RENTOVÝ POČET, MODEL PREKRÝVAJÚCICH SA GENERÁCIÍ

Základy finančníctva

http://matika.elf.stuba.sk/KMAT/ZakladyFinancnictva

RENTA

- **Renta** (tiež anuita alebo dôchodok) - výnos z nejakého majetku (najznámejšia - pozemková renta).
- Finančná renta - postupnosť splátok v rovnako veľkých časových intervaloch.
- Renta môže byť:
  - podmienená (napr. starobný dôchodok),
  - nepodmienená.
- Rentu delíme podľa ukončenia splátok:
  - konečná,
  - nekonečná,
- podľa veľkosti splátok:
  - konštantná,
  - premenlivá,
- podľa doby výplaty splátok:
  - polehotná (ordinárna anuita),
  - predlehotná (duálna anuita).

RENTOVÝ POČET

- Rentu ďalej delíme podľa periódy medzi splátkami:
  - ročná,
  - p-termínová.
- Časová perióda renty - obdobie medzi dvoma splátkami.
- Doba splatnosti renty - obdobie medzi prvou a poslednou splátkou.
- Označme:
  - n - počet rokov vyplácania renty,
  - R - splátka za jednu časovú periódu,
  - r - ročná úroková sadzba (budeme predpokladať, že je konštantná počas doby n rokov).

ROČNÁ POLEHOTNÁ RENTA

- Pri ročnej polehotnej rente sa splátka vypláca na konci každého roku, tzn. ak ide o n - ročnú polehotnú rentu, splátka vo výške R p.j. sa vypláca na konci prvého roku, na konci druhého roku, atď. . . . až na konci n-tého roku.
- Označme S_n - budúcu hodnotu renty, A_n - súčasnú hodnotu renty.

roky	splátka	budúca hodnota splátky	súčasná hodnota splátky
0.rok:			
1.rok:	R	$R(1+r)^{n-1}$	$R(1+r)^{-1}$
2.rok:	R	$R(1+r)^{n-2}$	$R(1+r)^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)$.rok:	R	$R(1+r)$	$R(1+r)^{-n+1}$
n.rok:	R	R	$R(1+r)^{-n}$
sumácia:	nR	S_n	A_n

ROČNÁ POLEHOTNÁ RENTA

- Z tabuľky vidíme, že
  $S_n = R\left(1 + (1+r) + \ldots + (1+r)^{n-1}\right)$ a
  $A_n = R\left((1+r)^{-1} + (1+r)^{-2} + \ldots + (1+r)^{-n}\right)$.
- Označme $s_{n,r}$ - polehotný sporiteľ - určuje budúcu hodnotu renty s $R = 1$ a úrokovou sadzbou r, $a_{n,r}$ - polehotný zásobiteľ - určuje súčasnú hodnotu renty s $R = 1$ a úrokovou sadzbou r.
- Teda $S_n = Rs_{n,r}$ a $A_n = Ra_{n,r}$.
- Zo vzťahu na výpočet súčtu členov geometrickej postupnosti dostaneme:
  - $s_{n,r} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$,
  - $a_{n,r} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$.
- Súčasne máme $S_n = (1+r)^n A_n$ a $A_n = S_n(1+r)^{-n}$.

ROČNÁ POLEHOTNÁ RENTA

- Ďalej máme:

$$R = \frac{S_n}{s_{n,r}} = \frac{rS_n}{(1+r)^n - 1}$$

$$R = \frac{A_n}{a_{n,r}} = \frac{rA_n}{1-(1+r)^{-n}}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{rS_n}{R}+1\right)}{\ln(1+r)}$$

$$n = -\frac{\ln\left(1-\frac{rA_n}{R}\right)}{\ln(1+r)}$$

- Podiel $\frac{1}{s_{n,r}}$ voláme polehotný fondovateľ - určuje R pri $S_n = 1$ a úrokovej sadzbe r.
- Podiel $\frac{1}{a_{n,r}}$ voláme polehotný umorovateľ - určuje R pri $A_n = 1$ a úrokovej sadzbe r.

PRÍKLAD

Rodič dieťaťa pri jeho narodení založil viazaný vklad, na ktorý prispieva koncom každého roka sumou 500 EUR. Banka poskytuje na vklad ročnú úrokovú mieru 3 %. Akú sumu dostane dieťa po dovŕšení 18-teho roku života?

