

ŠPECIÁLNE PRÍPADY OCEŇOVANIA DERIVÁTOV

Základy finančnictva

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva>

JEDNODUCHÝ BINÁRNY STROM

- Vychádzajme z teórie oceňovania derivátov na princípe žiadna arbitráž využívajúcej riziko-neutrálne pravdepodobnosti.
- Uvažujme jednokrokový model aplikovaný na nasledujúci strom hodnôt podkladového aktíva:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & S_{up} = uS_{now} \\ S_{now} & & \\ & \searrow & S_{down} = dS_{now} \end{array}$$

- kde $u > d > 0$ sú násobky ceny S_{now} aktíva pri skoku nahor (s pp. p), resp. nadol (s pp. $1 - p$) za čas T , počas ktorého predpokladáme konštantnú úrokovú sadzbu R .
- Potom riziko-neutrálna pravdepodobnosť na tomto strome bude:

$$q = \frac{S_{now}e^{rT} - dS_{now}}{uS_{now} - dS_{now}} = \frac{e^{rT} - d}{u - d}. \quad (1)$$

BINÁRNY STROM

- V prípade, že uvažujeme viac vetiev binárneho stromu než len jednu (tj. viac období dĺžky ΔT), má použitie $S_{up} = uS_{now}$ (pri pohybe v jednom kroku smerom nahor), resp. $S_{down} = dS_{now}$ (pri pohybe v jednom kroku smerom nadol) ďalšiu výhodu a totiž, že s pridávaním ďalších vetiev (tj. pridávaním ďalších časových krokov) narastá počet uzlov stromu polynomiálne a nie exponenciálne.
- Každý uzol, ktorý nie je horným, resp. spodným uzlom v jednom časovom kroku, je totiž rovnaký pri pohybe hornej ceny aktíva z predchádzajúceho kroku smerom nadol alebo spodnej ceny aktíva z predchádzajúceho kroku smerom nahor:

$$S_{up} = uS_{now}$$



$$dS_{now} = uS_{now}$$



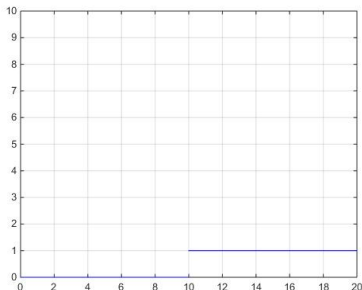
$$S_{down} = dS_{now}$$

BINÁRNY STROM

- Takýto strom má rekombinantnú vlastnosť.
- Pri počte časových krokov n je počet koncových uzlov na strome s touto vlastnosťou $n + 1$, kým na strome bez tejto vlastnosti to je 2^n uzlov.
- Špeciálnym prípadom na binárnom strome je situácia, keď $d = \frac{1}{u}$. V tomto prípade si strom v párnom počte krokov zachováva stred ($duS_{now} = \frac{1}{u}uS_{now} = S_{now}$).
- Autori Cox, Ross a Rubinstein vo svojej práci z roku 1979 (Cox, J. C., S. A. Ross and M. Rubinstein: Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics* 7 (Oct., 1979), pp. 229-264) navrhovali položiť $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta T}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta T}}$, kde σ je volatilita (štandardná odchýlka-miera rizika) výnosnosti podkladového aktíva v období ΔT dostatočne krátkom.

BINÁRNA OPCIA TYPU CASH-OR-NOTHING

- Binárna opcia je call (put) opcia, ktorá v čase jej splatnosti vypláca pevne stanovenú výplatu B p.j. (typ opcie "bet" alebo "cash-or-nothing", v ďalšom skratka CON) v prípade, že hodnota podkladového aktíva je vyššia (nižšia) než realizačná cena K a v opačnom prípade vypláca 0 p.j.
- Výplatný diagram CON call opcie s $B = 1$ p.j. a $K = 10$ p.j. sa nachádza na nasledujúcom obrázku:



