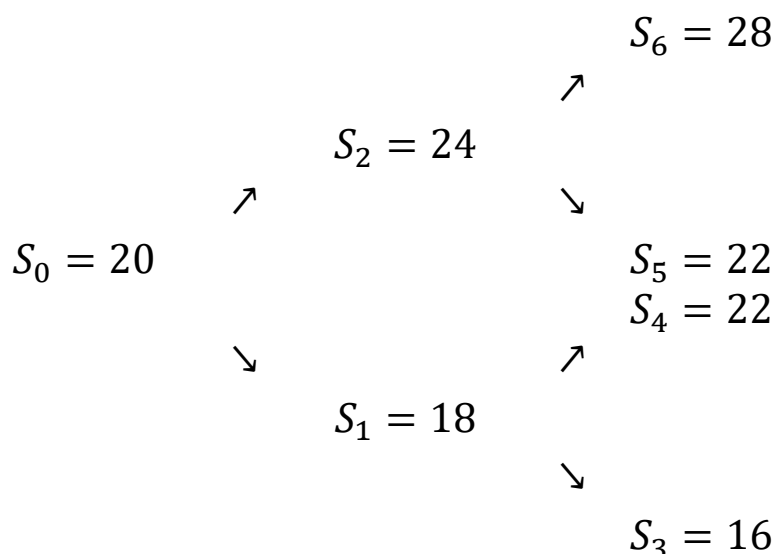


kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $T = 1$ č.j. a druhá zmena nastane o ďalších T č.j. neskôr. Čiže doba splatnosti opcie $\hat{T} = 2T$ (kde 2 je počet krokov na binárnom strome). Nech bezriziková (za 1 č.j.) úroková sadzba $r = 0$ je konštantná počas obdobia $\hat{T}$, tj. rovnaká

pre obe obdobia dĺžky T . Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu call opcie tohto typu a put opcie tohto typu.

Riešenie:

Pretože pri výpočte hodnôt opcie tohto typu pracujeme s maximálnou, resp. minimálnou hodnotou, ktorú dosiahne akcia počas životnosti opcie, je dobré zaznačiť binárny strom v druhom kroku so štyrmi uzlami namiesto troch, pričom dva z nich majú rovnakú hodnotu:



Je to preto, lebo maximálna, resp. minimálna hodnota akcie na ceste uzlami 0,2,5 je iná, než na ceste 0,1,4. Konkrétne a pre všetky cesty:

cesta	max. hodnota	min. hodnota
0, 2, 6	28	20
0, 2, 5	24	20
0, 1, 4	22	18
0, 1, 3	20	16

Hodnota opcie musí rešpektovať všetky možné cesty vývoja ceny podkladového aktíva a preto bude iná hodnota opcie v uzle 5 a iná v uzle 4. Označme hodnoty call opcie v koncových uzloch ako C_3, C_4, C_5, C_6 a hodnoty put opcie v koncových uzloch ako P_3, P_4, P_5, P_6 . Potom:

koncový uzol	call opcia	put opcia
6	$C_6 = 28 - 20 = 8$	$P_6 = 28 - 28 = 0$
5	$C_5 = 22 - 20 = 2$	$P_5 = 24 - 22 = 2$
4	$C_4 = 22 - 18 = 4$	$P_4 = 22 - 22 = 0$
3	$C_3 = 16 - 16 = 0$	$P_3 = 20 - 16 = 4$

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť q je na celom strome rovnaká, pretože $q = \frac{S_{now}e^{rT} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{S_{now} - (S_{now} - 2)}{(S_{now} + 4) - (S_{now} - 2)} = \frac{1}{3}$.

Vypočítajme hodnotu call opcie v uzle 1, tj. C_1 :

$$C_1 = e^{-rT}(qC_4 + (1 - q)C_3) = \frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}0 = \frac{4}{3}$$

Vypočítajme hodnotu put opcie v uzle 1, tj. P_1 :

$$P_1 = e^{-rT}(qP_4 + (1 - q)P_3) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}4 = \frac{8}{3}$$

Ďalej pre C_2 dostaneme:

$$C_2 = e^{-rT}(qC_6 + (1 - q)C_5) = \frac{1}{3}8 + \frac{2}{3}2 = 4$$

Pre P_2 máme:

$$P_2 = e^{-rT}(qP_6 + (1 - q)P_5) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}2 = \frac{4}{3}$$

S vypočítanými hodnotami C_1 a C_2 vieme dopočítať hodnotu call opcie C_0 v uzle 0:

