

DOMÁCA ÚLOHA č. 2

a) Majme trh s nasledujúcimi dlhopismi:

dlhopis	súčasná hodnota (cena)	splatnosť	ročný kupón	nominálna hodnota
<i>A</i>	97 p.j.	1 rok	0	100 p.j.
<i>B</i>	93 p.j.	2 roky	0	100 p.j.
<i>C</i>	100 p.j.	3 roky	4 %	100 p.j.

Uvažujte, že na tomto trhu sa nachádza bezkupónový dlhopis *D* s nominálnou hodnotou 100 p.j. a trojročnou maturitou, ktorého cena je 90 p.j. Ukážte, že dlhopis *D* nie je cenovo kompatibilný s ostatnými dlhopismi na tomto trhu a teda je možné vytvoriť arbitrážnu príležitosť. Nájdite ju a popíšte, ako by na nej mohol investor zbohatnúť. Aká by mala byť správna (taká, aby nevznikla arbitrážna príležitosť) súčasná hodnota (cena) dlhopisu *D*? Výsledok zaokrúhlite na dve desatinné miesta. **(6 b.)**

Riešenie:

Dlhopis *D* možno „vyskladať“ ako portfólio pozostávajúce z ostatných dlhopisov na trhu. Investor môže zostrojiť portfólio nasledujúcim spôsobom:

- predá/emituje *a* kusov dlhopisu *A*
- predá/emituje *b* kusov dlhopisu *B*
- kúpi *c* kusov dlhopisu *C*

Portfólio má v čase 0 cenu $(100c - 97a - 93b)$ p.j. Finančné toky plynúce z držby portfólia v nasledujúcich rokoch sa nachádzajú v tabuľke:

dlhopis\rok	1	2	3
<i>A</i>	$-100a$ p.j.	0 p.j.	0 p.j.
<i>B</i>	0 p.j.	$-100b$ p.j.	0 p.j.
<i>C</i>	$4c$ p.j.	$4c$ p.j.	$104c$ p.j.
cash flow	0 p.j.	0 p.j.	100 p.j.

Finančné toky plynúce z držby portfólia musia byť v každom roku rovnaké ako toky plynúce z držby dlhopisu *D* (posledný riadok tabuľky). Aby teda investor dosiahol to, že portfólio „robí“ to isté, čo dlhopis *D*, musí byť splnené:

$$(4c - 100a) \text{ p.j.} = 0 \text{ p.j.}$$

$$(4c - 100b) \text{ p.j.} = 0 \text{ p.j.}$$

$$104c \text{ p.j.} = 100 \text{ p.j.}$$

Z toho získame:

$$a = \frac{1}{26}, b = \frac{1}{26}, c = \frac{25}{26}.$$

Skutočne potom existuje možnosť arbitráže. Za cieľom jej dosiahnutia stačí v čase 0 predat ľubovoľný počet (resp. taký, aký okolnosti dovoľujú) *d* kusov dlhopisu *D*, ktorý sa na trhu predáva za 90 p.j. a kúpiť *d* kusov replikačného portfólia, tj. kúpiť $\frac{25}{26}d$ kusov dlhopisu *C*, predat $\frac{d}{26}$ kusov

dlhopisu A a predať $\frac{d}{26}$ kusov dlhopisu B . Nech napr. $d = 2600$ (aby sme dostali celé čísla), potom bilancia je v nasledujúcej tabuľke:

dlhopis\rok	0	1	2	3
A	9700 p.j.	-10000 p.j.	0 p.j.	0 p.j.
B	9300 p.j.	0 p.j.	-10000 p.j.	0 p.j.
C	-250000 p.j.	10000 p.j.	10000 p.j.	260000 p.j.
D	234000 p.j.	0 p.j.	0 p.j.	-260000 p.j.
cash flow	3000 p.j.	0 p.j.	0 p.j.	0 p.j.

Vidíme, že predchádzajúca stratégia umožňuje investorovi v čase 0 nadobudnúť kladný výnos 3000 p.j., pričom v nasledujúcich rokoch sa finančné toky vynulujú. Udeje sa tak bez toho, aby investor v čase 0 čokoľvek investoval zo svojho a navyše bez rizika možných budúcich strát.

Správna (tj. taká, aby nevznikla arbitráž) súčasná hodnota (cena) dlhopisu D musí byť rovná cene replikačného portfólia, tj. hodnote $(100c - 97a - 93b)$ p.j. s vypočítanými a, b, c . Konkrétne:

$$\left(\frac{2500}{26} - \frac{97}{26} - \frac{93}{26}\right) \text{ p.j.} = \frac{2310}{26} \text{ p.j.} \doteq 88,85 \text{ p.j.}$$

- b)** Zistite, akú dividendu D vypláca akcia v nasledujúcom roku (tj. v roku 1), ak súčasná cena akcie je $P_0 = 40$ p.j., výnosová (miera) sadzba $r = 0,1$ a očakávaná (miera) sadzba rastu dividendy $g = 0,02$. **(3 b.)**

Riešenie:

Vychádzajúc zo vzťahu na výpočet ceny akcie $P_0 = \frac{D}{r-g}$ dostávame:

$$D = P_0(r - g) = (40 \text{ p.j.})(0,1 - 0,02) = 3,2 \text{ p.j.}$$

- c)** Uvažujte trh s rizikovými cennými papiermi U, V takými, že ich očakávané výnosové percentá (výnosnosti) a smerodajné odchýlky (rizikovosti) sú v nasledujúcej tabuľke:

	výnosnosť	rizikovosť
cenný papier U	$r_U = 10 \%$	$\sigma_U = 5 \%$
cenný papier V	$r_V = 20 \%$	$\sigma_V = 10 \%$