Riešenie:

$\underline{R = 500 \text{ EUR}, \ r = 0,03, \ n = 18, \ S_n = ? \text{ EUR}}$

$$S_n = R\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 500\frac{(1{,}03)^{18} - 1}{0{,}03} \doteq 11707,22 \text{ EUR}.$$

Po dovŕšení 18-teho roku života dostane 11707, 22 EUR.

ROČNÁ PREDLEHOTNÁ RENTA

- Pri ročnej predlehotnej rente sa splátka vypláca na začiatku každého roku, tzn. ak ide o n - ročnú predlehotnú rentu, splátka vo výške R p.j. sa vypláca na začiatku prvého roku, na začiatku druhého roku, atď. . . . až na začiatku n-tého roku.
- Označme $\ddot{S}_n$ - budúcu hodnotu renty, $\ddot{A}_n$ - súčasnú hodnotu renty.

roky	splátka	budúca hodnota splátky	súčasná hodnota splátky
0.rok:	R	$R(1+r)^n$	R
1.rok:	R	$R(1+r)^{n-1}$	$R(1+r)^{-1}$
2.rok:	R	$R(1+r)^{n-2}$	$R(1+r)^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-1)$.rok:	R	$R(1+r)$	$R(1+r)^{-n+1}$
n.rok:			
sumácia:	nR	$\ddot{S}_n$	$\ddot{A}_n$

ROČNÁ PREDLEHOTNÁ RENTA

- Z tabuľky vidíme, že
  $\ddot{S}_n = R\left((1+r) + (1+r)^2 + \ldots + (1+r)^n\right)$ a
  $\ddot{A}_n = R\left(1 + (1+r)^{-1} + (1+r)^{-2} + \ldots + (1+r)^{-n+1}\right)$.
- A teda
  $\ddot{S}_n = R(1+r)\left(1 + (1+r) + \ldots + (1+r)^{n-1}\right) = (1+r)S_n$,
  $\ddot{A}_n = R(1+r)\left((1+r)^{-1} + (1+r)^{-2} + \ldots + (1+r)^{-n}\right) = (1+r)A_n$.
- Označme $\ddot{s}_{n,r}$ - predlehotný sporiteľ a $\ddot{a}_{n,r}$ - predlehotný zásobiteľ, potom $\ddot{S}_n = R\ddot{s}_{n,r}$ a $\ddot{A}_n = R\ddot{a}_{n,r}$, kde:
  - $\ddot{s}_{n,r} = (1+r)\frac{(1+r)^n - 1}{r} = (1+r)s_{n,r}$,
  - $\ddot{a}_{n,r} = (1+r)\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = (1+r)a_{n,r}$.
- Súčasne máme $\ddot{S}_n = (1+r)^n\ddot{A}_n$ a $\ddot{A}_n = \ddot{S}_n(1+r)^{-n}$.

ROČNÁ PREDLEHOTNÁ RENTA

- Ďalej máme:

$$R = \frac{\ddot{S}_n}{\ddot{s}_{n,r}} = \left(\frac{\ddot{S}_n}{1+r}\right)\left(\frac{r}{(1+r)^n - 1}\right)$$

$$R = \frac{\ddot{A}_n}{\ddot{a}_{n,r}} = \left(\frac{\ddot{A}_n}{1+r}\right)\left(\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}\right)$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{r\ddot{S}_n}{(1+r)R} + 1\right)}{\ln(1+r)}$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{r\ddot{A}_n}{(1+r)R}\right)}{\ln(1+r)}$$

- Podiel $\frac{1}{\ddot{s}_{n,r}}$ voláme predlehotný fondovateľ a $\frac{1}{\ddot{a}_{n,r}}$ voláme predlehotný umorovateľ.

PRÍKLAD

Jeden zo súrodencov musí vrátiť druhému dedičský podiel vo výške 50000 EUR za 6 rokov. Koľko musí vkladať do banky začiatkom každého roka, aby našetril(a) túto sumu pri $r = 0,02$?

