



Slovenská technická univerzita v Bratislave

Fakulta elektrotechniky a informatiky

Katedra matematiky

Študentská Vedecká a Odborná Činnosť

Model epidemickej choroby (SIR model)

autor: Pavol Gašpierik

konzultant: Doc. RNDr. Ľubomír Marko, PhD.

Úvod

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



- z histórie
- všeobecná charakteristika modelu
- predpoklady
- diferenciálne rovnice a parametre modelu
- podmienky pre šírenie epidémie
- rovnováha a stabilita

Z histórie

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



The Diseases and Casualties this Week

Burial	10	Frighted	1
Ague	1	Gout	1
Apoplexie	1	Grief	1
Cholera	1	Griping in the Guts	1
Cholera	1	Jaundies	1
Cold	1	Lapothume	1
Consumption	1	Infants	1
Cough	1	Kingevil	1
Dropic	1	Malignant	1
Drown'd at St. Martin in the	1	Plague	1
Fields	1	Purples	1
Fever	1	Rickets	1
Filula	1	Rising of the Lighes	1
Flox and Small-pox	1	Rupture	1
Flax	1	Scurvy	1
Fetid dead in the Fields at	1	Spotted Fever	1
St. Mary Hilington	1	Stilborn	1
		Stone	1
		Stopping of the Stomach	1
		Suddenly	1
		Surfeite	1
		Teeth	1
		Thrush	1
		Tifick	1
		Vomiting	1
		Winde	1
		Wormes	1

Males	68	Males	3212	Plague	1513
Canibred	8	Females	3248		
In all	146	In all	6460		

Decreased in the Burials this Week 1837

Parishes clear of the Plague 7 Parishes Infected 123

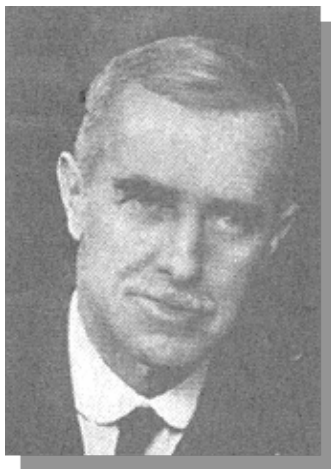
The Office of Bread for forty by Order of the Lord Mayor and Court of Aldermen.
A penny Wheat Loaf to contain Nine Ounces and a half, and three
half-penny White Loaves the like weight.

- jeden z najznámejších príkladov populačnej epidémie – prípad Veľkého moru v Londýne (vypukol v rokoch 1665 – 1666)
- zo záznamov úmrtnosti obyvateľstva môžeme zostrojiť epidemickú krivku (jej charakteristický tvar opísali A. G. McKendrick a W. O. Kermack)

Fotografia záznamu úmrtnosti obyvateľstva (26.09. – 3.10 1665) - úmrtnosť na mor (5533) bola viac ako 37- krát väčšia ako pôrodnosť (146)

Z histórie

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Anderson Gray McKendrick (1876 - 1943)



William Ogilvy Kermack (1898 - 1970)

- propagovali využitie matematických metód v epidemiológii
- v rokoch 1927 a 1932 vydali dva dôležité dokumenty, týkajúce sa matematickej teórie šírenia epidémie, na ktoré sa odvolávame dodnes

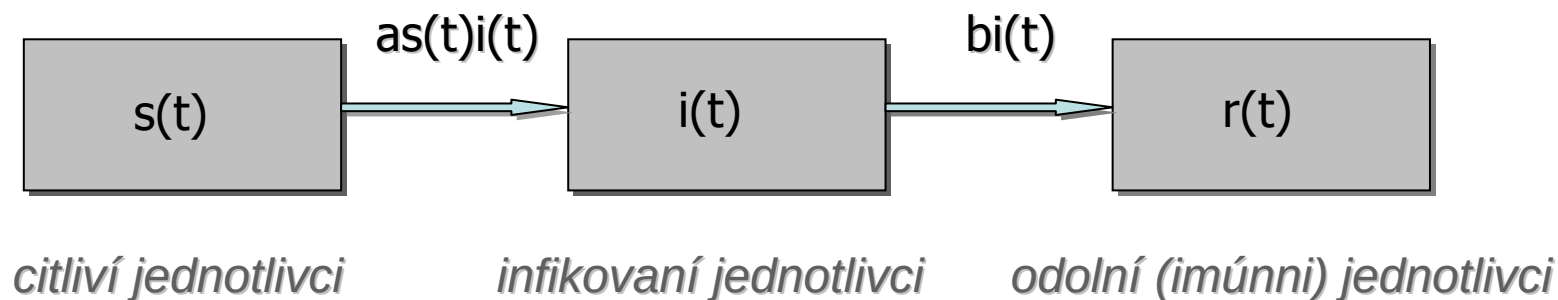
Všeobecná charakteristika modelu

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Model populácie je rozdelený do troch skupín:

