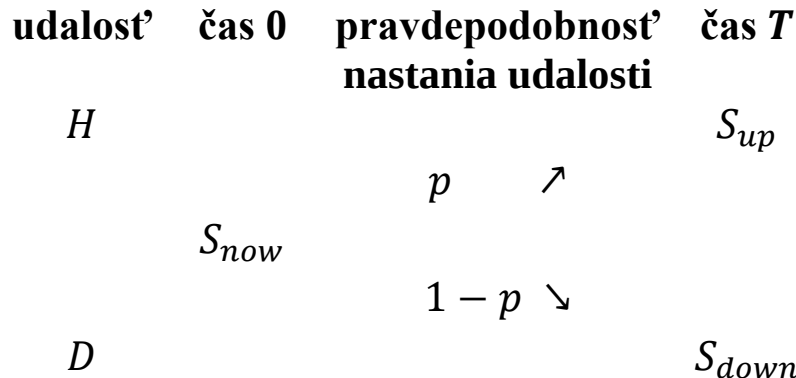


OCEŇOVANIE EURÓPSKÝCH A AMERICKÝCH OPCIÍ NA BINÁRNM STROME

1. Uvažujte európsku kúpnu (call) opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 1$ rok a realizačnou cenou $K = 50$ p.j., pričom cena akcie dnes (v čase 0) je $S_{now} = 50$ p.j. a vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom jednoduchom binárnom strome:



kde na ceny akcií za dobu T majú vplyv dve náhodné udalosti H a D , pričom, ak nastane udalosť H , cena akcie v čase T stúpne na $S_{up} = 70$ p.j. a ak nastane udalosť D , cena akcie v čase T poklesne na $S_{down} = 30$ p.j. Nech bezriziková úroková sadzba $r = 0$ je konštantná počas obdobia T . Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu tejto opcie.

Riešenie:

Vychádzajúc z prednášky Prednaska9.pdf, str. 11, na určenie bezarbitrážnej ceny opcie, potrebujeme vypočítať riziko-neutrálnu pravdepodobnosť q na binárnom strome a následne využiť vzťah (2).

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť:

$$q = \frac{S_{now}e^{rT} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{50 - 30}{70 - 30} = \frac{1}{2}$$

Označme hodnotu call opcie v čase 0 ako C_{now} a hodnotu tejto opcie v čase T C_{up} , ak nastane udalosť H , resp. C_{down} , ak nastane udalosť D . Potom:

$$C_{up} = \max\{0, S_{up} - K\} = \max\{0, 20\} = 20 \text{ p. j.},$$

$$C_{down} = \max\{0, S_{down} - K\} = \max\{0, -20\} = 0 \text{ p. j.}$$

Zo vzťahu (2) z prednášky dostaneme:

$$C_{now} = e^{-rT}(qC_{up} + (1 - q)C_{down}) = \frac{1}{2}20 \text{ p.j.} + \frac{1}{2}0 \text{ p.j.} = 10 \text{ p.j.}$$

Súčasná cena tejto opcie je teda 10 p.j.

2. Za podmienok z predchádzajúcej úlohy určte cenu európskej predajnej (put) opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 1$ rok a realizačnou cenou $K = 50$ p.j.

Riešenie:

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť je rovnaká, ako v predchádzajúcej úlohe, pretože je počítaná na tom istom binárnom strome. Teda $q = 0,5$. Označme hodnotu put opcie v čase 0 ako P_{now} a hodnotu tejto opcie v čase T P_{up} , ak nastane udalosť H , resp. P_{down} , ak nastane udalosť D . Potom:

$$P_{up} = \max\{0, K - S_{up}\} = \max\{0, -20\} = 0 \text{ p.j.},$$

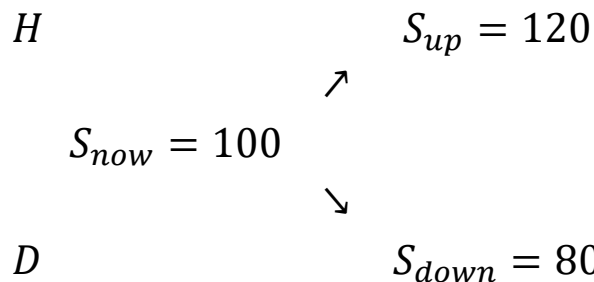
$$P_{down} = \max\{0, K - S_{down}\} = \max\{0, 20\} = 20 \text{ p.j.}$$

Zo vzťahu (2) z prednášky dostaneme:

$$P_{now} = e^{-rT}(qP_{up} + (1 - q)P_{down}) = \frac{1}{2}0 \text{ p.j.} + \frac{1}{2}20 \text{ p.j.} = 10 \text{ p.j.}$$

Súčasná cena tejto opcie je teda 10 p.j.