Riešenie:

$\underline{\ddot{S}_n = 50000 \text{ EUR}, r = 0,02, n = 6, R =? \text{ EUR}}$

$$R = \left(\frac{\ddot{S}_n}{1+r}\right)\left(\frac{r}{(1+r)^n - 1}\right) = \frac{50000}{(1{,}02)} \frac{0{,}02}{((1{,}02)^6 - 1)} \doteq 7771 \text{ EUR}.$$

Každoročný vklad v banke musí byť vo výške 7771 EUR.

RENTA VYPLÁCANÁ p-KRÁT ROČNE

- alebo tiež p-termínová renta je renta, ktorá vypláca splátku vo výške R p-krát do roka. Označme m - počet konverzií (prípočet úrokov) ročne; $p \neq m$.
- Výplata splátky sa deje v časových intervaloch dĺžky $\frac{1}{p}$ počas obododobia n rokov, tzn. počet períód je np.
- Pri polehotnej rente je splátka vyplácaná na konci každej periódy, kým pri predlehotnej rente je to na začiatku každej periódy.

periódy	splátka	polehotná budúca hodnota splátky	polehotná súčasná hodnota splátky
1	R	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}(np-1)}$	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$np-1$	R	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}(1-np)}$
np	R	R	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-nm}$
sumácia:	npR	S_n	A_n

POLEHOTNÁ p-TERMÍNOVÁ RENTA

- V tomto prípade bude:

$$S_n = R\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \quad (1)$$

$$A_n = R\frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \quad (2)$$

- Súčasne platí:

$$S_n = A_n\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$$

$$A_n = S_n\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}$$

POLEHOTNÁ p-TERMÍNOVÁ RENTA

- Ďalej máme:

$$
\begin{aligned}
R &= S_n \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} - 1} \\
R &= A_n \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1 - \left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}} \\
n &= \frac{1}{m} \frac{\ln\left(\frac{S_n}{R}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right) + 1\right)}{\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)} \\
n &= \frac{-1}{m} \frac{\ln\left(1 - \frac{A_n}{R}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right)\right)}{\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}
\end{aligned}
$$

PRÍKLAD

Renta sa spláca štyrikrát ročne po 200 EUR. Aká bude budúca hodnota renty po troch rokoch pri polročnom úrokovaní a ročnej úrokovej sadzbe $r = 0,04$?

Riešenie:

$R = 200$ EUR, $r = 0,04$, $m = 2$, $p = 4$, $n = 3$, $S_n =?$ EUR

$$S_n = R\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = 200\frac{(1{,}02)^6-1}{(1{,}02)^{\frac{1}{2}}-1} \doteq 2535,80 \text{ EUR}.$$

Po troch rokoch bude budúca hodnota renty $2535,80$ EUR.

PREDLEHOTNÁ p-TERMÍNOVÁ RENTA

- Pri predlehotnej rente bude rozvrhnutie splátok a ich budúce a súčasné hodnoty nasledovné:

periódy	splátka	budúca hodnota splátky	súčasná hodnota splátky
0:	R	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}$	R
1	R	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}(np-1)}$	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$np-1$	R	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$	$R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}(1-np)}$
np			
sumácia:	npR	$\ddot{S}_n$	$\ddot{A}_n$

PREDLEHOTNÁ p-TERMÍNOVÁ RENTA

- V tomto prípade bude:

$$\ddot{S}_n = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} S_n = R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \quad (3)$$

$$\ddot{A}_n = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} A_n = R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \quad (4)$$

- Súčasne platí:

$$\ddot{S}_n = \ddot{A}_n\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$$

$$\ddot{A}_n = \ddot{S}_n\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}$$

PREDLEHOTNÁ p-TERMÍNOVÁ RENTA

- Ďalej máme:

$$
\begin{aligned}
R &= \ddot{S}_n \frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1} \\
R &= \ddot{A}_n \frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}} \\
n &= \frac{1}{m} \frac{\ln\left(\frac{\ddot{S}_n}{R}\left(1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}\right)+1\right)}{\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)} \\
n &= \frac{-1}{m} \frac{\ln\left(1-\frac{\ddot{A}_n}{R}\left(1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}\right)\right)}{\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)}
\end{aligned}
$$

PRÍKLAD

Koľko musí pracujúci začiatkom každého mesiaca odkladať zo svojej výplaty na účet v banke po dobu 20 rokov, ak si chce zabezpečiť rentu po dobu ďalších 15 rokov, vyplácanú na začiatku každého štvrťroka so splátkami vo výške 4000 EUR? Uvažujte $r = 0,06$ a polročné úrokovanie.