- citliví jednotlivci **S** (susceptible individuals)
- infikovaní jednotlivci **I** (infected individuals)
- odolní (imúnni) jednotlivci **R** (re-infection individuals)



Celková populácia je rovná: $N = S + I + R$ (1)

Predpoklady

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



- jednotlivci sú zaradení do jednej z kategórii (citliví, infikovaní, odolní)
- populácia je veľká, so stabilným počtom jednotlivcov
- ignorujeme prírastok populácie (narodenie a smrť) v priebehu epidémie
- ignorujeme nejaké ďalšie rozdelenia obyvateľstva vekom, pohlavím, mobilitou alebo inými faktormi (tieto rozdiely by mohli v realite zohrávať dôležitú úlohu)
- každý jednotlivec prichádza denne do kontaktu s takým istým pomerom ľudí z každej kategórie
- pre jednoduchosť uvažujeme, že odolní jednotlivci R sú permanentne imúnni

Diferenciálne rovnice a parametre modelu

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Základné diferenciálne rovnice sú nasledujúce:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -as(t)i(t) \quad (2)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = as(t)i(t) - bi(t) \quad (3)$$

$$r(t) = 1 - s(t) - i(t) \quad (4)$$

Platí: $s(t) = S / N$ $i(t) = I / N$ $r(t) = R / N$

kde

$s(t)$ - podiel citlivej populácie	S - počet citlivých jednotlivcov
$i(t)$ - podiel infikovanej populácie	I - počet infikovaných jednotlivcov
$r(t)$ - podiel odolnej populácie	R - počet odolných jednotlivcov
	N - celková populácia

Diferenciálne rovnice a parametre modelu

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Parametre charakteristické pre každú chorobu:

- a - priepustnosť (pričítaných kontaktov schopných preniesť chorobu) $\left[\text{deň}^{-1}\right]$
- b - regeneračná rýchlosť (denný počet zotavených) $\left[\text{deň}^{-1}\right]$
- $\frac{1}{b}$ - priemerné trvanie choroby
- $c = \frac{a}{b}$ - počet kontaktov

$$\frac{ds(t)}{dt} = -as(t)i(t) \quad (2)$$

$$r(t) = 1 - s(t) - i(t) \quad (4)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = as(t)i(t) - bi(t) \quad (3)$$

$$(5)$$

Pre rovnice (2, 3, 4) existuje určitá invarianta systému:

$$i(t) + s(t) - \frac{b}{a} \ln s(t) = k \quad k - \text{konštanta}$$

čo dokážeme

$$\frac{d}{dt} \left(i(t) + s(t) - \frac{b}{a} \ln s(t) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} + \frac{ds(t)}{dt} - \frac{b}{a} \frac{1}{s(t)} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

Diferenciálne rovnice

$$\frac{ds(t)}{dt} = -as(t)i(t) \quad (2)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = as(t)i(t) - bi(t) \quad (3)$$



Po dosadení z rovníc (2, 3) dostaneme:

$$as(t)i(t) - bi(t) - as(t)i(t) - \frac{b}{a} \frac{1}{s(t)} (-as(t)i(t)) = 0$$

z čoho vyplýva, že uvedený výraz je rovný konštante.

Uvažujeme **prípád bez nových infikovaných**, takže rovnica (3) sa zredukuje na tvar:

$$\frac{di(t)}{dt} = -bi(t) \quad (6)$$

potom $i(t) = i(0)e^{-bt}$.

Počet infikovaných jednotlivcov $i(t)$, ktorí sa uzdravia za čas $(t, t + dt)$:

$$|di(t)| = \left| \left(\frac{di(t)}{dt} \right) dt \right| = i(t)bdt = i(0)be^{-bt} dt$$

Diferenciálne rovnice a parametre modelu

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Priemerné trvanie infekcie t_{pr} je potom rovné:

$$t_{pr} = \frac{\int_0^{\infty} i(0)be^{-bt}tdt}{\int_0^{\infty} i(0)be^{-bt}dt} = \frac{1}{b}$$

Podmienky pre šírenie epidémie

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



V epidemiológii má slovo "*epidémia*" formálny význam, ktorým je stav, v ktorom počet infikovaných jednotlivcov $i(t)$ stúpa. Tento stav je definovaný rovnicou (3):

$$\frac{di(t)}{dt} = as(t)i(t) - bi(t) \quad (3)$$

Podmienky pre sledovanie šírenia epidémie vyplývajú priamo z rovnice (3):

$$\frac{di(t)}{dt} \text{ musí byť vždy kladné, z čoho vyplýva } s(t) > \frac{b}{a} \quad (7)$$

Ak s_0 je počiatočný počet $s(t)$, potom podmienka pre šírenie epidémie je

$$s_0 > \frac{b}{a}$$

Infikovaní jednotlivci $i(t)$ budú priemerne nákazliví počas doby $\frac{1}{b}$.