BINÁRNA CALL OPCIA TYPU CASH-OR-NOTHING

- Z definície CON call opcie vyplýva, že na jednoduchom binárnom strome bude $f_{up} = B$, ak $S_{up} > K$ a $f_{up} = 0 = f_{down}$, ak $S_{up} \leq K$; $f_{down} = 0$, ak $S_{down} \leq K$ a $f_{down} = B = f_{up}$, ak $S_{down} > K$.
- Hodnotu derivátu f_{now} potom vypočítame ako $f_{now} = e^{-RT} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$, kde $q = \frac{e^{RT} - d}{u - d}$ je riziko-neutrálna pp. na strome.
- Pri viackrokovom modeli počítame hodnoty derivátu spätne od koncových uzlov až po začiatkový využívajúc vzťah $f_{now} = e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$ s riziko-neutrálnou pravdepodobnosťou $q = \frac{e^{R\Delta T} - d}{u - d}$, ktorá je na celom strome rovnaká.
- Pri CON opciách s $K = S_0$ je však používanie viackrokového modelu s párnym počtom krokov so stromom, na ktorom platí $u = \frac{1}{d}$, nevhodné a vedie k nesprávnemu oceňovaniu.

BINÁRNA PUT OPCIA TYPU CASH-OR-NOTHING

- Z definície CON put opcie vyplýva, že na jednoduchom binárnom strome bude $f_{down} = B$, ak $S_{down} < K$ a $f_{down} = 0 = f_{up}$, ak $S_{down} \geq K$; $f_{up} = 0$, ak $S_{up} \geq K$ a $f_{down} = B = f_{up}$, ak $S_{up} < K$.
- Hodnotu CON put opcie f_{now} potom vypočítame rovnako ako pri CON call opcii pomocou vzťahu $f_{now} = e^{-RT} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$, kde $q = \frac{e^{RT} - d}{u - d}$ je riziko-neutrálna pp. na strome.
- Pri viackrokovom modeli počítame hodnoty derivátu spätne od koncových uzlov až po začiatkový využívajúc vzťah $f_{now} = e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$ s riziko-neutrálnou pravdepodobnosťou $q = \frac{e^{R\Delta T} - d}{u - d}$.
- Aj tu platí poznámka o strome, na ktorom $u = \frac{1}{d}$, uvedená pri CON call opciách.

PUT-CALL PARITA PRI BINÁRNYCH OPCIÁCH TYPU CASH-OR-NOTHING

- Uvažujme jednu binárnu call opciu a jednu binárnu put opciu typu CON s dobou splatnosti T vypísané na to isté podkladové aktívum s rovnakou K ,
- nech R označuje úrokovú sadzbu na obdobie T , konštantnú počas tohto obdobia.
- Označme B_t^C - hodnotu CON call opcie a B_t^P - hodnotu CON put opcie v čase $t \in \langle 0, T \rangle$, potom platí:

$$B_t^P + B_t^C = Be^{-R(T-t)}. \quad (2)$$

- Stačí si uvedomiť, že portfólio pozostávajúce z jednej CON call opcie a jednej CON put opcie vypláca v čase T výplatu B (buď ju vypláca call opcia, ak $S_T > K$, kde S_T je hodnota podkladového aktíva v čase T , alebo ju vypláca put opcia, ak $S_T < K$).
- Aby nebola arbitráž, v čase t musí platiť (2).

PUT-CALL PARITA PRI BINÁRNYCH OPCIÁCH TYPU CASH-OR-NOTHING

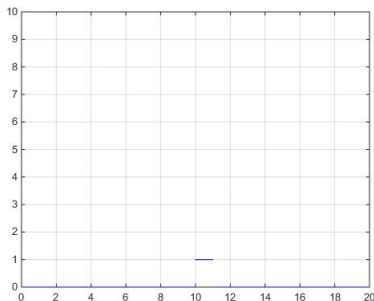
- Špeciálne v čase 0 potom podľa (2) platí:

$$B_0^P + B_0^C = Be^{-RT}. \quad (3)$$

- Predchádzajúca úvaha nepokrýva situáciu, keď $S_T = K$, ktorá je vzhľadom k tvrdeniu (2), resp. (3) problematická, keďže v tomto prípade $B_T^P = B_T^C = 0$. Avšak pravdepodobnosť, že nastane $S_T = K$, je prakticky nulová a preto je možné korektne tieto vzťahy používať.
- Dokonca aj samotná definícia binárnej opcie je v niektorých zdrojoch uvádzaná bez zahrnutia možnosti $S_T = K$.
- **Poznámka:** V opačnom prípade je potrebné vyhnúť sa oceňovaniu binárnych opcií s $K = S_0$ p.j. viackrokovým modelom s párnym počtom krokov na strome, na ktorom platí $u = \frac{1}{d}$, pretože takéto stromy sú na oceňovanie týchto opcií nevhodné.