Riešenie:

Budúca hodnota splátok platených počas prvých 20-tich rokov musí byť v roku 20 rovnaká ako súčasná hodnota budúcich výplat 4000 EUR počas nasledujúcich 15-tich rokov. Označme túto súčasnú hodnotu ako $\ddot{A}_{15}$, potom:

$$\ddot{A}_{15} = 4000 \frac{1 - (1,03)^{-30}}{1 - (1,03)^{-\frac{1}{2}}} \doteq 160322,92$$

Následne použijeme $\ddot{A}_{15}$ ako budúcu hodnotu renty s neznámym R, aby sme dostali: $R = \ddot{A}_{15} \frac{1-(1,03)^{-\frac{1}{6}}}{(1,03)^{40}-1} \doteq 348,31$ EUR.

ODLOŽENÁ RENTA

- Odložená renta je renta, ktorej prvá splátka je posunutá o nejaké časové obdobie, označme ho napr. t.
- Polehotná renta teda vyplatí prvú splátku od času 0 (napr. odo dnes) za obdobie $t + \frac{1}{p}$, kde $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$ tak ako v predchádzajúcom.
- Odložená predlehotná renta vyplatí prvú splátku o obdobie t neskôr odo dnes.
- Označme S_n^t ($\ddot{S}_n^t$) - budúcu hodnotu (tj. hodnotu v čase $t + n$) odloženej polehotnej (predlehotnej) renty a A_n^t ($\ddot{A}_n^t$) - súčasnú hodnotu (tj. hodnotu v čase 0) odloženej polehotnej (predlehotnej) renty.
- Budúca hodnota odloženej renty ovplyvnená posunom zrejme nebude, keďže sa bude úročiť za rovnaké časové obdobie n ($= t + n - t$).
- Súčasná hodnota bude pozmenená o odúročenie z času t do času 0.

ODLOŽENÁ POLEHOTNÁ RENTA

- Platí:

$$S_n^t = S_n = R\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \tag{5}$$

$$A_n^t = A_n\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt} = S_n^t\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m(t+n)} =$$

$$= R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt}\frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \tag{6}$$

- Špeciálne, keď $m = 1 = p$:

$$S_n^t = S_n = R\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

$$A_n^t = R(1+r)^{-(t+n)}\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

ODLOŽENÁ PREDLEHOTNÁ RENTA

- Platí:

$$\ddot{S}_n^t = \ddot{S}_n = R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \ddot{A}_n^t &= \ddot{A}_n\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt} = \ddot{S}_n^t\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m(t+n)} = \\ &= R\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m\left(t-\frac{1}{p}\right)} \frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \end{aligned} \tag{8}$$

- Špeciálne, keď $m = 1 = p$:

$$\ddot{S}_n^t = \ddot{S}_n = R(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

$$\ddot{A}_n^t = R(1+r)^{1-t}\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

PRERUŠENÁ RENTA

- Uvažujme konečnú postupnosť časov t_i a postupnosť období dĺžky n_i, kde $i = 1, 2, \ldots, N$, takých, že $0 \leq t_1 < t_1 + n_1 < t_2 < t_2 + n_2 < \ldots < t_{N-1} < t_{N-1} + n_{N-1} < t_N < t_N + n_N$.
- Vo všeobecnosti budeme prerušenou (prerušovanou) rentou rozumieť rentu, ktorá vypláca konštantnú čiastku v obdobiach t_i až $t_i + n_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, N$ s rovnakou alebo rôznou frekvenciou vyplácania a nevypláca v obdobiach 0 až t_1 (ak $t_1 > 0$), resp. $t_i + n_i$ až t_{i+1}, kde $i = 1, 2, \ldots, N - 1$.
- Súčasná hodnota takejto renty bude súčtom súčasných hodnôt všetkých odložených rient do časov t_1, t_2, $\ldots$ t_N na obdobia dĺžky n_1, n_2, $\ldots$ n_N.