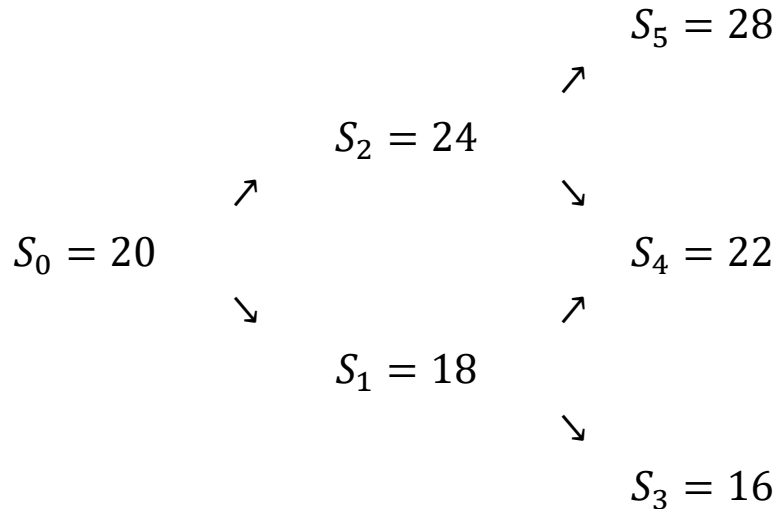
$$C_0 = e^{-rT}(qC_2 + (1 - q)C_1) = \frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}\frac{4}{3} = \frac{20}{9}$$

Podobne pre P_0 máme:

$$P_0 = e^{-rT}(qP_2 + (1 - q)P_1) = \frac{1}{3}\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\frac{8}{3} = \frac{20}{9}$$

Súčasná cena call opcie aj put opcie tohto typu je teda $\frac{20}{9}$ p.j.

5. Uvažujte fixnú dozadu hľadiacu opciu na akciu bez dividend s dobou splatnosti $\hat{T} = 2$ č.j., pričom vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom dvojkrovovom binárnom strome:



kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $T = 1$ č.j. a druhá zmena nastane o ďalších T č.j. neskôr. Čiže doba splatnosti opcie $\hat{T} = 2T$ (kde 2 je počet krokov na binárnom strome). Uvažujte realizačnú cenu $K = 21$ p.j. Nech bezriziková (za 1 č.j.) úroková sadzba $r = 0$ je konštantná počas obdobia $\hat{T}$, tj. rovnaká pre obe obdobia dĺžky T . Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu call opcie tohto typu a put opcie tohto typu.

Riešenie:

Pretože opäť pri výpočte hodnôt opcie tohto typu pracujeme s maximálnou, resp. minimálnou hodnotou, ktorú dosiahne akcia počas životnosti opcie, využijeme úpravu binárneho stromu a zoznam maximálnych, resp. minimálnych hodnôt akcie z riešenia predchádzajúcej úlohy.

Označme hodnoty call opcie v koncových uzloch ako $C_3^F, C_4^F, C_5^F, C_6^F$ a hodnoty put opcie v koncových uzloch ako $P_3^F, P_4^F, P_5^F, P_6^F$. Potom:

koncový uzol	call opcia	put opcia
6	$C_6^F = (28 - 21)^+ = 7$	$P_6^F = (21 - 20)^+ = 1$
5	$C_5^F = (24 - 21)^+ = 3$	$P_5^F = (21 - 20)^+ = 1$
4	$C_4^F = (22 - 21)^+ = 1$	$P_4^F = (21 - 18)^+ = 3$
3	$C_3^F = (20 - 21)^+ = 0$	$P_3^F = (21 - 16)^+ = 5$

Riziko-neutrálnu pravdepodobnosť q poznáme z predchádzajúcej úlohy. Na celom strome platí, že $q = \frac{1}{3}$.

Vypočítajme hodnotu call opcie v uzle 1, tj. C_1^F :

$$C_1^F = e^{-rT}(qC_4^F + (1-q)C_3^F) = \frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}0 = \frac{1}{3}$$

Vypočítajme hodnotu put opcie v uzle 1, tj. P_1^F :

$$P_1^F = e^{-rT}(qP_4^F + (1-q)P_3^F) = \frac{1}{3}3 + \frac{2}{3}5 = \frac{13}{3}$$

Ďalej pre C_2^F dostaneme:

$$C_2^F = e^{-rT}(qC_6^F + (1-q)C_5^F) = \frac{1}{3}7 + \frac{2}{3}3 = \frac{13}{3}$$

Pre P_2^F zasa máme:

$$P_2^F = e^{-rT}(qP_6^F + (1-q)P_5^F) = \frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1$$

S vypočítanými hodnotami C_1 a C_2 dopočítame hodnotu call opcie C_0^F v uzle 0:

$$C_0^F = e^{-rT}(qC_2^F + (1-q)C_1^F) = \frac{1}{3}\frac{13}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{15}{9}$$

Podobne pre P_0^F máme:

$$P_0^F = e^{-rT}(qP_2^F + (1-q)P_1^F) = \frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}\frac{13}{3} = \frac{29}{9}$$

Súčasná cena call opcie tohto typu je teda $\frac{5}{3}$ p.j. a súčasná cena put opcie tohto typu je $\frac{29}{9}$ p.j.

