

ANALYTICKÉ A NUMERICKÉ METÓDY OCEŇOVANIA FINANČNÝCH DERIVÁTOV

Základy finančnictva

<http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva>

STOCHASTICKÝ CHARAKTER FINANČNÝCH AKTÍV

- cenu aktíva S sleduje istý trend (deterministická časť oceňovania aktíva), okolo ktorého nastávajú výkyvy - fluktuácie (stochastická časť oceňovania aktíva),
- cena aktíva=deterministická časť+fluktuačná časť,
- deterministická časť: $S(t) = S_0 e^{\mu t}$, kde S_0 - počiatočná cena aktíva, t - čas, μ - miera návratnosti (výnosová sadzba)
- vyjadrené cez prírastky:

$$dS = \mu S dt \quad (1)$$

- fluktuačná časť bude modelovaná náhodným procesom.

WIENEROV PROCES

- Stochastický proces je systém $\{X(t), t \in I\}$, I -interval, kde $X(t)$ sú náhodné premenné závisiace od času t .
- **Wienerov proces** $\{W(t), t \in I\}$ je spojitý stochastický proces definovaný na $I = \langle 0, \infty \rangle$ s nasledujúcimi charakteristikami:
 1. $W(0) = 0$,
 2. $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$,
 3. ak $(s, t) \cap (u, v) = \emptyset$, tak $W(t) - W(s)$ a $W(u) - W(v)$ sú nezávislé.
- Stochastický diferenciál dX stochastického procesu $\{X(t), t \in I\}$:

$$dX = \mu(t, X)dt + \sigma(t, X)dW, \quad (2)$$

kde dW - prírastok Wienerovho procesu, μ - drift, σ - volatilita.

BROWNOV POHYB

- Špeciálny prípad (2) je autonómny prípad, tj.

$$dX = \mu(X)dt + \sigma(X)dW, \quad (3)$$

- napr.:

$$dX = \mu Xdt + \sigma XdW, \quad (4)$$

- alebo:

$$dX = \mu dt + \sigma dW. \quad (5)$$

- V prípade (5) ide o **Brownov pohyb**, tj. Wienerov proces je Brownov pohyb s $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.
- Je vhodné modelovať vývoj ceny aktíva cez Brownov pohyb?
- Nie, pretože pre $\sigma = 0$ bude $dS = \mu dt + 0dW_t = \mu dt$ a teda $S(t) = S_0 + \mu t$, čo odporuje $S(t) = S_0 e^{\mu t}$.

GEOMETRICKÝ BROWNOV POHYB

- Lepšie bude uvažovať nejakú funkciu od Brownovho pohybu:
- ak $\sigma = 0$, tak máme (1), teda $dS = \mu S dt$,
- odtiaľ $\frac{dS}{S} = \mu dt$ a teda $d(\ln S) = \mu dt$.
- Vezmime $X = \ln S$, kde X vyhovuje (5), čiže $S = e^X$.
- Nech $\{X(t), t \in I\}$ je Brownov pohyb s driftom μ a volatilitou σ , potom náhodný proces $\{Y(t), t \in I\}$, kde $Y(t) = Y_0 e^{X(t)}$, $Y_0 \in \mathbb{R}$, nazývame **geometrický Brownov pohyb**.
- **Itô-ova lema:** Nech $f(x, t) \in C^2$ a x také, že $dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dW$, kde W - Wienerov proces. Potom f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW. \quad (6)$$

GEOMETRICKÝ BROWNOV POHYB

- Keďže $Y = Y_0 e^X$, tak podľa (6) máme:

$$\begin{aligned} dY &= \left(0 + \mu Y_0 e^X + \frac{1}{2} \sigma^2 Y_0 e^X \right) dt + \sigma Y_0 e^X dW \\ &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) Y dt + \sigma Y dW \end{aligned}$$

Označme $\tilde{\mu} := \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)$, potom

$$dY = \tilde{\mu} Y dt + \sigma Y dW$$

- Porovnaním s (4), dostávame, že geometrický Brownov pohyb je taký stochastický proces, ktorý vyhovuje (4).
- Vývoj ceny aktíva teda sleduje geometrický Brownov pohyb:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \quad (7)$$