3. Uvažujte európsku kúpnu (call) opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ mesiace a realizačnou cenou $K = 110$ p.j., pričom vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom jednoduchom binárnom strome:



Nech bezriziková (ročná) úroková sadzba $r = 0,06$ je konštantná počas obdobia T . Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu tejto opcie.

Riešenie:

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť na binárnom strome:

$$q = \frac{S_{now}e^{rT} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{100e^{0,01} - 80}{120 - 80} = \frac{5}{2}e^{0,01} - 2$$

Potom:

$$1 - q = 1 - \frac{5}{2}e^{0,01} + 2 = 3 - \frac{5}{2}e^{0,01}$$

V tomto prípade:

$$C_{up} = \max\{0, 10\} = 10 \text{ p. j.},$$

$$C_{down} = \max\{0, -30\} = 0 \text{ p. j.}$$

Súčasná cena tejto opcie:

$$\begin{aligned} C_{now} &= e^{-rT}(qC_{up} + (1 - q)C_{down}) = e^{-0,01} \left(\left(\frac{5}{2}e^{0,01} - 2 \right) 10 + 0 \right) \\ &= 25 - 20e^{-0,01} \doteq 5,199 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

4. Za podmienok z predchádzajúcej úlohy určte cenu európskej predajnej (put) opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $T = 2$ mesiace a realizačnou cenou $K = 110$ p.j.

Riešenie:

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť je rovnaká, ako v predchádzajúcej úlohe, pretože je počítaná na tom istom binárnom strome.

V tomto prípade:

$$P_{up} = \max\{0, -10\} = 0 \text{ p. j.},$$

$$P_{down} = \max\{0, 30\} = 30 \text{ p. j.}$$

Súčasná cena tejto opcie:

$$\begin{aligned} P_{now} &= e^{-rT}(qP_{up} + (1 - q)P_{down}) = e^{-0,01} \left(0 + \left(3 - \frac{5}{2}e^{0,01} \right) 30 \right) \\ &= 90e^{-0,01} - 75 \doteq 14,104 \text{ p. j.} \end{aligned}$$

Poznámka 1:

Môžete si všimnúť, že:

$$P_{now} = C_{now} - S_{now} + Ke^{-rT}.$$

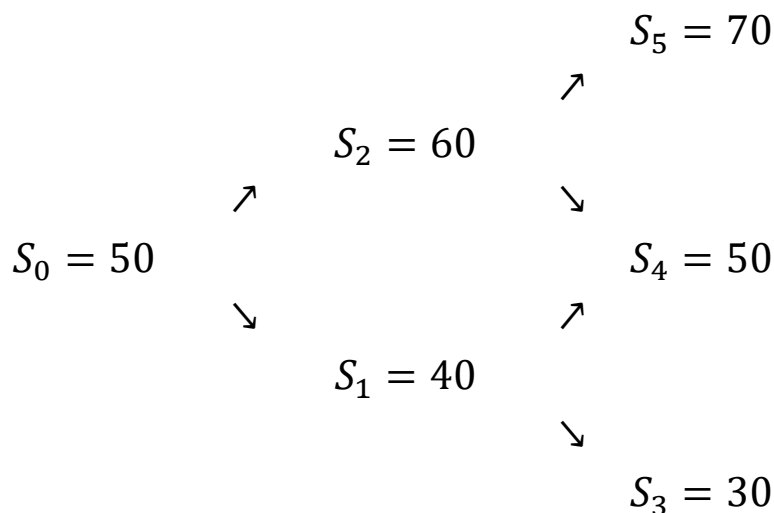
Uvedená rovnosť sa nazýva put-call (kúpno-predajná) parita pre európske opcie. Musí však ísť o opcie na to isté podkladové aktívum s tou istou dobou splatnosti a tou istou realizačnou cenou.

Skutočne je pre hodnoty opcií z tejto a predchádzajúcej úlohy táto rovnosť splnená:

$$\begin{aligned} C_{now} - S_{now} + Ke^{-rT} &= 25 - 20e^{-0,01} - 100 + 110e^{-0,01} \\ &= 90e^{-0,01} - 75 = P_{now} \end{aligned}$$

Pri známej hodnote napr. kúpnej opcie umožňuje kúpno-predajná parita vypočítať hodnotu príslušnej predajnej opcie bez nutnosti počítania na binárnom strome.