SUPER SHARE

- Super share je typ opcie, ktorá v čase jej splatnosti vypláca výplatu $\frac{1}{K_2 - K_1}$ p.j. v prípade, že hodnota podkladového aktíva je vyššia než dohodnutá cena K_1 a nižšia než dohodnutá cena $K_2 > K_1$. V opačnom prípade vypláca 0 p.j.
- Ide vlastne o stávkku, že cena aktíva v dobe splatnosti opcie bude ležať v intervale (K_1, K_2) .



Obr.: Výplatný diagram držiteľa super share s $K_1 = 10$, $K_2 = 11$.

SUPER SHARE

- Ak bude cena aktíva v dobe splatnosti opcie ležať v intervale (K_1, K_2) , opcia vypláca $\frac{1}{K_2 - K_1}$ p.j, teda výplata je proporcionálne tým nižšia, čím je dĺžka intervalu (K_1, K_2) väčšia.
- Ide vlastne o opciu, ktorú je možné vyskladať ako portfólio pozostávajúce z jednej CON call opcie s $K = K_1$ (označme ako opcia 1) a mínus jednej CON call opcie s $K = K_2$ (označme ako opcia 2) obe vyplácajúce $B = \frac{1}{K_2 - K_1}$.
- V čase T splatnosti oboch opcií budú opcie vyplácať podľa nasledujúcej tabuľky:

Ak:	opcia 1	opcia 2
$S_T \leq K_1$	0	0
$K_1 < S_T \leq K_2$	$\frac{1}{K_2 - K_1}$	0
$K_2 < S_T$	$\frac{1}{K_2 - K_1}$	$\frac{1}{K_2 - K_1}$

SUPER SHARE

- Držiteľ takéhoto portfólia (tj. držiteľ opcie 1 a vypisovateľ opcie 2) dostane v čase T nasledujúce výplaty:

Ak:	výplata
$S_T \leq K_1$	0
$K_1 < S_T \leq K_2$	$\frac{1}{K_2 - K_1}$
$K_2 < S_T$	$\frac{1}{K_2 - K_1} - \frac{1}{K_2 - K_1} = 0$

- Označme B_0^{C1} hodnotu opcie 1 v čase 0 a B_0^{C2} hodnotu opcie 2 v čase 0.
- Keďže portfólio robí to isté, čo derivát, musia mať v čase 0 rovnakú hodnotu:

$$f_{now} = B_0^{C1} - B_0^{C2}. \quad (4)$$

- Rovnako je možné vyskladať tento derivát ako portfólio pozostávajúce z jednej CON put opcie s $K = K_2$ (označme ako opcia $P2$) a mínus jednej CON put opcie s $K = K_1$ (označme ako opcia $P1$) obe vyplácajúce $B = \frac{1}{K_2 - K_1}$.

SUPER SHARE

- Označme B_0^{P1} hodnotu opcie $P1$ v čase 0 a B_0^{P2} hodnotu opcie $P2$ v čase 0.
- Keďže portfólio robí to isté, čo derivát, musia mať v čase 0 rovnakú hodnotu:

$$f_{now} = B_0^{P2} - B_0^{P1}. \quad (5)$$

- Ukážeme, že vzťahy (4) a (5) sú ekvivalentné, teda, že platí:

$$B_0^{C1} - B_0^{C2} = f_{now} = B_0^{P2} - B_0^{P1}.$$

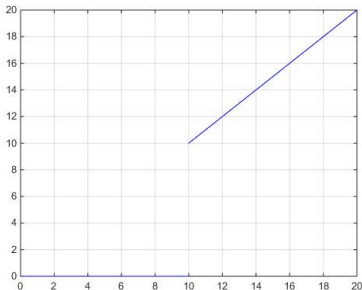
- Upravujeme:

$$\begin{aligned} f_{now} - f_{now} &= B_0^{P2} - B_0^{P1} - B_0^{C1} + B_0^{C2} \\ &= \left(\frac{1}{K_2 - K_1} \right) e^{-RT} - \left(\frac{1}{K_2 - K_1} \right) e^{-RT} = 0, \end{aligned}$$

kde sme využili vzťah (3).

