

DLHOPISY

Výnos do splatnosti, par yield, dlhopisy
s plávajúcimi kupónmi

Základy finančnictva

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva>

VÝNOS DO SPLATNOSTI

- **výnos do splatnosti** (yield to maturity) – y je výnosová sadzba (tiež, výnosová miera, resp. výnosové percento), pri ktorej sa bude súčasná hodnota budúcich príjmov z dlhopisu rovnáť súčasnej hodnote dlhopisu
- diskrétné úrokovanie:
- pretože súčasnú hodnotu V_n n -ročného kupónového dlhopisu vypočítame zo vzťahu

$$V_n = \sum_{t=1}^n \frac{C}{(1 + r_t)^t} + \frac{F}{(1 + r_n)^n},$$

- tak y dostaneme z rovnosti:

$$\sum_{t=1}^n \frac{C}{(1 + r_t)^t} + \frac{F}{(1 + r_n)^n} = \sum_{t=1}^n \frac{C}{(1 + y)^t} + \frac{F}{(1 + y)^n} \quad (1)$$

- pre $n > 2$ sa rieši numericky

VÝNOS DO SPLATNOSTI

- Uvažujme kupónový par bond (tj. dlhopis, ktorého súčasná hodnota V_n p.j. je rovná jeho NH F p.j.) s maturitou n rokov a ročným kupónom $C = cF$, tak $y = c \geq 0$.
- Ukážeme:

$$F = V_n = cF \sum_{t=1}^n \left(\frac{1}{1+y} \right)^t + F \left(\frac{1}{1+y} \right)^n,$$

$$1 = \frac{c}{(1+y)} \frac{1 - \left(\frac{1}{1+y} \right)^n}{1 - \frac{1}{1+y}} + \left(\frac{1}{1+y} \right)^n,$$

$$0 = \left(1 - \frac{c}{y} \right) \left(1 - \left(\frac{1}{1+y} \right)^n \right)$$

- tzn. $1 = \frac{c}{y}$ a teda $y = c$ alebo $1 = \left(\frac{1}{1+y} \right)^n$ a v tom prípade $y = 0$. Ak ale $y = 0$, tak $c = 0$ a teda opäť $y = c$.

VÝNOS DO SPLATNOSTI

- spojité úrokovanie:
- pretože súčasnú hodnotu $V(T_0, T)$ kupónového dlhopisu vypočítame zo vzťahu

$$V(T_0, T) = \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)},$$

- tak y dostaneme z rovnosti:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)} &= \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-y(T_i - T_0)} + F e^{-y(T_n - T_0)} \end{aligned} \quad (2)$$

- opäť numerický problém

VÝNOS DO SPLATNOSTI

- vo všeobecnosti: $y \neq R(T_0, T_n)$
- ak je však dlhopis bezkupónový, tak $y = R(T_0, T_n)$
- predpokladajme, že $R(T_0, T)$ je rastúca v T , potom dostávame:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-y(T_i - T_0)} + F e^{-y(T_n - T_0)} = \\ & \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)} > \\ & > \sum_{i=1}^n \Delta C e^{-R(T_0, T_n)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)} \end{aligned}$$

- a teda $y < R(T_0, T_n)$.

VÝNOS DO SPLATNOSTI

- v prípade par bond-u tvrdenie $y = c$ platné pri diskretnom úrokovaní s ročným vyplácaním kupónov platí pri spojitom úrokovaní len približne, pretože:

$$\begin{aligned} F = V &= cF \sum_{i=1}^n e^{-yi} + Fe^{-yn}, \\ 1 &= \frac{c}{e^y} \frac{1 - e^{-yn}}{1 - e^{-y}} + e^{-yn}, \\ 0 &= (1 - e^{-yn}) \left(\frac{c}{e^y - 1} - 1 \right) \end{aligned}$$

- tzn. buď $e^y = c + 1$ a teda $y = \ln(c + 1) \approx c$ alebo $0 = (1 - e^{-yn})$,
- v druhom prípade $y = c$, pretože $y = 0$ a v tom prípade aj $c = 0$.