5. Uvažujte európsku predajnú (put) opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $\hat{T} = 8$ mesiacov a realizačnou cenou $K = 50$ p.j., pričom vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom dvojkrovovom binárnom strome:



kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $T = 4$ mesiace a druhá zmena nastane o ďalšie 4 mesiace. Čiže doba splatnosti opcie $\hat{T} = 2T$ (kde 2 je počet krokov na binárnom strome). Nech bezriziková (ročná) úroková sadzba $r = 0,03$ je konštantná počas obdobia $\hat{T}$, tj. rovnaká pre obe obdobia dĺžky T . Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu tejto opcie.

Riešenie:

Označme hodnoty put opcie v koncových uzloch ako P_3, P_4, P_5 idúc zdola nahor. Potom: $P_3 = 20, P_4 = 0 = P_5$.

Vypočítajme hodnotu opcie P_1 v uzle 1 (tj. v tom uzle, v ktorom je cena akcie rovná S_1). Budeme na to potrebovať riziko-neutrálnu pravdepodobnosť zodpovedajúcu príslušnej vetve stromu, tj. tej časti

stromu, ktorá je tvorená uzlami 1,3,4. Označme túto pravdepodobnosť q_1 , potom $q_1 = \frac{S_1 e^{0,01} - S_3}{S_4 - S_3} = \frac{40e^{0,01} - 30}{50 - 30} = 2e^{0,01} - \frac{3}{2}$ a $1 - q_1 = \frac{5}{2} - 2e^{0,01}$.

Pre P_1 dostaneme:

$$\begin{aligned} P_1 &= e^{-rT}(q_1 P_4 + (1 - q_1)P_3) = e^{-0,01} \left(\frac{5}{2} - 2e^{0,01} \right) 20 \\ &= 50e^{-0,01} - 40 \doteq 9,5025 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Podobne na výpočet P_2 budeme potrebovať riziko-neutrálnu pravdepodobnosť zodpovedajúcu tej časti stromu, ktorá je tvorená uzlami 2,4,5. Označme túto pravdepodobnosť q_2 , potom $q_2 = \frac{S_2 e^{0,01} - S_4}{S_5 - S_4} = \frac{60e^{0,01} - 50}{70 - 50} = 3e^{0,01} - \frac{5}{2}$ a $1 - q_2 = \frac{7}{2} - 3e^{0,01}$.

Pre P_2 dostaneme:

$$P_2 = e^{-rT}(q_2 P_5 + (1 - q_2)P_4) = e^{-0,01}(0 + 0) = 0 \text{ p.j.}$$

Z predchádzajúceho výpočtu sme zistili, že riziko-neutrálnu pravdepodobnosť q_2 v skutočnosti nebolo treba počítať, pretože kvôli hodnotám opcie v koncových uzloch na tejto vetve stromu dostaneme $P_2 = 0$ pre akékoľvek q_2 .

S vypočítanými hodnotami P_1 a P_2 vieme dopočítať hodnotu opcie P_0 v uzle 0. Budeme k tomu potrebovať riziko-neutrálnu pravdepodobnosť zodpovedajúcu tej časti stromu, ktorá je tvorená uzlami 0,1,2. Označme túto pravdepodobnosť q_0 , potom $q_0 = \frac{S_0 e^{0,01} - S_1}{S_2 - S_1} = \frac{50e^{0,01} - 40}{60 - 40} = \frac{5}{2}e^{0,01} - 2$ a $1 - q_0 = 3 - \frac{5}{2}e^{0,01}$.

Pre P_0 dostaneme:

$$\begin{aligned} P_0 &= e^{-rT}(q_0 P_2 + (1 - q_0)P_1) \\ &= e^{-0,01} \left(0 + (50e^{-0,01} - 40) \left(3 - \frac{5}{2}e^{0,01} \right) \right) \\ &= e^{-0,01}(150e^{-0,01} - 245 + 100e^{0,01}) \\ &= 150e^{-0,02} - 245e^{-0,01} + 100 \doteq 4,4676 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Súčasná cena tejto opcie je teda približne 4,4676 p.j.

Poznámka:

Mohli ste si všimnúť, že pri výpočte súčasnej ceny opcie na princípe žiadna arbitráž, sme v každom kroku pracovali s presnými hodnotami opcií v jednotlivých uzloch, ako i presnými hodnotami jednotlivých

riziko-neutrálnych pravdepodobností. Keby sme totiž do výpočtov dosádzali približné hodnoty, dochádzalo by zaokrúhľovaním ku kope- niu numerických chýb a výsledná hodnota by bola nepresná. Akákoľvek nepresnosť je pri bezarbitrážnom oceňovaní derivátov silno nežiadúca, pretože ak by výsledná cena opcie nebola uvedená presne, dalo by to možnosť vzniknúť arbitráži, čím by celá naša snaha vyšla navnívoč. Všetky uvádzané približné hodnoty sa vo výpočte nachádzajú len pre lepšiu predstavu o tom, o aké číselné hodnoty vlastne ide.