NÁHODNOST V CENE DERIVÁTU

- Ak označíme cenu derivátu ako V , potom V závisí od ceny podkladového aktíva S a času t , tj. $V = V(S, t)$.
- Ak sú splnené predpoklady Itô-ovej lemy a cena podkladového aktíva sleduje geometrický Brownov pohyb (7), tak podľa (6) máme:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW. \quad (8)$$

PREDPOKLADY NA OCEŇOVANIE

- Pohyb ceny podkladového aktíva-akcie sa riadi geometrickým Brownovým pohybom (7),
- investor pri oceňovaní vytvára portfólio pozostávajúce z akcií jedného druhu, opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov, ktorých bezriziková úroková sadzba r je konštantná počas doby trvania opcie T ,
- investor uplatňuje dynamický predaj/kúpu jednotlivých zložiek portfólia tak, že:
 - na udržanie jeho nulovej rizikovosti nie sú potrebné žiadne ďalšie investície (**podmienka nulových investícií**),
 - nákup/predaj niektorej zo zložiek je kompenzovaný predajom/kúpou inej zložky (**podmienka samofinancovateľnosti portfólia**).
- Uvažujeme nulové transakčné náklady,
- je možné predat'/kúpiť ľubovoľné množstvo jednotlivých zložiek portfólia.

PODMIENKY SAMOFINANCOVANEJ STRATÉGIA

- **podmienka nulových investícií:** pre všetky $t \in \langle 0, T \rangle$

$$Q_S S + Q_V V + B = 0 \quad (9)$$

- **podmienka samofinancovateľnosti portfólia:**

$$dQ_S S + dQ_V V + \delta B = 0 \quad (10)$$

- Q_S - množstvo/počet kusov akcie S ,
- Q_V - množstvo/počet kusov opcie V ,
- B - množstvo/počet kusov bezrizikových dlhopisov:

$$B = B(t) = B(0)e^{rt} \quad (11)$$

$$\frac{dB}{dt} = rB(t) \quad (12)$$

$$dB = rBdt + \delta B \quad (13)$$

- kde δB - zmena finančného objemu dlhopisov potrebná na realizáciu nákupu ostatných zložiek portfólia.

SAMOFINANCOVANÁ STRATÉGIA

- Z podmienky nulových investícií (9) dostávame:

$$\begin{aligned} 0 &= d0 = d(Q_S S + Q_V V + B) \\ &= Q_S dS + dQ_S S + Q_V dV + dQ_V V + dB \end{aligned} \quad (14)$$

- Dosadením (13) do (14) získame:

$$\begin{aligned} 0 &= Q_S dS + dQ_S S + Q_V dV + dQ_V V + rBdt + \delta B \\ &= (dQ_S S + dQ_V V + \delta B) + (Q_S dS + Q_V dV + rBdt) \end{aligned} \quad (15)$$

- Dosadením (10) do (15) dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= Q_S dS + Q_V dV + rBdt \\ Q_V dV &= -Q_S dS - rBdt \\ dV &= -\frac{Q_S}{Q_V} dS - \frac{r}{Q_V} Bdt \end{aligned} \quad (16)$$

SAMOFINANCOVANÁ STRATÉGIA

- Dosadením (7) za dS do (16) a (9) za B do (16) dostávame:

$$\begin{aligned}dV &= -\frac{Q_S}{Q_V} (\mu S dt + \sigma S dW) - \frac{r}{Q_V} (-Q_S S - Q_V V) dt \\dV &= \left(-\frac{Q_S}{Q_V} \mu S + \frac{Q_S}{Q_V} r S + r V \right) dt - \frac{Q_S}{Q_V} \sigma S dW \quad (17)\end{aligned}$$

- Označme $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$, potom z (17) máme:

$$dV = (\Delta \mu S - \Delta r S + r V) dt + \Delta \sigma S dW \quad (18)$$

- Dosadením (8) za dV do (18) získame:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW = \\= (\Delta(\mu - r)S + rV) dt + \Delta \sigma S dW \quad (19)\end{aligned}$$

SAMOFINANCOVANÁ STRATÉGIA

- Po úprave:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \Delta(r - \mu)S - rV \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \sigma S dW = 0 \quad (20)$$

- Vzhľadom k tomu, že portfólio má byť bezrizikové, je potrebné z (20) eliminovať náhodný činiteľ $\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \sigma S dW$ spôsobujúci nenulovú rizikovosť portfólia.
- Príslušná neutralizácia tohto rizika sa dosiahne $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$.
- Po neutralizácii z (20) dostaneme:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \quad (21)$$

- rovnica (21) sa nazýva Blackova-Scholesova rovnica.