PAR YIELD

- v literatúre sa môžeme stretnúť s pojmom „par yield“, myslí sa tým percentuálna výška kupónu z NH pri určitej maturite dlhopisu, ktorého aktuálna hodnota sa rovná jeho nominálnej hodnote (čiže ide o par bond)
- v prípade diskrétného úrokovania dostaneme výšku c z rovnosti:

$$F = \sum_{t=1}^n \frac{cF}{(1+r_t)^t} + \frac{F}{(1+r_n)^n},$$

- odkiaľ:

$$c = \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+r_n)^n}\right)}{\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+r_t)^t}} \quad (3)$$

PAR YIELD

- v prípade spojitého úrokovania dostaneme výšku c z rovnosti:

$$F = \sum_{i=1}^n c \Delta F e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)} + F e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)},$$

- odkiaľ:

$$c = \frac{1 - e^{-R(T_0, T_n)(T_n - T_0)}}{\Delta \sum_{i=1}^n e^{-R(T_0, T_i)(T_i - T_0)}} = \frac{1 - P(T_0, T_n)}{\Delta \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i)} \quad (4)$$

DLHOPISY S PLÁVAJÚCIMI KUPÓNMI

- floating rate bonds
- dopredu nie je výška kupónov daná; ujasňuje sa priebežne na základe pohybu úrokových sadzieb EURIBOR alebo LIBOR
- je však dané pravidlo úrokovania
- označme $L_{\Delta}(T)$ LIBOR(EURIBOR) sadzba na obdobie Δ od času T (napr. od dnes)
- potom hodnota diskontného dlhopisu na obdobie Δ bude pri diskretnom úrokovaní:

$$P(T, T + \Delta) = \frac{1}{1 + \Delta L_{\Delta}(T)}, \quad (5)$$

- z toho:

$$L_{\Delta}(T) = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{P(T, T + \Delta)} - 1 \right) \quad (6)$$

DLHOPISY S PLÁVAJÚCIMI KUPÓNMI

- uvažujme dlhopis s plávajúcimi kupónmi a NH rovnou 1 p.j.,
- nech v časoch $T_i = T_0 + i\Delta$, kde $i = 1, 2, \dots, n$, prichádzajú k majiteľovi dlhopisu kupóny vo výške $C_i = \Delta L_\Delta(T_{i-1})$,
- tzn. v čase T_{i-1} majiteľ dlhopisu vie, aký kupón dostane v čase T_i („vždy vidí jeden kupón dopredu“),
- v čase splatnosti dlhopisu T_n dostane majiteľ dlhopisu $1 + \Delta L_\Delta(T_{n-1})$
- potom **súčasná hodnota takéhoto dlhopisu je rovná 1 p.j.**

HODNOTA DLHOPISU S PLÁVAJÚCIMI KUPÓNMI

- ukážeme, že jeho hodnota je naozaj rovná 1 p.j.:
- použijeme „rolovacu stratégiu“ a taký dlhopis vyrobíme,
- uvažujme, že v čase T_0 použijeme 1 p.j. na nákup diskontného dlhopisu na obdobie $T_1 - T_0$ (ide o obdobie dĺžky Δ); keďže jeho hodnota je $P(T_0, T_1)$, tak za 1 p.j. dostaneme $\frac{1}{P(T_0, T_1)}$ kusov takéhoto dlhopisu,
- takže v čase T_1 nám $\frac{1}{P(T_0, T_1)}$ kusov takéhoto dlhopisu prinesie $\frac{1}{P(T_0, T_1)}$ p.j.,
- z tejto sumy odložíme bokom $\frac{1}{P(T_0, T_1)} - 1$ p.j. a zvyšok, tj. 1 p.j. použijeme na nákup ďalšieho diskontného dlhopisu na obdobie $T_2 - T_1$, ktorého hodnota je $P(T_1, T_2)$,
- dostaneme $\frac{1}{P(T_1, T_2)}$ kusov tohto dlhopisu, ktoré nám v čase T_2 prinesú $\frac{1}{P(T_1, T_2)}$ p.j.