6. Za podmienok z predchádzajúcej úlohy určte cenu európskej kúpnej (call) opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $\hat{T} = 8$ mesiacov a realizačnou cenou $K = 50$ p.j.

Riešenie:

Na výpočet využijeme hodnotu put opcie vypočítanú v predchádzajúcej úlohe a put-call paritu medzi opciami:

$$C_0 = P_0 + S_0 - Ke^{-r\hat{T}}.$$

Dostaneme:

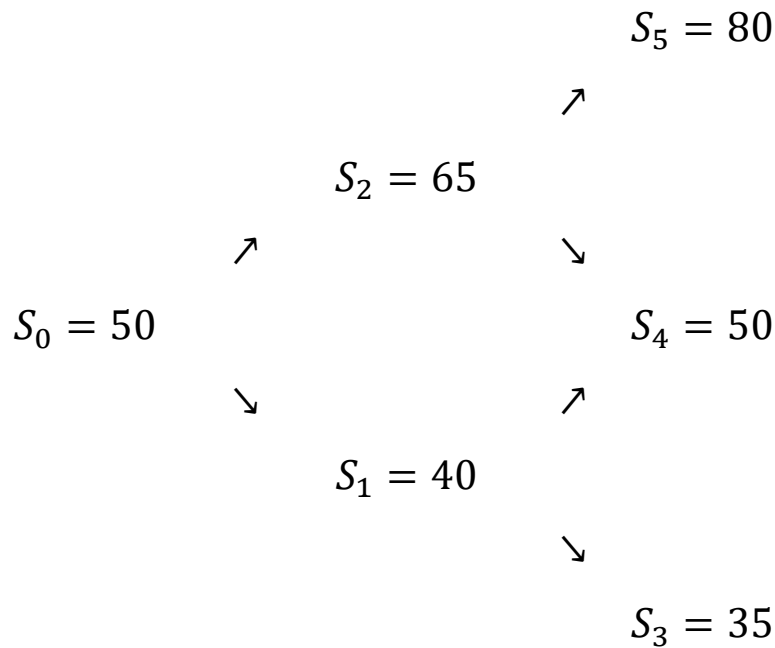
$$\begin{aligned} C_0 &= (150e^{-0,02} - 245e^{-0,01} + 100) + 50 - 50e^{-0,02} \\ &= 100e^{-0,02} - 245e^{-0,01} + 150 \doteq 5,4577 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Súčasná cena call opcie je teda približne 5,4577 p.j.

Poznámka 2:

Samozrejme rovnakú hodnotu call opcie by sme dostali aj v prípade, že by sme ju počítali na binárnom strome. Predajno-kúpna parita nám však umožňuje vyhnúť sa práve ďalšiemu (zdĺhavému) počítaniu.

7. Uvažujte americkú predajnú (put) opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $\hat{T} = 4$ mesiace a realizačnou cenou $K = 60$ p.j., pričom vývoj ceny akcie sa nachádza na dvojkrokovom binárnom strome nižšie, v ktorom prvá zmena ceny akcie nastane v čase $T = 2$ mesiace a druhá zmena nastane o ďalšie 2 mesiace. Čiže doba splatnosti opcie $\hat{T} = 2T$ (kde 2 je počet krokov na binárnom strome). Nech bezriziková (ročná) úroková sadzba $r = 0,06$ je konštantná počas obdobia $\hat{T}$, tj. rovnaká pre obe obdobia dĺžky T . Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu tejto opcie.



Riešenie:

Označme hodnoty put opcie v koncových uzloch ako P_3, P_4, P_5 idúc zdola nahor. Potom: $P_3 = 25, P_4 = 10, P_5 = 0$.

Vypočítajme hodnotu opcie P_1 v uzle 1 (tj. v tom uzle, v ktorom je cena akcie rovná S_1). Budeme na to potrebovať riziko-neutrálnu pravdepodobnosť zodpovedajúcu príslušnej vetve stromu, tj. tej časti stromu, ktorá je tvorená uzlami 1,3,4. Označme túto pravdepodobnosť q_1 , potom:

$$q_1 = \frac{S_1 e^{0,01} - S_3}{S_4 - S_3} = \frac{40 e^{0,01} - 35}{50 - 35} = \frac{8e^{0,01} - 7}{3} \text{ a } 1 - q_1 = \frac{10 - 8e^{0,01}}{3}.$$