6. Uvažujte plávajúce dozadu hľadiace opcie: put a call na akciu bez dividend s podmienkami určenými v 4.úlohe s tým rozdielom, že maximálna hodnota na danej ceste stromom bude pre put opciu určená ako väčšie z dvojice čísel, kde jedno je maximálna hodnota podkladovej akcie na tejto ceste stromom a druhé je $K = 21$ p.j. z predchádzajúcej úlohy. Podobne minimálna hodnota na danej ceste stromom bude pre call opciu určená ako menšie z dvojice čísel, kde jedno je minimálna hodnota podkladovej akcie na tejto ceste stromom

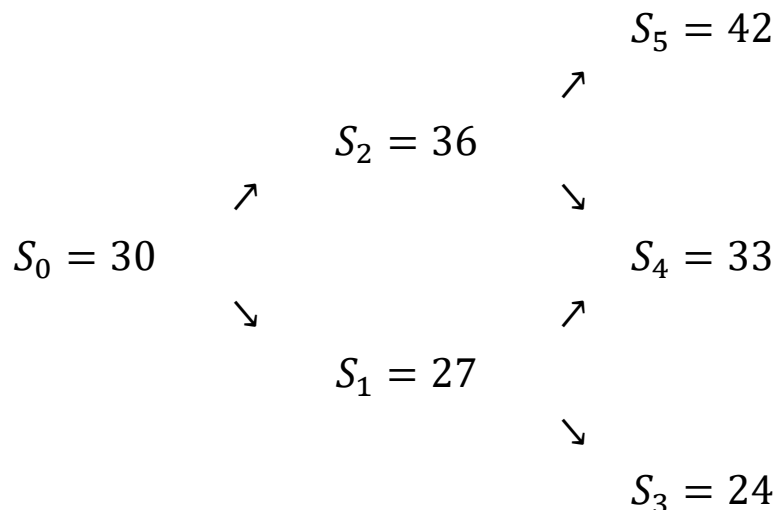
a druhé je opět $K = 21$ p.j. z předcházející úlohy. Označme bezarbitrážne ceny takejto call opcie a put opcie ako C_0^* , resp. P_0^* . Vypočítajte C_0^* , P_0^* a ukážte, že platí:

$$\begin{aligned} C_0^F &= P_0^* + S_0 - Ke^{-r\hat{T}}, \\ P_0^F &= C_0^* - S_0 + Ke^{-r\hat{T}}. \end{aligned}$$

Komentár:

Úloha je za 4 prémiové body, ktoré získajú **prvých desať riešiteľov**, ktorí úlohu celú presne a správne vyriešia. Riešenia zasielajte **výhradne z vášho fakultného webmailu** alebo **stuba-gmailu** do štvrtku 6.5.2021, do 15:00 na adresu: michal.zakopcan@stuba.sk. V prípade, že prvých desať správnych riešení bude odovzdaných skôr, než vo štvrtok 6.5.2021 o 15:00, hromadnou správou prostredníctvom AIS budete v najbližšom možnom termíne upozornení, aby ste žiadne ďalšie riešenia neposielali a termínom ukončenia zasielania riešení sa stane termín odovzdania v poradí desiateho správneho riešenia. Každý študent môže zaslať len jedno svoje riešenie. Nezabudnite na označenie študenta, tj. uveďte vaše **meno, priezvisko** spolu s vašim **podpisom**.