BLACKOVA-SCHOLESOVA ROVNICA

- Blackova-Scholesova rovnica (v ďalšom BS rovnica) je parciálna diferenciálna rovnica, ktorú možno riešiť prevedením na základný tvar parabolickej diferenciálnej rovnice.
- Pre európske opcie riešime BS rovnicu (21):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0,$$

kde $S > 0$, $t \in \langle 0, T \rangle$ a $V(S, T) = \bar{V}(S)$ je koncová podmienka.

- Pre európske call opcie je $\bar{V}(S) = \max\{0, S - K\}$,
- pre európske put opcie je $\bar{V}(S) = \max\{0, K - S\}$, kde K je realizačná cena opcie.

BLACKOVA-SCHOLESOVA ROVNICA

- Po transformácii $V(S, t) = e^{-\alpha \ln S - \beta(T-t)} u(\ln S, T - t)$, kde $\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{r^2}{2\sigma^2} + \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8}$, resp. $u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} V(e^x, T - \tau)$, kde $x = \ln S$ a $\tau = T - t$, dostaneme:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (22)$$

s $u(x, 0) = e^{\alpha x} \bar{V}(e^x)$ (počiatočná podmienka), kde $-\infty < x < \infty$ a $\tau \in \langle 0, T \rangle$.

- Rovnica (22) má (známe) riešenie:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-p)^2}{2\sigma^2\tau}} u(p, 0) dp, \quad (23)$$

ktoré je možné transformáciou previesť na tvar:

$$V(S, t) = \frac{e^{-\beta(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} S^{-\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\ln S - p)^2}{2\sigma^2(T-t)}} e^{\alpha p} \bar{V}(e^p) dp. \quad (24)$$

EURÓPSKA KÚPNA OPCIA

- S využitím koncovkej podmienky pre európsku kúpnu (call) opciu: $\bar{V}(S) = \max\{0, S - K\}$ dostaneme z (24) po sérii úprav:

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (25)$$

kde $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ a

$N(\bullet)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

EURÓPSKA PREDAJNÁ OPCIA

- Označme cenu európskej kúpnej opcie ako V_{EC} a európskej predajnej (put) opcie ako V_{EP} .
- S využitím put-call parity:

$$V_{EP}(S, t) = V_{EC}(S, t) - S + Ke^{-r(T-t)} \quad (26)$$

a (25) dostávame vzťah pre výpočet ceny európskej put opcie:

$$\begin{aligned} V_{EP}(S, t) &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) - S + Ke^{-r(T-t)} \\ &= S(N(d_1) - 1) + Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) \\ &= Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - S(1 - N(d_1)) \\ &= Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1). \end{aligned} \quad (27)$$

FORWARD NA AKCIU BEZ DIVIDEND

- Označme V_F - cenu forwardu na akciu bez dividend, potom:

$$V_F(S, t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}. \quad (28)$$

- Z toho:

$$\begin{aligned} V_F(S, T) &= S_T - K, \\ V_F(S, 0) &= S_0 - Ke^{-rT}. \end{aligned} \quad (29)$$

- Aby cena K bola nastavená férovo pre obe strany kontraktu, musí platiť: $V_F(S, 0) = 0$,
- z čoho:

$$K = S_0 e^{rT}. \quad (30)$$

NUMERICKÉ SCHÉMY RIEŠENIA BLACKOVEJ-SCHOLESOVEJ ROVNICE

- Rovnicu (22):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

možno riešiť aj numericky.

- Od (21) k (22) môžeme bez väčších problémov prejsť tiež použitím transformácie: $V(S, t) = Ke^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau)$, kde $\tau = T - t$ a $x = \ln\left(\frac{S}{K}\right)$.
- Označme

$$g(x, \tau) = \begin{cases} e^{\alpha x + \beta \tau} \max\{e^x - 1, 0\} & \text{pre call opciu,} \\ e^{\alpha x + \beta \tau} \max\{1 - e^x, 0\} & \text{pre put opciu,} \end{cases}$$

- potom počiatočná podmienka: $u(x, 0) = g(x, 0)$
pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$.