Pre P_1 dostaneme:

$$\begin{aligned} P_1 &= \max\{(K - S_1)^+; e^{-rT}(q_1 P_4 + (1 - q_1)P_3)\} = \\ &= \max\left\{(60 - 40)^+; e^{-0,01}\left(10\left(\frac{8e^{0,01} - 7}{3}\right) + 25\left(\frac{10 - 8e^{0,01}}{3}\right)\right)\right\} = \\ &= \max\left\{20; e^{-0,01}\left(\frac{180 - 120e^{0,01}}{3}\right)\right\} = \\ &= \max\{20; 60e^{-0,01} - 40\} = 20 \text{ p. j.,} \end{aligned}$$

kde $(x)^+ = \max\{0; x\}$.

Podobne na výpočet P_2 budeme potrebovať riziko-neutrálnu pravdepodobnosť zodpovedajúcu tej časti stromu, ktorá je tvorená uzlami 2,4,5. Označme túto pravdepodobnosť q_2 , potom:

$$q_2 = \frac{S_2 e^{0,01} - S_4}{S_5 - S_4} = \frac{65e^{0,01} - 50}{80 - 50} = \frac{13e^{0,01} - 10}{6} \text{ a } 1 - q_2 = \frac{16 - 13e^{0,01}}{6}.$$

Pre P_2 dostaneme:

$$\begin{aligned} P_2 &= \max\{(K - S_2)^+; e^{-rT}(q_2 P_5 + (1 - q_2)P_4)\} = \\ &= \max\left\{(60 - 65)^+; e^{-0,01}\left(0\left(\frac{13e^{0,01} - 10}{6}\right) + 10\left(\frac{16 - 13e^{0,01}}{6}\right)\right)\right\} \\ &= \max\left\{0; e^{-0,01}\left(\frac{160 - 130e^{0,01}}{6}\right)\right\} = \\ &= \max\left\{0; \frac{80e^{-0,01} - 65}{3}\right\} = \frac{80e^{-0,01} - 65}{3} \doteq 4,735 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

S vypočítanými hodnotami P_1 a P_2 vieme dopočítať hodnotu opcie P_0 v uzle 0. Budeme k tomu potrebovať riziko-neutrálnu pravdepodobnosť zodpovedajúcu tej časti stromu, ktorá je tvorená uzlami 0,1,2. Označme túto pravdepodobnosť q_0 , potom:

$$q_0 = \frac{S_0 e^{0,01} - S_1}{S_2 - S_1} = \frac{50e^{0,01} - 40}{65 - 40} = \frac{10e^{0,01} - 8}{5} \text{ a } 1 - q_0 = \frac{13 - 10e^{0,01}}{5}.$$

Pre P_0 dostaneme:

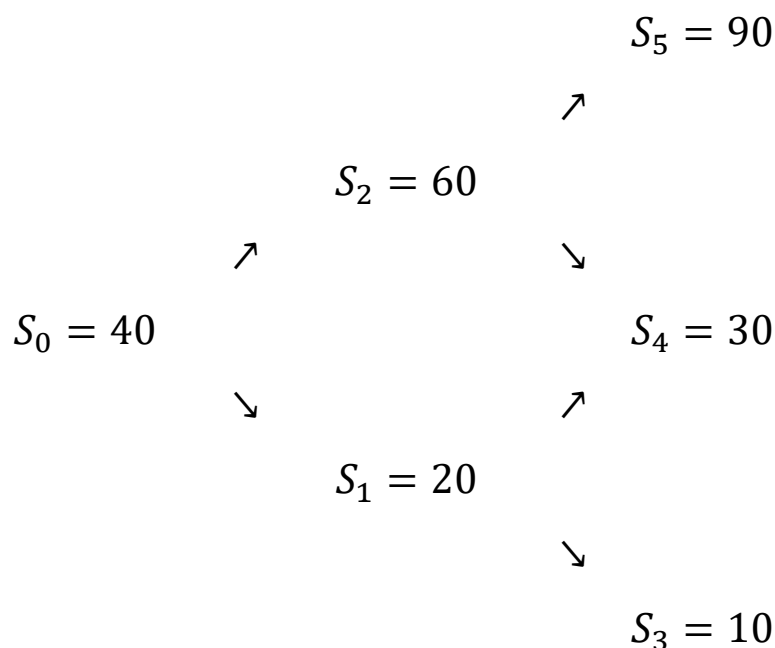
$$\begin{aligned} P_0 &= \max\{(K - S_0)^+; e^{-rT}(q_0 P_2 + (1 - q_0)P_1)\} = \\ &= \max\left\{(60 - 50)^+; e^{-0,01}\left(\left(\frac{80e^{-0,01} - 65}{3}\right)\left(\frac{10e^{0,01} - 8}{5}\right) + 20\left(\frac{13 - 10e^{0,01}}{5}\right)\right)\right\} \\ &= \max\left\{10; e^{-0,01}\left(\frac{1320 - 650e^{0,01} - 640e^{-0,01}}{15} + \frac{260 - 200e^{0,01}}{5}\right)\right\} = \\ &= \max\left\{10; e^{-0,01}\left(\frac{420 - 250e^{0,01} - 128e^{-0,01}}{3}\right)\right\} \\ &= \frac{420e^{-0,01} - 250 - 128e^{-0,02}}{3} \doteq 13,452 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Súčasná cena tejto opcie je teda približne 13,452 p.j.