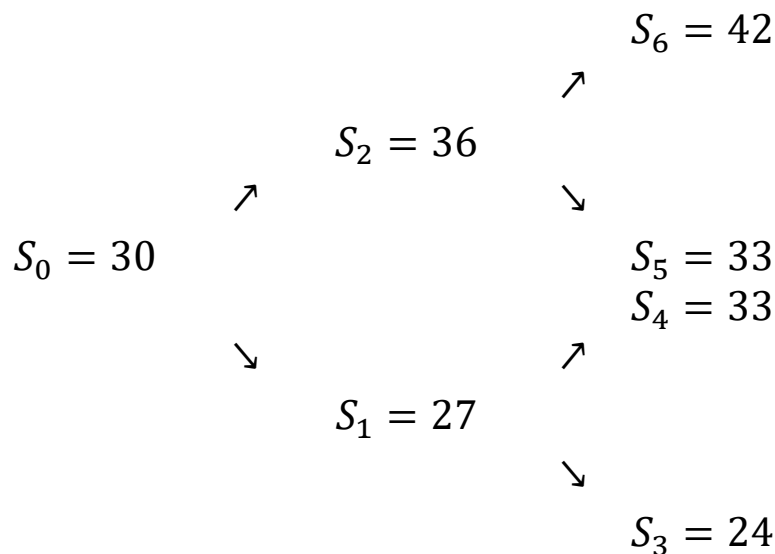
7. Uvažujte ázijskú opciu typu average price na akciu bez dividend s dobou splatnosti $\hat{T} = 2$ č.j. a realizačnou cenou $K = 32$ p.j., pričom vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom dvojkrokovom binárnom strome:



kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $T = 1$ č.j. a druhá zmena nastane o ďalších T č.j. neskôr. Čiže doba splatnosti opcie $\hat{T} = 2T$ (kde 2 je počet krokov na binárnom strome). Nech bezriziková (za 1 č.j.) úroková sadzba $r = 0$ je konštantná počas obdobia $\hat{T}$, tj. rovnaká pre obe obdobia dĺžky T . Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu call opcie tohto typu a put opcie tohto typu.

Riešenie:

Pretože pri výpočte hodnôt opcie tohto typu pracujeme s priemernou hodnotou, ktorú dosiahne akcia počas životnosti opcie, je dobré zaznačiť binárny strom v druhom kroku so štyrmi uzlami namiesto troch, pričom dva z nich majú rovnakú hodnotu:



Je to preto, lebo priemerná hodnota akcie na ceste uzlami 0,2,5 je iná, než na ceste 0,1,4. Konkrétne pre všetky cesty:

cesta	priemerná hodnota
0, 2, 6	36
0, 2, 5	33
0, 1, 4	30
0, 1, 3	27

Hodnota opcie musí rešpektovať všetky možné cesty vývoja ceny podkladového aktíva a preto bude iná hodnota opcie v uzle 5 a iná v uzle 4. Označme hodnoty tejto call opcie v koncových uzloch ako

C_3, C_4, C_5, C_6 a hodnoty put opcie v koncových uzloch ako P_3, P_4, P_5, P_6 . Potom:

koncový uzol	call opcia	call opcia
6	$C_6 = (36 - 32)^+ = 4$	$P_6 = (32 - 36)^+ = 0$
5	$C_5 = (33 - 32)^+ = 1$	$P_5 = (32 - 33)^+ = 0$
4	$C_4 = (30 - 32)^+ = 0$	$P_4 = (32 - 30)^+ = 2$
3	$C_3 = (27 - 32)^+ = 0$	$P_3 = (32 - 27)^+ = 5$

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť q je na celom strome rovnaká, pretože $q = \frac{S_{now}e^{rT} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{S_{now} - (S_{now} - 3)}{(S_{now} + 6) - (S_{now} - 3)} = \frac{1}{3}$.

Vypočítajme hodnotu call opcie v uzle 1, tj. C_1 :

$$C_1 = e^{-rT}(qC_4 + (1 - q)C_3) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}0 = 0$$

Vypočítajme hodnotu put opcie v uzle 1, tj. P_1 :

$$P_1 = e^{-rT}(qP_4 + (1 - q)P_3) = \frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}5 = 4$$

Ďalej pre C_2 dostaneme:

$$C_2 = e^{-rT}(qC_6 + (1 - q)C_5) = \frac{1}{3}4 + \frac{2}{3}1 = 2$$

Pre P_2 máme:

$$P_2 = e^{-rT}(qP_6 + (1 - q)P_5) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}0 = 0$$

S vypočítanými hodnotami C_1 a C_2 dopočítame hodnotu call opcie C_0 v uzle 0:

$$C_0 = e^{-rT}(qC_2 + (1 - q)C_1) = \frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3}$$

Podobne pre P_0 máme:

$$P_0 = e^{-rT}(qP_2 + (1 - q)P_1) = \frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}4 = \frac{8}{3}$$

Súčasná cena call opcie tohto typu je teda $\frac{2}{3}$ p.j. a put opcie tohto typu je $\frac{8}{3}$ p.j.