VEČNÁ RENTA

- Večná renta znamená, že $n \to \infty$.
- Z toho vyplýva, že:

$$\begin{aligned}
S_\infty &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} R\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \infty \\
\ddot{S}_\infty &= \lim_{n\to\infty} \ddot{S}_n = \lim_{n\to\infty} R\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}} = \infty \\
A_\infty &= \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{R}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} \\
\ddot{A}_\infty &= \lim_{n\to\infty} \ddot{A}_n = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}} = \frac{R}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}}
\end{aligned}$$

- Špeciálne pre $m = 1 = p$ máme:

$$A_\infty = \frac{R}{r} \qquad \ddot{A}_\infty = \frac{R(1+r)}{r}$$

PRÍKLAD

Známy švédsky vedec a vynálezca sa rozhodol po svojom skonaní prostredníctvom advokáta vložiť celý svoj nadobudnutý majetok do bezpečných CP, ktoré poskytujú ročnú úrokovú sadzbu $r = 0,01$ pri mesačnom úrokovaní a takto vytvoriť fond, z ktorého budú každoročne na konci roka sumou v súhrnnej výške $R = 5.10^6$ SEK odmeňovaní jednotlivci alebo skupiny, ktorí sa svojím dielom pričinili o významný pokrok na poli vedy alebo vytvorili unikátne literárne dielo obsahujúce ušľachtilé myšlienky. Aký veľký musel byť jeho majetok v čase jeho skonu?

Riešenie:

$\underline{R = 5.10^6 \text{ SEK}, \ r = 0,01, \ m = 12, \ p = 1, \ A_\infty = ? \text{ SEK}}$

$A_\infty = \frac{R}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = \frac{5.10^6}{\left(1+\frac{0,01}{12}\right)^{12}-1} = 497712469,3 \doteq 500.10^6$ SEK.

RENTA SO SPOJITÝM ÚROKOVANÍM

- V tomto prípade $m \to \infty$.
- Z toho vyplýva, že:

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{m\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} R\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = R\frac{\mathrm{e}^{rn}-1}{\mathrm{e}^{\frac{r}{p}}-1} \\
\ddot{S} &= \lim_{m\to\infty} \ddot{S}_n = \lim_{m\to\infty} R\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}-1}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}} = R\frac{\mathrm{e}^{rn}-1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{r}{p}}} \\
A &= \lim_{m\to\infty} A_n = \lim_{m\to\infty} R\frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1} = R\frac{1-\mathrm{e}^{-rn}}{\mathrm{e}^{\frac{r}{p}}-1} \\
\ddot{A} &= \lim_{m\to\infty} \ddot{A}_n = \lim_{m\to\infty} R\frac{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-\frac{m}{p}}} = R\frac{1-\mathrm{e}^{-rn}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{r}{p}}}
\end{aligned}
$$

MODEL PREKRÝVAJÚCICH SA GENERÁCIÍ

- model je postavený na mikroekonomických základoch; rieši otázku dôchodkového zabezpečenia
- model pracuje s diskrétnym časom
- uvažujeme uzavretú jednotovarovú ekonomiku
- firmy fungujú v prostredí dokonalej konkurencie a vyrábajú podľa produkčnej funkcie s nasledujúcimi vlastnosťami:
  - $f(0) = 0$
  - $f'(k) > 0$, tj. f je ostro rastúca
  - $f''(k) < 0$, tj. f je rýdzokonkávna
  - $\lim_{k \to 0+} f'(k) = +\infty$
  - $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$
- vystupujú tu jednotlivci žijúce dve periódy: mladí, starí
- všetci aktéri majú perfektnú informáciu o budúcnosti
- veľkosť populácie sa riadi podľa vzťahu:
  $N_{t+1} = (1 + g_N)N_t$, kde g_N - rýchlosť rastu populácie

FIRMY A JEDNOTLIVCI

- ak K_t - označuje fyzický kapitál, tak $k_t = \frac{K_t}{N_t}$ - je podiel kapitálu na veľkosť populácie, tj. kapitál na hlavu, v čase t
- na dokonale konkurenčnom trhu pre cenu kapitálu r (reálny úrok) a cenu práce w (mzda) platí:

$$r = f'(k) \tag{9}$$
$$w = f(k) - kf'(k) \tag{10}$$

- mladí, narodení v čase t, majú v čase t spotrebu na hlavu: c_{1t}
- starí, narodení v čase t, majú v čase $t+1$ spotrebu na hlavu: c_{2t+1}
- úžitok zo spotreby majú mladí aj starí rovnaký, vyjadrený funkciou užitočnosti $u(c)$, ktorá má nasledujúce vlastnosti:
- $u'(c) > 0$ pre každé $c > 0$ a $\lim_{c \to 0+} u'(c) = \infty$, $u''(c) < 0$ pre každé $c > 0$

