

ÚROKOVANIE

JEDNODUCHÉ ÚROKOVANIE

1. Určte veľkosť úroku a budúcu hodnotu kapitálu 200 peňažných jednotiek (ďalej p.j.) úročenom jednoduchým úrokováním 3 roky pri ročnej úrokovej sadzbe 0,04.

Riešenie:

$$K_0 = 200 \text{ p.j.}, n = 3, r = 0,04, u = ? \text{ p.j.}, K_n = ? \text{ p.j.}$$

Máme:

$$u = nrK_0 = 0,12 \cdot 200 \text{ p.j.} = 24 \text{ p.j.}$$

$$K_n = K_0(1 + nr) = K_0 + nrK_0 = K_0 + u = 200 \text{ p.j.} + 24 \text{ p.j.} \\ = 224 \text{ p.j.}$$

Veľkosť úroku je 24 p.j. a budúca hodnota kapitálu je 224 p.j.

2. Vklad v banke v hodnote 1000 p.j. priniesol za 6 mesiacov úrok 30 p.j. Na akú ročnú úrokovú mieru bol uložený?

Riešenie:

$$K_0 = 1000 \text{ p.j.}, n = \frac{1}{2}, u = 30 \text{ p.j.}, p = ?$$

Z $u = nrK_0$ dostávame:

$$r = \frac{u}{nK_0} = \frac{30 \text{ p.j.}}{500 \text{ p.j.}} = 0,06 \\ p = 100 \cdot r = 6 \%$$

Bol uložený na 6 % ročnú úrokovú mieru.

3. Za ako dlho prinesie vklad 600 p.j. pri 4 % úrokovej miere p.a. úrok 20 p.j.?

Riešenie:

$$K_0 = 600 \text{ p.j.}, u = 20 \text{ p.j.}, p = 4 \%, n = ?$$

Máme:

$$r = \frac{p}{100} = 0,04.$$

Z $u = nrK_0$ dostávame:

$$n = \frac{u}{rK_0} = \frac{20 \text{ p.j.}}{24 \text{ p.j.}} = \frac{10}{12}$$

Vklad 600 p.j. pri 4 % úrokovej miere p.a. prinesie úrok 20 p.j. za 10 mesiacov.

4. Banka poskytuje na vkladoch 2 % ročný úrok. Občan potrebuje za 9 mesiacov splatiť dlžobu 500 p.j. Koľko musí teraz vložiť do banky, aby mal za 9 mesiacov túto sumu k dispozícii?

Riešenie:

$$K_n = 500 \text{ p.j.}, n = \frac{3}{4}, p = 2 \% , K_0 = ? \text{ p.j.}$$

Máme:

$$r = \frac{p}{100} = 0,02.$$

Z $K_n = K_0(1 + nr)$ dostávame:

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + nr} = \frac{500 \text{ p.j.}}{1,015} \doteq 492,611 \text{ p.j.}$$

Ak zaokrúhľujeme na stotiny p.j. musíme zaokrúhliť smerom nahor, v opačnom prípade by občan nemal za 9 mesiacov k dispozícii plnú sumu 500 p.j., ale o máličko nižšiu (množstvo finančných prostriedkov, ktoré o 9 mesiacov obdrží, závisí od toho, ako zaokrúhľuje banka). Pre istotu musí teraz občan vložiť do banky aspoň 492,62 p.j.

5. Určte úrok z istiny 1000 p.j. pri úrokovej sadzbe $r = 0,08$ p.a. za obdobie 15.1.-10.9.

Riešenie:

V období od 15.1.-10.9. sa nachádza 238 dní (počítame s tým, že február má 28 dní), tzn. časové obdobie, za ktoré sa istina úročí je $n = \frac{238}{365}$ roku.

Teda máme:

$$K_0 = 1000 \text{ p.j.}, n = \frac{238}{365}, r = 0,08, u = ? \text{ p.j.}$$

Máme:

$$u = nrK_0 = \frac{238}{365} 80 \text{ p.j.} \doteq 52,16 \text{ p.j.}$$

Úrok z istiny bude približne 52,16 p.j.