Vypočítajte kovarianciu σ_{UV} výnosností cenných papierov U, V , ak korelačný koeficient výnosností cenných papierov U, V je $\rho_{UV} = -0,2$. Vyjadrite množinu všetkých portfólií pozostávajúcich z cenných papierov U, V formou funkčnej závislosti rizikovosti portfólia σ od jeho výnosnosti r , ak $\rho_{UV} = -0,2$. Na tejto množine nájdite efektívnu množinu. **(6 b.)**

Riešenie:

Poznámka: V ďalšom kvôli šetreniu miesta a lepšej prehľadnosti budeme všetky hodnoty vypisovať bez symbolu pre percentá, tj. bez %.

Ak $\rho_{UV} = -0,2$, potom kovariancia σ_{UV} výnosností cenných papierov U, V :

$$\sigma_{UV} = \rho_{UV}\sigma_U\sigma_V = -0,2 \cdot 5 \cdot 10 = -10$$

Napíšme rovnice pre výnosnosť r a rizikovosť σ portfólia pozostávajúceho z cenných papierov U a V pre všeobecne zadané váhy $x_U \in \langle 0,1 \rangle$, $x_V = 1 - x_U \in \langle 0,1 \rangle$ jednotlivých cenných papierov v portfóliu:

$$r = x_U r_U + x_V r_V \quad (1)$$

$$\sigma = \sqrt{x_U^2 \sigma_U^2 + 2x_U x_V \sigma_{UV} + x_V^2 \sigma_V^2} \quad (2)$$

Vyjdúc z rovnice (1) dostávame, že $r \in \langle 10, 20 \rangle$.

Pretože $\sigma_{UV} = -10$, tak kovariančná matica $C = \begin{pmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 100 \end{pmatrix}$. Keďže je kladne definitná, existuje k nej inverzná matica $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{240} \\ \frac{1}{240} & \frac{1}{96} \end{pmatrix}$.

Označme $\vec{1} = (1,1)^T$ a $\vec{r} = (r_A, r_B)^T$. Použijúc označenia z Prednášky 6, získame:

$$\alpha = \vec{r}^T C^{-1} \vec{r} = 10,$$

$$\beta = \vec{r}^T C^{-1} \vec{1} = \frac{3}{4},$$

$$\gamma = \vec{1}^T C^{-1} \vec{1} = \frac{29}{480}.$$

Dosadíme do vzťahu:

$$\sigma^2 = \frac{\gamma}{\alpha\gamma - \beta^2} r^2 - \frac{2\beta}{\alpha\gamma - \beta^2} r + \frac{\alpha}{\alpha\gamma - \beta^2}$$

dostaneme:

$$\sigma^2 = 1,45r^2 - 36r + 240.$$

Množina všetkých portfólií pozostávajúcich z cenných papierov U a V vyjadrená formou funkčnej závislosti rizikovosti portfólia σ od jeho výnosnosti r teda bude:

$$\sigma = \sigma(r) = \sqrt{1,45r^2 - 36r + 240}, \quad (3)$$

kde $r \in \langle 10, 20 \rangle$.

Iný postup ako nájsť množinu všetkých portfólií je nasledujúci:

Pretože $\sigma_{UV} = -10$, tak z (2) máme:

$$\sigma = \sqrt{25x_U^2 - 20x_U(1 - x_U) + 100(1 - x_U)^2} \quad (4)$$

Vyjadríme x_U ako funkciu premennej r z rovnice (1), dostaneme:

$$x_U = \frac{r_V - r}{r_V - r_U} = \frac{20 - r}{10}, \text{ resp. } 1 - x_U = \frac{r - r_U}{r_V - r_U} = \frac{r - 10}{10} \quad (5)$$

Dosadením (4) do (3) získame:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{25(20 - r)^2 - 20(20 - r)(r - 10) + 100(r - 10)^2}{100}} \\ &= \sqrt{\frac{25(r^2 - 40r + 400) + 20(r^2 - 30r + 200) + 100(r^2 - 20r + 100)}{100}} \\ &= \sqrt{\frac{145r^2 - 3600r + 24000}{100}} = \sqrt{1,45r^2 - 36r + 240}, \end{aligned}$$

čo je pre $r \in \langle 10, 20 \rangle$ množina všetkých portfólií pozostávajúcich z cenných papierov U a V vyjadrená ako funkčná závislosť rizikovosti portfólia od jeho výnosnosti.

Na nájdenie efektívnej množiny potrebujeme poznať výnosnosť, v ktorej dosahuje portfólio ako kombinácia cenných papierov U a V najnižšiu rizikovosť. Nájdime preto minimum funkcie (3). Zderivujme (3), dostaneme:

$$\sigma'(r) = \frac{2,9r - 36}{2\sqrt{1,45r^2 - 36r + 240}} \quad (6)$$

Vzťah (6) je rovný nule pre $\tilde{r} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{360}{29} \doteq 12,41 > 10$ a teda krivka v (3) je pre $r \in \langle \tilde{r}, 20 \rangle$ efektívnou množinou.