Poznámka 3:

Na porovnanie cena európskej put opcie na túto akciu s tou istou realizačnou cenou a rovnakou dobou splatnosti je $\frac{1}{3}(340e^{-0,02} + 110 - 408e^{-0,01}) \doteq 13,109$ p.j. Overte, že je to pravda. Táto úloha je za 2 prémiové body, ktoré získajú **prvých desať riešiteľov**, ktorí úlohu celú presne a správne vyriešia. Riešenia zasielajte **výhradne z vášho fakultného webmailu alebo stuba-gmailu** do piatku 30.4.2021, do 13:00 na adresu: michal.zakopcan@stuba.sk V prípade, že prvých desať správnych riešení bude odovzdaných skôr, než v piatok 30.4.2021 o 13:00, hromadnou správou prostredníctvom AIS budete v najbližšom možnom termíne upozornení, aby ste žiadne ďalšie riešenia neposielali a termínom ukončenia zasielania riešení sa stane termín odovzdania v poradí desiateho správneho riešenia. Každý študent môže zaslať len jedno svoje riešenie. Nezabudnite na označenie študenta (**meno, priezvisko a podpis**), do predmetu správy napíšte: **cvičenie10 - overenie úlohy v poznámke 3**.

8. Uvažujte americkú kúpnu (call) opciu na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $\hat{T} = 2$ roky a realizačnou cenou $K = 20$ p.j., pričom vývoj ceny akcie sa nachádza na nasledujúcom dvojkrokovom binárnom strome:



kde prvá zmena ceny akcie nastane v čase $T = 1$ rok a druhá zmena nastane o ďalší rok neskôr. Čiže doba splatnosti opcie $\hat{T} = 2T$ (kde 2 je

počet krokov na binárnom strome). Nech bezriziková (ročná) úroková sadzba $r = 0,05$ je konštantná počas obdobia $\hat{T}$, tj. rovnaká pre obe obdobia dĺžky T . Na princípe žiadna arbitráž určte súčasnú cenu tejto opcie.

Riešenie:

Označme hodnoty call opcie v koncových uzloch ako C_3, C_4, C_5 idúc zdola nahor. Potom: $C_5 = 70, C_4 = 10, C_3 = 0$.

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť q je na každej vetve stromu rovnaká, pretože na každej vetve stromu platí, že $S_{up} = 1,5S_{now}$ a $S_{down} = 0,5S_{now}$. V dôsledku toho:

$$q = \frac{S_{now}e^{rT} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}} = \frac{S_{now}e^{rT} - 0,5S_{now}}{1,5S_{now} - 0,5S_{now}} = e^{0,05} - 0,5 \text{ a } 1 - q = 1,5 - e^{0,05}.$$

Vypočítajme hodnotu opcie v uzle 1, tj. C_1 :

$$\begin{aligned} C_1 &= \max\{(S_1 - K)^+; e^{-rT}(qC_4 + (1 - q)C_3)\} = \\ &= \max\{(20 - 20)^+; e^{-0,05}(10(e^{0,05} - 0,5) + 0(1,5 - e^{0,05}))\} = \\ &= \max\{0; 10 - 5e^{-0,05}\} = 10 - 5e^{-0,05} \doteq 5,24 \text{ p.j.,} \end{aligned}$$

kde $(x)^+ = \max\{0; x\}$.