6. Určte priemernú úrokovú mieru troch dlhov:

Dlh	suma pôžičky	úroková miera	doba splatnosti
Dlh A	$K_A = 30 \text{ p.j.}$	$p_A = 20 \%$	$t_A = 314 \text{ dní}$
Dlh B	$K_B = 50 \text{ p.j.}$	$p_B = 15 \%$	$t_B = 235 \text{ dní}$
Dlh C	$K_C = 50 \text{ p.j.}$	$p_C = 10 \%$	$t_C = 107 \text{ dní}$

Riešenie:

Priemerná úroková miera týchto troch dlhov je taká úroková miera p , ktorá vyhovuje rovnici:

$$\begin{aligned} K_A \frac{p_A}{100} \frac{t_A}{365} + K_B \frac{p_B}{100} \frac{t_B}{365} + K_C \frac{p_C}{100} \frac{t_C}{365} \\ = K_A \frac{p}{100} \frac{t_A}{365} + K_B \frac{p}{100} \frac{t_B}{365} + K_C \frac{p}{100} \frac{t_C}{365} \end{aligned}$$

Z rovnice dostávame:

$$p = \frac{K_A p_A t_A + K_B p_B t_B + K_C p_C t_C}{K_A t_A + K_B t_B + K_C t_C} \doteq 15,7673 \%$$

Priemerná úroková miera troch dlhov je približne 15,7673 %.

7. Uvažujme dva cenné papiere CP1 a CP2 s budúcou hodnotou 492 p.j., resp. 495 p.j., ktoré sú splatné 10.8., resp. 10.9. toho istého (neprestupného) roku pri rovnakej ročnej úrokovej sadzbe $r = 0,073$. Určte dátum ekvivalencie cenných papierov, tj. dátum, v ktorom majú rovnakú hodnotu.

Riešenie:

Nech K_0 označuje hodnotu oboch cenných papierov v dátume ekvivalencie (keďže ide o dátum ekvivalencie, toto číslo je rovnaké

pre oba cenné papiere). Označme $n_1 = \frac{t}{365}$ dobu, ktorá ubehne od dátumu ekvivalencie do 10.8., teda dátumu splatnosti CP1. Nech n_2 označuje dobu, ktorá ubehne od dátumu ekvivalencie do 10.9., teda dátumu splatnosti CP2. Zrejme $n_2 = n_1 + \frac{31}{365} = \frac{t+31}{365}$, pretože medzi 10.8. a 10.9. je 31 dní. Hľadáme teda t – počet dní, ktoré uplynú od dátumu ekvivalencie do 10.8.

V čase ekvivalencie máme:

$$\frac{492 \text{ p.j.}}{(1 + rn_1)} = K_0 = \frac{495 \text{ p.j.}}{(1 + rn_2)}.$$

Po dosadení za n_1, n_2 dostávame:

$$\begin{aligned} \frac{492}{\left(1 + 0,073 \left(\frac{t}{365}\right)\right)} &= \frac{495}{\left(1 + 0,073 \left(\frac{t+31}{365}\right)\right)} \\ \frac{164}{(365 + 0,073t)} &= \frac{165}{(365 + 0,073(t+31))} \\ 164(365 + 0,073(t+31)) &= 165(365 + 0,073t) \\ 5084,0,073 &= 365 + 0,073t \\ t &= 5084 - \frac{365}{0,073} = 5084 - 5000 = 84 \text{ dní} \end{aligned}$$

To znamená, že dátum ekvivalencie nastal 84 dní pred 10.8. Keďže 10.8. je 222.deň roka, tak dátum ekvivalencie nastal v 138.dni roka, teda 18.5.

Pozn.: Ak nás to zaujíma, môžeme tiež vyčísliť hodnotu cenných papierov v dátume ekvivalencie:

$$K_0 = \frac{492 \text{ p.j.}}{\left(1 + 0,073 \left(\frac{84}{365}\right)\right)} = \frac{495 \text{ p.j.}}{\left(1 + 0,073 \left(\frac{84+31}{365}\right)\right)} \doteq 483,87 \text{ p.j.}$$

ZLOŽENÉ ÚROKOVANIE

8. Nájdite budúcu hodnotu kapitálu 5000 p.j. po 10 rokoch vloženého na účet, ktorý poskytuje ročnú úrokovú sadzbu 0,05.

Riešenie:

$$K_0 = 5000 \text{ p.j.}, n = 10, r = 0,05, K_n = ? \text{ p.j.}$$

Máme:

$$K_n = K_0(1 + r)^n = (5000 \text{ p.j.})(1,05)^{10} \doteq 8144,47 \text{ p.j.}$$

Budúca hodnota kapitálu bude približne 8144,47 p.j.