NUMERICKÉ SCHÉMY RIEŠENIA BLACKOVEJ-SCHOLESOVEJ ROVNICE

- Numerika však vie riešiť úlohy iba na ohraničených možnostiach.
- Aplikujeme metódu konečných diferencií (sietí):

$$x_i = ih, \quad \text{kde } i = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N \text{ a } h = \frac{L}{N},$$

$$\tau_j = jk, \quad \text{kde } j = 0, 1, \dots, m \text{ a } k = \frac{T}{m},$$

- teda h je priestorový krok a k je časový krok.
- Označenia: $u_i^j := u(x_i, \tau_j)$, $g_i^j := g(x_i, \tau_j)$.
- Samozrejme úlohu je potrebné riešiť pri špecifikácii istých hraničných podmienok. Ich odvodenie súvisí so správaním sa európskych opcií v hraničných bodoch priestorového intervalu.

NUMERICKÉ SCHÉMY RIEŠENIA BLACKOVEJ-SCHOLESOVEJ ROVNICE

- Pretože úmyslom prednášky nie je hľadanie numerického riešenia Blackovej-Scholesovej rovnice, ale len snaha poukázať na súvis numerického oceňovania s oceňovaním na binárnych stromoch, špecifikácii hraničných podmienok sa vyhneme. (Prípadných záujemcov odkazujeme na vysokoškolský učebný text: Ševčovič, D.: *Lectures on analytical and numerical methods for pricing financial derivatives*, dostupný na <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/knihy/derivaty/lecture-notes-fmfi.pdf>)

NUMERICKÉ SCHÉMY RIEŠENIA BLACKOVEJ-SCHOLESOVEJ ROVNICE

- Priestorová derivácia:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, \tau_j) \doteq \frac{\frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} - \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h}}{h} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \quad (31)$$

- Časová derivácia:

1. explicitná schéma:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, \tau_j) \doteq \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} \quad (32)$$

2. implicitná schéma:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, \tau_j) \doteq \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} \quad (33)$$

EXPLICITNÁ SCHÉMA RIEŠENIA

- Dosadením (31) a (32) do (22) dostaneme:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = 0 \quad (34)$$

- Upravujme (34):

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= u_i^j + \frac{k\sigma^2}{2h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \\ \text{označme } \gamma &:= \frac{k\sigma^2}{2h^2} \\ u_i^{j+1} &= \gamma u_{i-1}^j + (1 - 2\gamma)u_i^j + \gamma u_{i+1}^j \end{aligned} \quad (35)$$

- Špeciálne pre $\gamma = \frac{1}{2}$ (tj. keď $h = \sigma\sqrt{k}$, resp. $k = \frac{h^2}{\sigma^2}$) máme:

$$u_i^{j+1} = \frac{1}{2} (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) \quad (36)$$

BINOMICKÝ STROM V EXPLICITNEJ SCHÉME RIEŠENIA

- Na základe použitej transformácie

$V(Ke^x, T - \tau) = Ke^{-\alpha x - \beta \tau} u(x, \tau)$ a $u_i^j = u(x_i, \tau_j)$
dostávame:

$$V_i^j := V(x_i, \tau_j) = Ke^{-\alpha ih - \beta jk} u_i^j. \quad (37)$$

- Dosadením (37) do (36) dostávame:

$$\begin{aligned} u_i^{j+1} &= \frac{1}{2} (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) \\ Ke^{-\alpha ih - \beta jk} u_i^{j+1} &= \frac{1}{2} (Ke^{-\alpha ih - \beta jk} u_{i-1}^j + Ke^{-\alpha ih - \beta jk} u_{i+1}^j) \\ e^{\beta k} V_i^{j+1} &= \frac{1}{2} (e^{-\alpha h} V_{i-1}^j + e^{\alpha h} V_{i+1}^j) \\ V_i^{j+1} &= e^{-rk} \left(\frac{1}{2} e^{\alpha h - (\beta - r)k} V_{i+1}^j + \frac{1}{2} e^{-\alpha h - (\beta - r)k} V_{i-1}^j \right) \end{aligned}$$