MAXIMALIZÁCIA CELOŽIVOTNÉHO ÚŽITKU ZO SPOTREBY

- jednotlivec maximalizuje celoživotný úžitok zo spotreby:

$$u(c_{1t}) + \frac{1}{1+\theta} u(c_{2t+1}),$$

kde $0 < \frac{1}{1+\theta} < 1$ je diskontný faktor

- v mladosti (produktívnom veku) dostáva jednotlivec mzdu w, ktorú rozkladá medzi spotrebu a úspory na starobu, tj.:

$$c_{1t} + s_t = w_t, \tag{11}$$

kde s_t - úspory v čase t

- v starobe spotrebuje všetok kapitál, ktorý má k dispozícii, tj.:

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1}) s_t, \tag{12}$$

kde r_{t+1} - úroková miera v čase $t + 1$

ÚLOHA MAXIMALIZÁCIE

- keďže platia vzťahy (11) a (12), jednotlivec maximalizuje:

$$u(w_t - s_t) + \frac{1}{1+\theta} u\big((1 + r_{t+1})s_t\big) \tag{13}$$

  voľbou s_t

- postavme deriváciu (13) podľa s rovnú nule, dostávame:

$$0 = -u'(c_{1t}) + \frac{1 + r_{t+1}}{1+\theta} u'(c_{2t+1}) \tag{14}$$

- z (14) vyplýva, že optimálne s_t v čase t je funkciou w_t a r_{t+1}, zapíšeme: $s_t = s(w_t, r_{t+1})$

OPTIMÁLNE ÚSPORY

- parciálne derivácie s podľa w a r potom spĺňajú:

$$s'_w = \frac{\partial s}{\partial w} = \frac{u''(c_{1t})}{u''(c_{1t}) + \frac{(1+r_{t+1})^2}{1+\theta} u''(c_{2t+1})} \tag{15}$$

$$s'_r = \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\frac{-1}{1+\theta} u'(c_{2t+1}) - \frac{1+r_{t+1}}{1+\theta} u''(c_{2t+1}) s_t}{u''(c_{1t}) + \frac{(1+r_{t+1})^2}{1+\theta} u''(c_{2t+1})} \tag{16}$$

- pre s'_w platí: $0 < s'_w < 1$, tj. pri nemennom r s rastom miezd rastú aj úspory
- kým pre s'_r nevieme určiť, či $s'_r > 0$ alebo $s'_r < 0$, závisí to od konkrétnej voľby funkcií u a f

KAPITÁL

- kapitál sa vyvíja podľa pravidla: investície=úspory, teda:

$$K_{t+1} - K_t = s(w_t, r_{t+1})N_t - K_t, \tag{17}$$

  kde investície (ľavá strana (17)) sú dané rozdielom toho, čo mladí usporia a starí "zjedia"(pravá strana (17))
- amortizáciu kapitálu neuvažujeme
- po predelení oboch strán (17) N_t a s využitím $N_{t+1} = (1 + g_N)N_t$, dostaneme:

$$k_{t+1} = \frac{s(w_t, r_{t+1})}{1 + g_N} = \frac{s\big(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1})\big)}{1 + g_N} \tag{18}$$

- vo vzťahu (18) je implicitne zadaná funkcia $k_{t+1} = k_{t+1}(k_t)$

STABILITA USTÁLENÉHO STAVU

- ustálený stav kapitálu na hlavu k^* bude taký, že $k_{t+1} = k_t = k^*$ pre každé t
- o tom, či existuje aspoň jeden kladný ustálený stav k^* bez ďalších reštrikcií na model nevieme rozhodnúť
- za predpokladu, že existuje, o stabilite ustáleného stavu k^* rozhoduje to, či platí $\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k^*)\right| < 1$ alebo nie
- máme:

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k_t) = \frac{-s'_w k_t f''(k_t)}{1 + g_N - s'_r f''(k_{t+1})} \tag{19}$$

- opäť platí, že bez dodatočných informácií, nevieme rozhodnúť, či $\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k^*)\right| < 1$

ÚLOHY

Úloha č. 1:

- Zistite optimálnu voľbu s_t a nájdite spotrebu mladých a starých pre túto hodnotu s_t, ak $u(c) = \ln c$.