9. Občan si otvoril účet v banke pri $r = 0,03$ p.a. a vložil naň 1000 p.j. Po troch rokoch vybral z účtu 500 p.j. Akou sumou bude môcť disponovať po ďalších štyroch rokoch?

Riešenie:

Označme n_1 prvé obdobie troch rokov, počas ktorých sa občanovi úročil počiatočný kapitál 1000 p.j., a budúcu hodnotu kapitálu ako K_{n_1} . Potom:

$$K_0 = 1000 \text{ p.j.}, r = 0,03, n_1 = 3, K_{n_1} = ? \text{ p.j.}$$

$$K_{n_1} = K_0(1 + r)^{n_1} = (1000 \text{ p.j.})(1,03)^3 \doteq 1092,73 \text{ p.j.}$$

Hodnota kapitálu po troch rokoch teda bola približne 1092,73 p.j., z ktorej občan odobral 500 p.j. Teda na účte ostalo asi 592,73 p.j., ktoré boli úročené ďalšie štyri roky.

Označme n_2 druhé obdobie štyroch rokov, počas ktorých sa občanovi úročil kapitál $K_0^N = (1000(1,03)^3 - 500)$ p.j. (horný index N značí „novú“ hodnotu počiatočného kapitálu), a budúcu hodnotu tohto kapitálu ako $K_{n_2}^N$. Potom:

$$K_0^N = (1000(1,03)^3 - 500) \text{ p.j.}, r = 0,03, n_2 = 4, K_{n_2}^N = ? \text{ p.j.}$$

$$K_{n_2}^N = K_0^N(1 + r)^{n_2} = ((1000(1,03)^3 - 500) \text{ p.j.})(1,03)^4 \doteq 667,12 \text{ p.j.}$$

Po ďalších štyroch rokoch teda bude môcť občan disponovať sumou približne 667,12 p.j.

10. Aká je súčasná hodnota cenného papiera, ktorý poskytuje ročnú úrokovú sadzbu $r = 0,01$ pri zloženom úrokovaní, ak o 5 rokov vypláca (nominálnu) hodnotu 1500 p.j.?

Riešenie:

$$\boxed{K_n = 1500 \text{ p.j.}, r = 0,01, n = 5, K_0 = ? \text{ p.j.}}$$

Zo vzťahu $K_n = K_0(1 + r)^n$ dostaneme:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n} = K_n(1 + r)^{-n} = (1500 \text{ p.j.})(1,01)^{-5} \doteq 1427,2 \text{ p.j.}$$

Súčasná hodnota cenného papiera je približne 1427,2 p.j.

11. Uvažujte 6 % p.a. Koľko rokov (zaokrúhlite na celé roky) je pri tejto úrokovej miere potrebné zloženým úrokováním úročiť kapitál K_0 , aby vzrástol na dvojnásobok?

Riešenie:

$$\boxed{K_0 > 0 \text{ p.j.}, p = 6 \%, K_n = 2K_0, n = ?}$$

Máme:

$$r = \frac{p}{100} = 0,06$$

Zo vzťahu $K_n = K_0(1 + r)^n$ dostaneme:

$$\ln K_n = \ln(K_0(1 + r)^n)$$

$$\ln K_n = \ln K_0 + \ln(1 + r)^n$$

$$\ln K_n - \ln K_0 = n \ln(1 + r)$$

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1 + r)} = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(1 + r)}$$

Z toho máme:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{2K_0}{K_0}\right)}{\ln(1 + 0,06)} = \frac{\ln 2}{\ln 1,06} = 11,89 \dots \doteq 12$$

Je potrebné ho úročiť 12 rokov.

12. Pri akej ročnej úrokovej sadzbe je úročený vklad 100 p.j. na termínovanom účte v banke, ak za 2 roky vzrastie na 121 p.j.?