Ďalej pre C_2 dostaneme:

$$\begin{aligned} C_2 &= \max\{(S_2 - K)^+; e^{-rT}(qC_5 + (1 - q)C_4)\} = \\ &= \max\{(60 - 20)^+; e^{-0,05}(70(e^{0,05} - 0,5) + 10(1,5 - e^{0,05}))\} = \\ &= \max\{40; e^{-0,05}(60e^{0,05} - 20)\} = \\ &= \max\{40; 60 - 20e^{-0,05}\} = 60 - 20e^{-0,05} \doteq 40,98 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

S vypočítanými hodnotami C_1 a C_2 vieme dopočítať hodnotu opcie C_0 v uzle 0:

$$\begin{aligned} C_0 &= \max\{(S_0 - K)^+; e^{-rT}(qC_2 + (1 - q)C_1)\} = \\ &= \max\{(40 - 20)^+; e^{-0,05}((60 - 20e^{-0,05})(e^{0,05} - 0,5) \\ &\quad + (10 - 5e^{-0,05})(1,5 - e^{0,05}))\} \\ &= \max\{20; e^{-0,05}(50e^{0,05} - 30 + 2,5e^{-0,05})\} = \\ &= \max\{20; 50 - 30e^{-0,05} + 2,5e^{-0,1}\} = 50 - 30e^{-0,05} + 2,5e^{-0,1} \\ &\doteq 23,73 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Súčasná cena tejto opcie je teda približne 23,73 p.j.

Poznámka 4:

Na porovnanie cena európskej call opcie na túto akciu s tou istou realizačnou cenou a rovnakou dobou splatnosti je $50 - 30e^{-0,05} + 2,5e^{-0,1} \doteq 23,73$ p.j., čiže presne rovnaká. Zdôvodnite to pomocou riešenia tejto úlohy alebo stručne vychádzajúc z teórie. Toto zdôvodnenie je za 2 prémiové body, ktoré získajú **prvých desať riešiteľov**, ktorí úlohu celú presne a správne vyriešia. Riešenia zasielajte **výhradne z vášho fakultného webmailu alebo stuba-gmailu** do piatku 30.4.2021, do 13:00 na adresu: michal.zakopcan@stuba.sk V prípade, že prvých desať správnych riešení bude odovzdaných skôr, než v piatok 30.4.2021 o 13:00, hromadnou správou prostredníctvom AIS budete v najbližšom možnom termíne upozornení, aby ste žiadne ďalšie riešenia neposielali a termínom ukončenia zasielania riešení sa stane termín odovzdania v poradí desiateho správneho riešenia. Každý študent môže zaslať len jedno svoje riešenie. Nezabudnite na označenie študenta (**meno, priezvisko a podpis**), do predmetu správy napíšte: **cvičenie10 - zdôvodnenie v poznámke 4**.

9. Za podmienok z predchádzajúcej úlohy určte cenu americkej predajnej (put) opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $\hat{T} = 2$ roky a realizačnou cenou $K = 20$ p.j.

Riešenie:

Riziko-neutrálna pravdepodobnosť je na celom strome rovnaká, ako v predchádzajúcej úlohe, pretože ide o ten istý binárny strom. Teda $q = e^{0,05} - 0,5$, resp. $1 - q = 1,5 - e^{0,05}$. Hodnoty opcie v koncových uzloch sú nasledovné: $P_3 = 10, P_4 = 0 = P_5$.

Vypočítajme postupne hodnoty opcie v uzloch 1, 2, 0:

$$\begin{aligned} P_1 &= \max\{(K - S_1)^+; e^{-rT}(qP_4 + (1 - q)P_3)\} \\ &= \max\{(20 - 20)^+; e^{-0,05}(0 + 10(1,5 - e^{0,05}))\} \\ &= \max\{0; 15e^{-0,05} - 10\} = 15e^{-0,05} - 10 \doteq 4,27 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \max\{(K - S_2)^+; e^{-rT}(qP_5 + (1 - q)P_4)\} \\ &= \max\{(20 - 60)^+; e^{-0,05}(0 + 0)\} = \max\{0; 0\} = 0 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_0 &= \max\{(K - S_0)^+; e^{-rT}(qP_2 + (1 - q)P_1)\} \\
&= \max\left\{(20 - 40)^+; e^{-0,05}\left(0 + (15e^{-0,05} - 10)(1,5 - e^{0,05})\right)\right\} = \\
&= \max\{0; e^{-0,05}(22,5e^{-0,05} - 30 + 10e^{0,05})\} \\
&= \max\{0; 10 - 30e^{-0,05} + 22,5e^{-0,1}\} \\
&= 10 - 30e^{-0,05} + 22,5e^{-0,1} \doteq 1,82 \text{ p.j.}
\end{aligned}$$

Súčasná cena tejto opcie je teda približne 1,82 p.j.

Poznámka 5:

Cena európskej put opcie na túto akciu s tou istou realizačnou cenou a rovnakou dobou splatnosti je zhodou okolností rovnaká, hoci vo všeobecnosti to byť pravda nemusí.