Riešenie:

- dosadením za u do vzťahu (14) dostaneme:

$$0 = -\frac{1}{c_{1t}} + \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} \frac{1}{c_{2t+1}} = -\frac{1}{w_t - s_t} + \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} \frac{1}{(1 + r_{t+1})s_t}$$

- odtiaľ po úprave: $s_t = \frac{w_t}{2+\theta}$
- spotreba mladých:

$$c_{1t} = w_t - s_t = w_t - \frac{w_t}{2 + \theta} = \left(\frac{1 + \theta}{2 + \theta}\right) w_t$$

- spotreba starých:

$$c_{2t+1} = (1 + r_{t+1})s_t = \left(\frac{1 + r_{t+1}}{2 + \theta}\right) w_t$$

ÚLOHY

Úloha č. 2:

- Nájdite kladný pevný bod k^* pre $u(c) = \ln c$ a $f(k) = k^\alpha$, kde $\alpha \in (0, 1)$ a zistite jeho stabilitu.

Riešenie:

- vyjadrime najprv vzťah (18) pre s_t vypočítané v úlohe č. 1:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1 + g_N} = \frac{w_t}{(2+\theta)(1+g_N)} = \frac{(1-\alpha)k_t^\alpha}{(2+\theta)(1+g_N)}$$

- kladný pevný bod potom spĺňa: $k^* = \left(\frac{1-\alpha}{(2+\theta)(1+g_N)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- zderivujme k_{t+1} podľa k_t, dostaneme: $\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{(1-\alpha)\alpha k_t^{\alpha-1}}{(2+\theta)(1+g_N)}$, čo je kladné pre všetky kladné k_t
- navyše v pevnom k^* máme: $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k^*) = \alpha < 1$, teda je to asymptoticky stabilný pevný bod

ÚLOHY

Úloha č. 3:

- Nájdite kladný pevný bod k^* pre $u(c) = \ln c$ a $f(k) = Ak^\alpha - \delta k$, kde $\alpha \in (0, 1)$, $A > 0$ a $\delta \in (0, 1)$ a zistite jeho stabilitu.

Riešenie:

- vyjadrime najprv vzťah (18) pre s_t vypočítané v úlohe č. 1:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{1 + g_N} = \frac{w_t}{(2+\theta)(1+g_N)} = \frac{(1-\alpha)Ak_t^\alpha}{(2+\theta)(1+g_N)}$$

- vidíme, že δ do vzťahu nevstupuje
- kladný pevný bod potom spĺňa: $k^* = \left(\frac{(1-\alpha)A}{(2+\theta)(1+g_N)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
- zderivujme k_{t+1} podľa k_t, dostaneme: $\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{(1-\alpha)\alpha Ak_t^{\alpha-1}}{(2+\theta)(1+g_N)}$
- v pevnom k^* máme: $\frac{dk_{t+1}}{dk_t}(k^*) = \alpha < 1$ pre ľubovoľné $A > 0$, teda je to asymptoticky stabilný pevný bod

SOCIÁLNE ZABEZPEČENIE A AKUMULÁCIA KAPITÁLU

- uvažujeme tú istú maximalizačnú úlohu ako v predošlom, tj.maximalizovať:

$$u(c_{1t}) + \frac{1}{1+\theta} u(c_{2t+1}),$$

tentokrát za podmienok:

$$\begin{aligned} c_{1t} + s_t &= w_t - d_t, & (20) \\ c_{2t+1} &= (1 + r_{t+1}) s_t + b_{t+1}, & (21) \end{aligned}$$

kde d - príspevky do systému, b - dávky v starobe

PRIEBEŽNÝ A KAPITÁLOVÝ SYSTÉM

- rozlišujeme:
  - priebežný systém
  - kapitálový systém
- pri priebežnom dôchodkovom systéme platí: $b_t = (1 + g_N)d_t$, tj. v čase t prispievajú mladí do systému vo výške d_t a keďže rast populácie sa riadi vzťahom $N_{t+1} = (1 + g_N)N_t$, tak v tom istom čase dostanú starí dávky vo výške $(1 + g_N)d_t$
- pri kapitálovom dôchodkovom systéme platí: $b_t = (1 + r_t)d_{t-1}$, tj. mladí v čase $t - 1$ si dotujú vlastnú starobu v čase t, dávku v starobe predstavuje zúročený príspevok d_{t-1} do systému