ASSET-OR-NOTHING

- **Asset-or-nothing** (ďalej skratka AON) je typ binárnej opcie - call (put), ktorý v čase jej splatnosti T vypláca hodnotu aktíva S_T p.j. v prípade, že hodnota podkladového aktíva je vyššia (nižšia) než realizačná cena K a v opačnom prípade vypláca 0 p.j.
- Výplatný diagram asset-or-nothing call s $K = 10$ p.j. sa nachádza na nasledujúcom obrázku:



ASSET-OR-NOTHING CALL

- Z definície AON call vyplýva, že na jednoduchom binárnom strome bude $f_{up} = S_{up}$, ak $S_{up} > K$ a $f_{up} = 0 = f_{down}$, ak $S_{up} \leq K$; $f_{down} = 0$, ak $S_{down} \leq K$ a $f_{down} = S_{down}$, resp. $f_{up} = S_{up}$, ak $S_{down} > K$.
- Hodnotu derivátu f_{now} potom vypočítame ako $f_{now} = e^{-RT} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$, kde $q = \frac{e^{RT} - d}{u - d}$ je riziko-neutrálna pp. na strome.
- Pri viackrokovom modeli počítame hodnoty derivátu spätne od koncových uzlov až po začiatkový využívajúc vzťah $f_{now} = e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$ s riziko-neutrálnou pravdepodobnosťou $q = \frac{e^{R\Delta T} - d}{u - d}$, ktorá je na celom strome rovnaká.
- Pri asset-or-nothing call s $K = S_0$ je používanie viac-krokového modelu s párnym počtom krokov so stromom, na ktorom platí $u = \frac{1}{d}$, nevhodné a vedie k nesprávnemu oceňovaniu.

ASSET-OR-NOTHING PUT

- Z definície AON put vyplýva, že na jednoduchom binárnom strome bude $f_{down} = S_{down}$, ak $S_{down} < K$ a $f_{down} = 0 = f_{up}$, ak $S_{down} \geq K$; $f_{up} = 0$, ak $S_{up} \geq K$ a $f_{down} = S_{down}$, resp. $f_{up} = S_{up}$, ak $S_{up} < K$.
- Hodnotu AON put f_{now} potom vypočítame rovnako ako pri AON call pomocou vzťahu $f_{now} = e^{-rT} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$, kde $q = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$ je riziko-neutrálna pp. na strome.
- Pri viackrokovom modeli počítame hodnoty derivátu spätne od koncových uzlov až po začiatkový využívajúc vzťah $f_{now} = e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$ s riziko-neutrálnou pravdepodobnosťou $q = \frac{e^{R\Delta T} - d}{u - d}$.
- Aj tu platí poznámka o strome, na ktorom $u = \frac{1}{d}$, uvedená pri asset-or-nothing call.

PUT-CALL PARITA

- Uvažujme jeden AON call a jeden AON put s dobou splatnosti T vypísané na to isté podkladové aktívum s rovnakou K , nech R označuje úrokovú sadzbu na obdobie T , konštantnú počas tohto obdobia.
- Označme A_t^C - hodnotu AON call, A_t^P - AON put a S_t - hodnotu aktíva v čase $t \in \langle 0, T \rangle$, potom platí:

$$A_t^P + A_t^C = S_t. \quad (6)$$

- Stačí si uvedomiť, že portfólio pozostávajúce z jedného AON call a jedného AON put vypláca v čase T výplatu S_T (buď ju vypláca AON call, ak $S_T > K$, alebo ju vypláca AON put, ak $S_T < K$). Možnosť $S_T = K$ vylučujeme.
- Aby nebola arbitráž, musí byť splnené (6). Špeciálne v čase 0 potom platí:

$$A_0^P + A_0^C = S_0. \quad (7)$$

EURÓPSKE OPCIE NA AKTÍVUM NEVYPLÁCAJÚCE DIVIDENDU

- Z predchádzajúceho vyplýva, že **kúpnu (call) opciu európskeho typu** možno vyskladať pomocou kúpy jednej binárnej call opcie asset-or-nothing a predaja jednej binárnej call opcie cash-or-nothing s $B = K$.
- **Predajnú (put) opciu európskeho typu** možno vyskladať pomocou kúpy jednej binárnej put opcie cash-or-nothing s $B = K$ a predaja jednej binárnej put opcie asset-or-nothing.
- Označme $C_0(P_0)$ - hodnotu európskej call (put) opcie v čase 0, $A_0^C(A_0^P)$ - hodnotu asset-or-nothing call (put) v čase 0 a $B_0^C(B_0^P)$ - hodnotu cash-or-nothing call (put) s $B = K$ v čase 0, potom platí:

$$C_0 = A_0^C - B_0^C \quad (8)$$

$$P_0 = B_0^P - A_0^P \quad (9)$$

PUT-CALL PARITA PRE EURÓPSKE OPCIE

- Vieme, že pre európske opcie platí vzťah:
 $S_0 + P_0 - C_0 = Ke^{-RT}$ vyjadrujúci kúpno-predajnú paritu.
- Rovnaký vzťah medzi európskymi opciami by sme mali dostať, ak použijeme na vyjadrenie hodnôt C_0 , resp. P_0 vzťah (8), resp. (9) a put-call paritu (6) pre asset-or-nothing opcie: $A_0^C + A_0^P = S_0$, resp. put-call paritu (2):
 $B_0^C + B_0^P = Ke^{-RT}$ pre cash-or-nothing opcie s $B = K$.
- Skutočne je tomu tak:

$$\begin{aligned} S_0 + P_0 - C_0 &= S_0 + B_0^P - A_0^P - A_0^C + B_0^C = \\ &= S_0 - (A_0^C + A_0^P) + (B_0^C + B_0^P) = \\ &= S_0 - S_0 + Ke^{-RT} = Ke^{-RT} \end{aligned}$$

OPCIE DÍVAJÚCE SA SPÄŤ

- **Lookback opcie** sú opcie na aktívum, ktorých výplata závisí na maximálnej alebo minimálnej hodnote aktíva dosiahnutej počas doby trvania (splatnosti) opcie.
- Ak je výplata opcie na konci doby trvania opcie určená (nezáporným) rozdielom maximálnej (minimálnej) hodnoty aktíva a hodnoty aktíva v čase splatnosti opcie, tak opciu voláme **plávajúcou** dozadu hľadiacou put (call) opciou.
- Ak je pevne určená realizačná cena K v čase splatnosti opcie a výplata opcie závisí od (kladného) rozdielu maximálnej (minimálnej) hodnoty aktíva počas doby trvania opcie a realizačnej ceny K , tak opciu voláme **fixnou** call (put) dozadu hľadiacou opciou. V prípade, že spomínaný rozdiel kladný nie je, opcia nevypláca nič.

OCEŇOVANIE LOOKBACK OPCÍÍ

- Budeme uvažovať oceňovanie lookback opcií na aktívum nevyplácajúce dividendy.
- Pri oceňovaní takýchto opcií si treba uvedomiť, že hodnota opcie v čase jej splatnosti, tj. v niektorom z koncových uzlov, závisí od cesty, po ktorej je možné sa do tohto uzlu dostať, pretože aj maximálna (minimálna) hodnota aktíva bude závisieť od tejto cesty.
- Oceňme plávajúcu aj fixnú call aj put lookback opciu na jednoduchom binárnom strome, na ktorom pre pohyb ceny aktíva platí:

$$\begin{array}{c} S_{up} = uS_{now} \\ \nearrow \\ S_{now} \\ \searrow \\ S_{down} = dS_{now} \end{array}$$

OCEŇOVANIE PLÁVAJÚCICH LOOKBACK OPCÍÍ

- Predpokladajme: $S_{down} < S_{now} \leq S_{now}e^{RT} < S_{up}$.
- Najprv oceňme plávajúcu call (put) lookback opciu.
- Hodnoty derivátu sú pre obe udalosti zaznačené v pravej časti tabuľky:

udalosť	S_{min}	S_{max}	C_T (call)	P_T (put)
S_{up}	S_{now}	S_{up}	$S_{up} - S_{now}$	0
S_{down}	S_{down}	S_{now}	0	$S_{now} - S_{down}$

- Označme C_{now} - hodnotu call opcie v čase 0 a P_{now} - hodnotu put opcie v čase 0, potom:

$$C_{now} = e^{-RT} q (S_{up} - S_{now}), \quad (10)$$

$$P_{now} = e^{-RT} (1 - q) (S_{now} - S_{down}), \quad (11)$$

- kde $q = \frac{S_{now}e^{RT} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}$ je riziko-neutrálna pp.