BINOMICKÝ STROM V EXPLICITNEJ SCHÉME RIEŠENIA

- Približné hodnoty $\frac{1}{2}e^{\pm\alpha h - (\beta-r)k} \doteq \frac{1 \pm \alpha h}{2}$ označme $q_{\pm}$, tj.
 $q_+ = \frac{1+\alpha h}{2}$ a $q_- = \frac{1-\alpha h}{2}$.
- Potom $q_- + q_+ = 1$ a vo vzťahu:

$$V_i^{j+1} = e^{-rk} \left(\frac{1}{2} e^{\alpha h - (\beta-r)k} V_{i+1}^j + \frac{1}{2} e^{-\alpha h - (\beta-r)k} V_{i-1}^j \right) \quad (38)$$

s q_+ miesto $\frac{1}{2}e^{\alpha h - (\beta-r)k}$, resp. q_- miesto $\frac{1}{2}e^{-\alpha h - (\beta-r)k}$, tj.:

$$V_i^{j+1} = e^{-rk} \left(q_+ V_{i+1}^j + q_- V_{i-1}^j \right) \quad (39)$$

môžeme q_+ , q_- pasovať za riziko-neutrálne pravdepodobnosti.

BINOMICKÝ STROM V EXPLICITNEJ SCHÉME RIEŠENIA

- Vzťah (39) teda pre každú vetvu stromu umožňuje vypočítať hodnotu opcie v danom uzle stromu $(i, j + 1)$ pomocou riziko-neutrálnej pravdepodobnosti q_+ , resp q_- a hodnôt opcie v nasledujúcom časovom kroku j (pripomíname, že vďaka transformácii $\tau = T - t$ postupujeme od väčších časových hodnôt k menším) pri pohybe ceny podkladovej akcie nahor (up - $i + 1$), resp. nadol (down - $i - 1$).
- Uvedený postup výpočtu teda zodpovedá tomu, ktorý sme uvádzali pri bezarbitrážnom výpočte ceny opcie na binárnom strome v predchádzajúcich kapitolách.
- Prirodzene vzniká otázka, či aj riziko-neutrálne pravdepodobnosti q_+ , q_- zodpovedajú tým, ktoré boli uvádzané v predchádzajúcich kapitolách.

RIZIKO-NEUTRÁLNE PRAVDEPODOBNOSTI

- Odpoveď na otázku z konca predchádzajúceho slajdu je aspoň na úrovni lineárnej aproximácie kladná.
- Riziko-neutrálnu pravdepodobnosť sme v predchádzajúcich kapitolách označovali q a počítali pomocou nasledujúceho vzťahu:

$$q = \frac{S_{now}e^{rk} - S_{down}}{S_{up} - S_{down}}.$$

- Prispôbime tento vzťah predchádzajúcemu značeniu a transformáciám:

$$q = \frac{Se^{rk} - S_-}{S_+ - S_-} = \frac{Ke^xe^{rk} - Ke^{x-h}}{Ke^{x+h} - Ke^{x-h}} = \frac{e^{rk} - e^{-h}}{e^h - e^{-h}} = \frac{e^{rk+h} - 1}{e^{2h} - 1}. \quad (40)$$

RIZIKO-NEUTRÁLNE PRAVDEPODOBNOSTI

- Porovnajme q s $\frac{1}{2}e^{\alpha h - (\beta - r)k}$. Za tým účelom označme $F(h, k) := \frac{e^{rk+h}-1}{e^{2h}-1} - \frac{1}{2}e^{\alpha h - (\beta - r)k}$.
- Potom pre dostatočne malé h (a teda i k ; pripomínáme, že $k = \frac{h^2}{\sigma^2}$) bude $F(h, k) \doteq 0$.
- Presnejšie pre $k = \frac{h^2}{\sigma^2}$ bude F funkciou len jednej premennej h a teda označme $w(h) := F\left(h, \frac{h^2}{\sigma^2}\right)$.
- Potom $\lim_{h \rightarrow 0} w(h) = 0$ aj $\lim_{h \rightarrow 0} w'(h) = 0$.
- Samozrejme aj $q - q_+ \doteq 0$ pre $h \rightarrow 0$.