ROLOVACIA STRATÉGIA

- postup opakujeme n krát, tj. do času T_{n-1} (vrátane),
- v čase splatnosti dlhopisu s plávajúcimi kupónmi T_n potom dostaneme $1 + \frac{1}{P(T_{n-1}, T_n)} - 1$ p.j. z poslednej držby dlhopisov,
- sumy, ktoré odkladáme bokom predstavujú výšku kupónov dlhopisu s plávajúcimi kupónmi a NH rovnou 1 p.j.,
- skutočne; zo vzťahu (6) máme:

$$C_i = \Delta L_{\Delta}(T_{i-1}) = \frac{\Delta}{\Delta} \left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1$$

- pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$,
- na konci (tj. v čase T_n) potom dostaneme $C_n + 1$ p.j., čo predstavuje súčet posledného kupónu a jednotkovej NH dlhopisu.

ROLOVACIA STRATÉGIA

- rovnaké závery dostaneme aj v prípade spojitého úrokovania, ak uvažujeme kupónový dlhopis s plávajúcimi kupónmi a NH rovnou 1 p.j., pričom kupóny prichádzajúce k majiteľovi dlhopisu v časoch $T_i = T_0 + i\Delta$ pre $i = 1, 2, \dots, n$ budú $C_i = e^{\Delta \bar{L}_\Delta(T_{i-1})} - 1$, kde

$$\bar{L}_\Delta(T) = \ln(1 + \Delta L_\Delta(T))^{\frac{1}{\Delta}}$$

- je spojitá úroková sadzba, ekvivalentná k diskkrétnej sadzbe $L_\Delta(T)$,
- pri zisťovaní hodnoty dlhopisu s plávajúcimi kupónmi a NH rovnou F p.j., stačí na to, aby sme ukázali, že súčasná hodnota takéhoto dlhopisu je rovná F p.j., zopakovať predchádzajúcu stratégiu, v ktorej pozmeníme výšku NH a výšku prichádzajúcich kupónov pre násobením F .

FORWARDOVÉ ÚROKOVÉ MIERY

- **Forward (forwardový kontrakt)**– dohoda o budúcom obchode; zmluva medzi dvoma stranami uzavretá v súčasnosti o povinnosti kúpiť alebo predat' nejaké podkladové aktívum („underlying asset“) v stanovenom čase v budúcnosti (dátum vypršania – „maturity“) za cenu stanovenú v súčasnosti
- uvažujme podkladové aktívum – diskontný dlhopis
- strany **A**, **B** sa dnes (v čase T_0) dohodnú, že v čase $T_1 > T_0$ strana **A** kúpi od strany **B** za dohodnutú cenu K diskontný dlhopis (tj. dlhopis s NH rovnou 1 p.j.) splatný v čase $T_2 > T_1$
- v čase T_1 jedna z tých dvoch strán bude stratová (prehrá), kým druhá zisková, pretože $P(T_1, T_2)$ nie je vopred jasné číslo

FORWARDOVÉ ÚROKOVÉ MIERY

- Pýtame sa, aké má byť K , aby hodnota kontraktu v čase T_0 bola rovná 0? Teda, aby to bol férový kontrakt pre obe strany.
- Kontrakt vieme „vyrobiť“:
- z pohľadu strany **A**: v čase T_0 predá K kusov dlhopisu $P(T_0, T_1)$ a kúpi 1 kus dlhopisu $P(T_0, T_2)$,
- bilancia v čase T_1 : $P(T_1, T_2) - K$,
- bilancia v čase T_0 : $KP(T_0, T_1) - P(T_0, T_2)$,
- aby hodnota kontraktu v čase T_0 bola rovná 0, musí platiť:

$$KP(T_0, T_1) - P(T_0, T_2) = 0,$$

- z toho:

$$K = \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$$

ARBITRÁŽNA PRÍLEŽITOSŤ

- ak $K < \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$, tak strana **A** prejaví záujem o kontrakt a k tomu nakúpi K kusov dlhopisu $P(T_0, T_1)$ a predá 1 kus dlhopisu $P(T_0, T_2)$
- pretože $K < \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$, tak je v čase T_0 v pluse
- v čase T_1 zaplatí sumu K za dlhopis plynúcu z kontraktu, ale dostane K p.j. z nominálnych hodnôt K kusov dlhopisov $P(T_0, T_1)$
- v čase T_2 dostane 1 p. j. ako NH dlhopisu z kontraktu a súčasne zaplatí 1 p. j. ako NH dlhopisu $P(T_0, T_2)$
- na trhu existuje arbitráž; veľký dopyt po dlhopisoch $P(T_0, T_1)$ tlačí ich cenu nahor, čím znižuje pomer $\frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$ na úroveň K