OCEŇOVANIE FIXNÝCH LOOKBACK OPCÍÍ

- Predpokladáme: $S_{down} < S_{now} \leq S_{now}e^{RT} < S_{up}$.
- Hodnoty opcií v čase T sú pre všetky možné hodnoty K zaznačené v tabuľke:

K	udalosť	S_{min}	S_{max}	C_T^F (call)	P_T^F (put)
$K \geq S_{up}$	S_{up}	S_{now}	S_{up}	0	$K - S_{now}$
	S_{down}	S_{down}	S_{now}	0	$K - S_{down}$
$S_{down} < K < S_{up}$	S_{up}	S_{now}	S_{up}	$S_{up} - K$	$(K - S_{now})^+$
	S_{down}	S_{down}	S_{now}	$(S_{now} - K)^+$	$K - S_{down}$
$K \leq S_{down}$	S_{up}	S_{now}	S_{up}	$S_{up} - K$	0
	S_{down}	S_{down}	S_{now}	$S_{now} - K$	0

- Označme C_{now}^F - hodnotu fixnej lookback call opcie v čase 0 a P_{now}^F - hodnotu fixnej lookback put opcie v čase 0.

OCENOVANIE FIXNÝCH LOOKBACK OPCÍÍ

- Hodnoty opcií v čase 0 sú pre $K \geq S_{up}$ nasledujúce:

$$C_{now}^F = 0 \quad (12)$$

$$P_{now}^F = e^{-RT} (q(K - S_{now}) + (1 - q)(K - S_{down})) \quad (13)$$

- Hodnoty opcií v čase 0 sú pre $S_{down} < K < S_{up}$ nasledujúce:

$$C_{now}^F = e^{-RT} (q(S_{up} - K) + (1 - q)(S_{now} - K)^+) \quad (14)$$

$$P_{now}^F = e^{-RT} (q(K - S_{now})^+ + (1 - q)(K - S_{down})) \quad (15)$$

- Hodnoty opcií v čase 0 sú pre $K \leq S_{down}$ nasledujúce:

$$C_{now}^F = e^{-RT} (q(S_{up} - K) + (1 - q)(S_{now} - K)) \quad (16)$$

$$P_{now}^F = 0 \quad (17)$$

PUT-CALL PARITA

- Pri ohodnocovaní dozadu hľadiacich opcií viackrokovým modelom oceňovania na binárnom strome postupujeme rovnako ako pri oceňovaní európskych opcií, t.j. idúc od koncových uzlov stromu pre derivát smerujeme k jeho koreňu a hodnotíme opcie v čase 0.
- Oceňovanie lookback opcií na viackrokovom binárnom strome je pomerne náročná úloha, pretože je nutné dosledovať maximálnu a minimálnu hodnotu aktíva na každej ceste pre každý koncový uzol. Tým sa pochopiteľne objem výpočtov môže značne navýšiť.
- Medzi lookback opciami však existuje parita, ktorá umožňuje dopočítať hodnotu fixných opcií pomocou plávajúcich opcií.
- Označme $S_{max}^* = \max\{S_{max}, K\}$ a $S_{min}^* = \min\{S_{min}, K\}$, kde S_{max} (S_{min}) je maximálna (minimálna) hodnota aktíva dosiahnutá počas doby trvania T opcie a K je realizačná cena fixných opcií.

PUT-CALL PARITA

- Nech C_{now}^* (P_{now}^*) označuje hodnotu plávajúcej call (put) opcie v čase 0, v ktorej je S_{min} (S_{max}) zamenené za S_{min}^* (S_{max}^*).
- Ako v predchádzajúcom nech C_{now}^F je hodnota fixnej call opcie v čase 0, P_{now}^F je hodnota fixnej put opcie v čase 0 a S_{now} je hodnota aktíva v čase 0.
- Potom platia vzťahy:

$$C_{now}^F = P_{now}^* + S_{now} - Ke^{-RT} \quad (18)$$

$$P_{now}^F = C_{now}^* + Ke^{-RT} - S_{now} \quad (19)$$

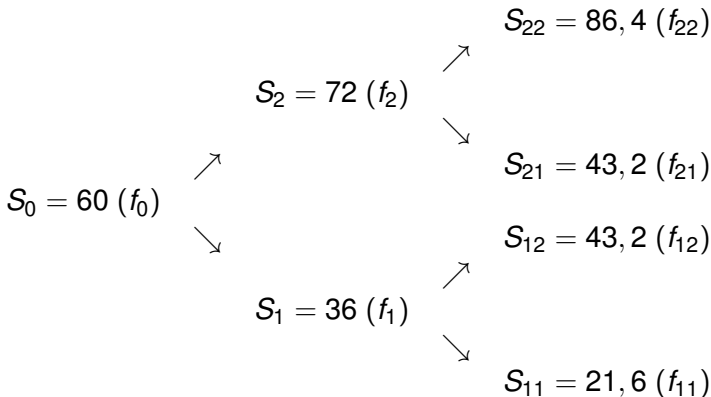
Poznámka: Pri oceňovaní lookback opcií je potrebné si uvedomiť, že hodnota opcie je veľmi citlivá na to, ako často hodnotu aktíva počas doby trvania opcie sledujeme (od toho závisí maximálna, resp. minimálna hodnota aktíva) a na základe toho potom treba vybrať vhodný binárny strom.

ÁZIJSKÉ OPCIE

- **Ázijské opcie** sú opcie na aktívum, ktorých výplata závisí na aritmetickom priemere hodnôt aktíva pozorovaných počas doby trvania (splatnosti) opcie.
- Ak je výplata opcie na konci doby trvania opcie určená ako $\max\{0, \bar{S} - K\}$, kde $\bar{S}$ je priemerná cena aktíva a K je realizačná cena, tak opciu voláme **average price call**.
- Ak je výplata opcie na konci doby trvania opcie určená ako $\max\{0, K - \bar{S}\}$, kde $\bar{S}$ je priemerná cena aktíva a K je realizačná cena, tak opciu voláme **average price put**.
- Aj pri týchto opciách platí, že hodnota opcie v čase jej splatnosti, tj. v niektorom z koncových uzlov pri oceňovaní na binárnom strome, závisí od cesty, po ktorej je možné sa do tohto uzlu dostať, keďže priemerná hodnota aktíva závisí od tejto cesty.

PRÍKLAD

- Uvažujme nasledujúci binárny strom vývoja ceny podkladového aktíva (v každom uzle v zátvorkách za cenou aktíva uvedené označenie hodnoty derivátu v tomto uzle):



PRÍKLAD

- Vypočítajme hodnotu average price call opcie na toto aktívum, ak realizačná cena $K = 51,8$ a $R = 0$ je bezriziková úroková sadzba na obdobie T maturity opcie.
- Keďže na celom strome máme $u = 1,2$ a $d = 0,6$, tak v uzloch $\{21\}$ a $\{12\}$ má aktívum tú istú hodnotu. Toto rozlíšenie je dôležité z hľadiska výpočtu ceny opcie, pretože do uzlu $\{12\}$ sa nedá dostať z uzlu $\{2\}$, kým do uzlu $\{21\}$ sa zas nedá dostať z uzlu $\{1\}$. Preto bude priemerná cena aktíva v uzle $\{21\}$ iná než v uzle $\{12\}$.
- Označme $\bar{S}_{ij}$ - priemernú hodnotu aktíva v koncovom uzle $\{ij\}$, potom: $\bar{S}_{22} = 72,8$, $\bar{S}_{21} = 58,4$, $\bar{S}_{12} = 46,4$, $\bar{S}_{11} = 39,2$.
- Hodnota call opcie v koncových uzloch bude: $\bar{f}_{22} = 21$, $\bar{f}_{21} = 6,6$, $\bar{f}_{12} = 0$, $\bar{f}_{11} = 0$.

PRÍKLAD

- Pretože $u = 1,2$ a $d = 0,6$, tak riziko-neutrálna pp. q je na celom strome rovnaká a platí:

$$q = \frac{S_{now} - 0,6S_{now}}{1,2S_{now} - 0,6S_{now}} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}.$$

- S využitím vzťahu $f_{now} = e^{-R\Delta T} (qf_{up} + (1 - q)f_{down})$, dostaneme hodnoty opcie v uzloch $\{2\}$, $\{1\}$ a $\{0\}$:
 - $f_2 = \frac{2}{3}f_{22} + \frac{1}{3}f_{21} = \frac{2}{3}21 + \frac{1}{3}6,6 = 16,2$,
 - $f_1 = \frac{2}{3}f_{12} + \frac{1}{3}f_{11} = \frac{2}{3}0 + \frac{1}{3}0 = 0$,
 - $f_0 = \frac{2}{3}f_2 + \frac{1}{3}f_1 = \frac{2}{3}16,2 + \frac{1}{3}0 = 10,8$.
- Hodnota takejto call opcie dnes je teda 10,8 p.j.