Riešenie:

$$\boxed{K_0 = 100 \text{ p.j.}, K_n = 121 \text{ p.j.}, n = 2, r = ?}$$

Zo vzťahu $K_n = K_0(1 + r)^n$ dostaneme:

$$\frac{K_n}{K_0} = (1 + r)^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = 1 + r$$

$$r = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Z toho máme:

$$r = \sqrt{1,21} - 1 = \sqrt{(1,1)^2} - 1 = 1,1 - 1 = 0,1$$

Deje sa tak pri ročnej úrokovej sadzbe 0,1.

13. Dlžník má zaplatiť veriteľovi dve dlžoby: 1200 p.j. za 5 rokov a 1500 p.j. za 9 rokov pri dohodnutej ročnej úrokovej sadzbe $r = 0,09$. Po čase si to dlžník rozmyslel a chce zaplatiť obe dlžoby jednou splátkou po 7 rokoch. Veriteľ súhlasí. Aká vysokú platbu veriteľ obdrží od dlžníka po 7 rokoch?

Riešenie:

Vzhľadom k novému termínu platby po siedmich rokoch je dlh 1500 p.j. pôvodne splatný za 9 rokov budúca hodnota a preto je potrebné túto sumu odúročiť (diskontovať) za obdobie dvoch rokov späť. Naopak dlh 1200 p.j. pôvodne splatný za 5 rokov je potrebné ešte dva roky úročiť, aby sme zistili jeho budúcu hodnotu. Sčítaním takto získaných súm dostaneme hodnotu výslednej platby.

Označme $K_0 = 1200$ p.j. hodnotu dlhu pôvodne splatného po 5 rokoch v čase 5 rokov. Jeho budúcu hodnotu v čase 7 rokov označme K_2 .

Označme $\bar{K}_2 = 1500$ p.j. hodnotu dlhu pôvodne splatného po 9 rokoch v čase 9 rokov. Jeho hodnotu v čase 7 rokov označme $\bar{K}_0$. Potom hodnota S výslednej platby bude $S = K_2 + \bar{K}_0$.

Počítajme:

$$\begin{aligned} K_2 &= K_0(1+r)^{(7-5)} = (1200 \text{ p.j.})(1,09)^2 \\ \bar{K}_0 &= \bar{K}_2(1+r)^{(7-9)} = (1500 \text{ p.j.})(1,09)^{-2} \\ S &= K_2 + \bar{K}_0 = (1200 \text{ p.j.})(1,09)^2 + (1500 \text{ p.j.})(1,09)^{-2} \\ &\doteq 2688,24 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Veriteľ obdrží od dlžníka po 7 rokoch platbu vo výške 2688,24 p.j.

14. Uvažujte rovnaké dlžoby a podmienky ich uhradenia ako zo začiatku predchádzajúcej úlohy. Predpokladajte, že teraz chce dlžník vyrovnať dlh dvoma rovnako vysokými splátkami S po treťom a šiestom roku. Určte ich výšku.

Riešenie:

Vzhľadom k dvom rovnakým splátkam v rôznych časoch je potrebné určiť jeden referenčný čas, ku ktorému budeme vypočítavať hodnotu dlhu, ako i súhrnnú hodnotu oboch splátok. Nech je avizovaný referenčný čas 3 roky od teraz (teda termín prvej splátky). K tomuto termínu musí byť (súčasná) hodnota oboch dlhov aj oboch splátok rovnaká, preto musí platiť:

$$(1200 \text{ p.j.})(1+r)^{-2} + (1500 \text{ p.j.})(1+r)^{-6} = S + S(1+r)^{-3}$$

Odtiaľ:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(1200 \text{ p.j.})(1+r)^{-2} + (1500 \text{ p.j.})(1+r)^{-6}}{1 + (1+r)^{-3}} \\ &= \frac{1200(1+r)^4 + 1500}{(1+r)^6 + (1+r)^3} \text{ p.j.} = \frac{1200(1,09)^4 + 1500}{(1,09)^6 + (1,09)^3} \text{ p.j.} \\ &\doteq 1074,62 \text{ p.j.} \end{aligned}$$

Veriteľ obdrží od dlžníka po 3 rokoch a po 6 rokoch rovnako vysokú splátku vo výške približne 1074,62 p.j.