ARBITRÁŽNA PRÍLEŽITOSŤ

- ak by $K > \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$, strana **A** nemá záujem o takýto kontrakt, pretože si vie „vyrobiť“ lepšie K cez predchádzajúcu stratégiu
- naopak záujem o takýto kontrakt prejaví strana **B**; k tomu nakúpi 1 kus dlhopisu $P(T_0, T_2)$ a predá K kusov dlhopisu $P(T_0, T_1)$
- pretože $K > \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)}$, tak je v čase T_0 v pluse
- v čase T_1 obdrží sumu K p.j. za dlhopis plynúcu z kontraktu, ktorú použije na zaplatenie K p.j. z nominálnych hodnôt K kusov dlhopisov $P(T_0, T_1)$
- v čase T_2 dostane 1 p. j. ako NH dlhopisu $P(T_0, T_2)$ a súčasne zaplatí 1 p. j. ako NH dlhopisu z kontraktu
- aj v tomto prípade existuje arbitráž

SPOJITÁ FORWARDOVÁ ÚROKOVÁ MIERA

- realizačná cena K p. j., spĺňajúca

$$K = \frac{P(T_0, T_2)}{P(T_0, T_1)},$$

teda zaisťuje, že forwardový kontrakt na diskontný dlhopis je ohodnotený bezarbitrážne,

- takto nastavená realizačná cena zároveň určuje forwardovú úrokovú sadzbu, pretože reprezentuje cenu diskontného dlhopisu na budúce obdobie $T_2 - T_1$ dohodnutú dnes (v čase T_0),
- označme túto spojitú forwardovú sadzbu ako $F_0(T_1, T_2)$, potom:

$$e^{-F_0(T_1, T_2)(T_2 - T_1)} = K = \frac{e^{-R(T_0, T_2)(T_2 - T_0)}}{e^{-R(T_0, T_1)(T_1 - T_0)}},$$
$$F_0(T_1, T_2) = \frac{R(T_0, T_2)(T_2 - T_0) - R(T_0, T_1)(T_1 - T_0)}{T_2 - T_1}$$

FORWARDOVÉ ÚROKOVÉ MIERY

- diskrétny prístup:
- uvažujme, že 1 p. j. môžeme buď uložiť na 2 roky na účet v banke pri r_2 - úrokovej sadzbe na 2 roky (ekvivaletne investovať do nákupu dvojročných bezkupónových dlhopisov) alebo sa 1 p. j. zúročí nasledujúcim spôsobom: prvý rok sa bude úročiť pri r_1 - úrokovej sadzbe na 1 rok a nasledujúci rok pri $f_{1,2}$ - čo je forwardová úroková sadzba platná na 2.rok dohodnutá dnes
- aby nebola arbitráž, musí platiť:
 $(1 + r_1)(1 + f_{1,2}) = (1 + r_2)^2$,
- z toho:

$$\frac{1}{1 + f_{1,2}} = \frac{\frac{1}{(1+r_2)^2}}{\frac{1}{(1+r_1)}} \left(= \frac{P_2}{P_1} \right)$$

- resp.:

$$f_{1,2} = \frac{(1 + r_2)^2}{(1 + r_1)} - 1$$

FORWARDOVÉ ÚROKOVÉ MIERY

- vo všeobecnosti, ak $f_{i,j}$ označuje forwardovú úrokovú sadzbu na obdobie od roku i po rok j dohodnutú dnes, tak musí platiť:

$$(1 + r_i)^i (1 + f_{i,j})^{j-i} = (1 + r_j)^j$$

- odtiaľ:

$$f_{i,j} = \left(\frac{(1 + r_j)^j}{(1 + r_i)^i} \right)^{\frac{1}{j-i}} - 1$$