Ak však rovnaká je, ako aj v tomto prípade, tak by mala medzi opciami z 8. a 9.úlohy existovať put-call parita pre európske opcie. Overme, že je to tak:

$$\begin{aligned}
0 &= S_0 + P_0 - C_0 - Ke^{-r\hat{T}} \\
0 &= 40 + (10 - 30e^{-0,05} + 22,5e^{-0,1}) \\
&\quad - (50 - 30e^{-0,05} + 2,5e^{-0,1}) - 20e^{-0,1} \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Medzi americkými put a call opciami existuje síce vzťah nazývaný put-call paritou pre americké opcie, ale na rozdiel od put-call parity pre európske opcie má podobu nerovností, konkrétne v čase 0 máme:

$$Ke^{-r\hat{T}} \leq S_0 + P_0 - C_0 \leq K.$$

Sledujúc tento vzťah malo by pre americkú call opciu na akciu bez dividend s rovnakou dobou splatnosti a rovnakou realizačnou cenou, ako mala put opcia zo 7.úlohy, platiť:

$$S_0 + P_0 - K \leq C_0 \leq S_0 + P_0 - Ke^{-r\hat{T}}.$$

Čiže:

$$\begin{aligned}
50 + \frac{420e^{-0,01} - 250 - 128e^{-0,02}}{3} - 60 &\leq C_0 \\
&\leq 50 + \frac{420e^{-0,01} - 250 - 128e^{-0,02}}{3} - 60e^{-0,02}
\end{aligned}$$

$$3,45 \doteq \frac{420e^{-0,01} - 280 - 128e^{-0,02}}{3} \leq C_0$$

$$\leq \frac{420e^{-0,01} - 100 - 308e^{-0,02}}{3} \doteq 4,64$$

V nasledujúcej úlohe ukážeme, že je to pravda.

10. Za podmienok zo 7.úlohy určte cenu americkej kúpnej (call) opcie na akciu nevyplácajúcu dividendy s dobou splatnosti $\hat{T} = 4$ mesiace a realizačnou cenou $K = 60$ p.j.

Riešenie:

Označme hodnoty call opcie v koncových uzloch ako C_3, C_4, C_5 idúc zdola nahor. Potom: $C_5 = 20, C_4 = 0, C_3 = 0$.

Riziko-neutrálne pravdepodobnosti q_0, q_1, q_2 sme vypočítali v 1.úlohe, takže ich stačí vo výpočte iba použiť.

Vypočítajme hodnotu opcie v uzle 1, tj. C_1 :

$$C_1 = \max\{(S_1 - K)^+; e^{-rT}(q_1 C_4 + (1 - q_1)C_3)\} =$$

$$= \max\left\{(40 - 60)^+; e^{-0,01}\left(0\left(\frac{8e^{0,01} - 7}{3}\right) + 0\left(\frac{10 - 8e^{0,01}}{3}\right)\right)\right\}$$

$$= \max\{0; 0\} = 0 \text{ p.j.}$$

Ďalej pre C_2 dostaneme:

$$C_2 = \max\{(S_2 - K)^+; e^{-rT}(q_2 C_5 + (1 - q_2)C_4)\} =$$

$$= \max\left\{(65 - 60)^+; e^{-0,01}\left(20\left(\frac{13e^{0,01} - 10}{6}\right) + 0\left(\frac{16 - 13e^{0,01}}{6}\right)\right)\right\}$$

$$= \max\left\{5; \frac{130 - 100e^{-0,01}}{3}\right\} =$$

$$= \frac{130 - 100e^{-0,01}}{3} \doteq 10,33 \text{ p.j.}$$

S vypočítanými hodnotami C_1 a C_2 vieme dopočítať hodnotu opcie C_0 v uzle 0:

$$C_0 = \max\{(S_0 - K)^+; e^{-rT}(q_0 C_2 + (1 - q_0)C_1)\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left\{ (50 - 60)^+; e^{-0,01} \left(\left(\frac{130 - 100e^{-0,01}}{3} \right) \left(\frac{10e^{0,01} - 8}{5} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 0 \left(\frac{13 - 10e^{0,01}}{5} \right) \right) \right\} \\
&= \max \left\{ 0; e^{-0,01} \left(\frac{260e^{0,01} + 160e^{-0,01} - 408}{3} \right) \right\} = \\
&= \max \left\{ 0; \frac{260 + 160e^{-0,02} - 408e^{-0,01}}{3} \right\} \\
&= \frac{260 + 160e^{-0,02} - 408e^{-0,01}}{3} \doteq 4,297 \text{ p.j.}
\end{aligned}$$

Súčasná cena tejto opcie je teda približne 4,297 p.j., čo skutočne leží medzi hodnotami 3,45 p.j. a 4,64 p.j.