PRIEBEŽNÝ SYSTÉM

- riešiac maximalizačnú úlohu pre priebežný systém dostávame:

$$u'(w_t - s_t - d_t) = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} u'\big((1 + r_{t+1})s_t + (1 + g_N)d_{t+1}\big), \tag{22}$$

kde $s_t = s(w_t, r_{t+1}, d_t, d_{t+1})$

- využijúc vzťah (17) pre vývoj kapitálu a po dosadení za s z (22) máme: $s_t = (1 + g_N)k_{t+1}$
- špeciálne ak $u(c) = \ln c$, tak z (22) máme:

$$\frac{1}{w_t - s_t - d_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} \frac{1}{(1 + r_{t+1})s_t + (1 + g_N)d_{t+1}}$$

- z čoho:

$$s_t = \frac{w_t - d_t}{2 + \theta} - \frac{(1 + \theta)(1 + g_N)}{(2 + \theta)(1 + r_{t+1})} d_{t+1} \tag{23}$$

KAPITÁLOVÝ SYSTÉM

- riešiac maximalizačnú úlohu pre kapitálový systém dostávame:

$$u'(w_t - s_t - d_t) = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} u'((1 + r_{t+1})(s_t + d_t)) \tag{24}$$

môžeme vyjadriť premennú $s_t + d_t$ z tejto rovnice

- využijúc vzťah (17) pre vývoj kapitálu a po dosadení za $s + d$ z (24) máme: $s_t + d_t = (1 + g_N)k_{t+1}$
- špeciálne ak $u(c) = \ln c$, tak z (24) máme:

$$\frac{1}{w_t - s_t - d_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \theta} \frac{1}{(1 + r_{t+1})(s_t + d_t)}$$

- z čoho:

$$s_t + d_t = \frac{w_t}{2 + \theta} \tag{25}$$

- premenná $s + d$ predstavuje úspory mladých rovnako ako v predchádzajúcom, len tentokrát je časť d úspor určená štátom

USTÁLENÝ STAV

- pri značení ustáleného stavu tentokrát upustíme od hviezdičiek a budeme písať horný index P, ak pôjde o priebežný systém, a K, ak pôjde o kapitálový systém
- z rovníc (23) a (25) vyplýva:

$$s^P = \frac{w-d}{2+\theta} - \frac{(1+\theta)(1+g_N)}{(2+\theta)(1+r)}d$$

$$s^P + d = \frac{w}{2+\theta} + \frac{(1+\theta)(r-g_N)}{(2+\theta)(1+r)}d$$

resp.:

$$s^K = \frac{w}{2+\theta} - d$$

$$s^K + d = \frac{w}{2+\theta}$$

USTÁLENÝ STAV

- spotreba na hlavu mladých a starých v ustálenom stave:
  - priebežný systém:

$$c_1^P = w - s^P - d = \frac{1+\theta}{2+\theta}\left(w + \frac{g_N - r}{1+r}d\right)$$

$$c_2^P = (1+r)s^P + (1+g_N)d = \frac{1+r}{2+\theta}w + \frac{g_N - r}{2+\theta}d$$

  - kapitálový systém:

$$c_1^K = w - s^K - d = \frac{1+\theta}{2+\theta}w$$

$$c_2^K = (1+r)(s^K + d) = \frac{1+r}{2+\theta}w$$

ZÁVERY

- vidíme, že:

$$c_1^P = c_1^K + \frac{(1+\theta)(g_N - r)}{(2+\theta)(1+r)}d$$
$$c_2^P = c_2^K + \frac{g_N - r}{2+\theta}d$$

- o tom, či $c_1^P > c_1^K$, $c_2^P > c_2^K$ alebo naopak, rozhoduje rozdiel $g_N - r$
- ak $g_N > r$, tak $c_1^P > c_1^K$, $c_2^P > c_2^K$ a teda priebežný systém financovania dôchodkov je lepší
- ak $g_N < r$, tak $c_1^P < c_1^K$, $c_2^P < c_2^K$ a naopak kapitálový systém je lepší