Počet citlivých jednotlivcov $s(t)$ nakazených jedným infikovaným jednotlivcom $i(t)$ za jednotku času je potom $as(t)$.

Podmienky pre šírenie epidémie

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Potom celkový počet ľudí, nakazených jedným infikovaným je $\frac{as(t)}{b}$.

Parameter označovaný ako $R_0 = \frac{as_0(t)}{b}$, sa nazýva **miera reprodukcie epidémie**.

Aby mohol byť stav kvalifikovaný ako epidemický, toto číslo musí byť

väčšie ako $\frac{di(t)}{dt} = as(t)i(t) - bi(t) \quad (3)$

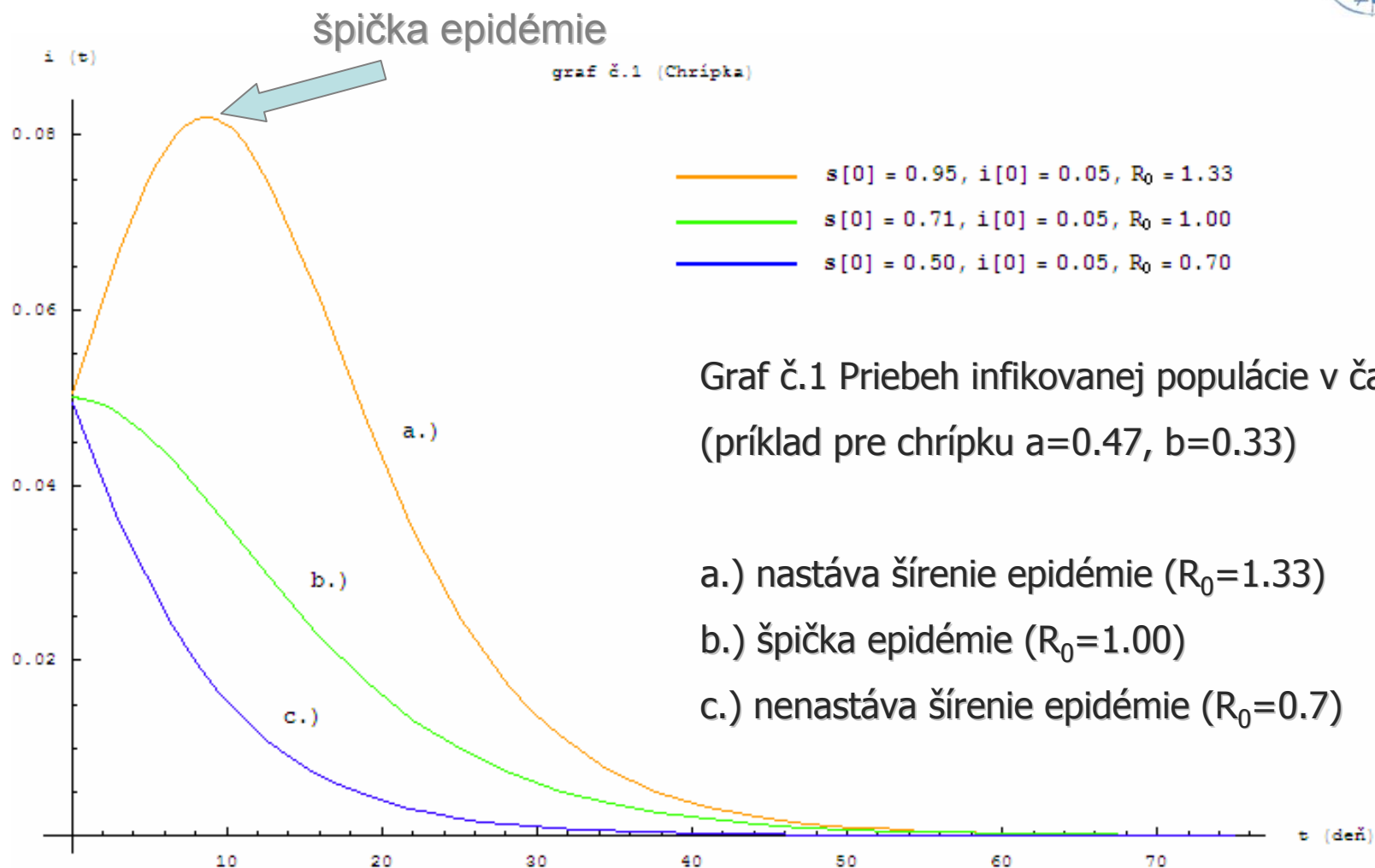
Z rovnice (3) vidieť, že vrchol (maximum) epidémie nastane, keď $s(t) = \frac{b}{a}$.

To je vtedy, keď miera reprodukcie R_0 je rovná 1.

Začiatkový počet infikovaných jednotlivcov $i(t)$ nehrá úlohu v určovaní, či nastala epidémia. Obzvlášť od neho závisí čas vrcholu epidémie.

Podmienky pre šírenie epidémie

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



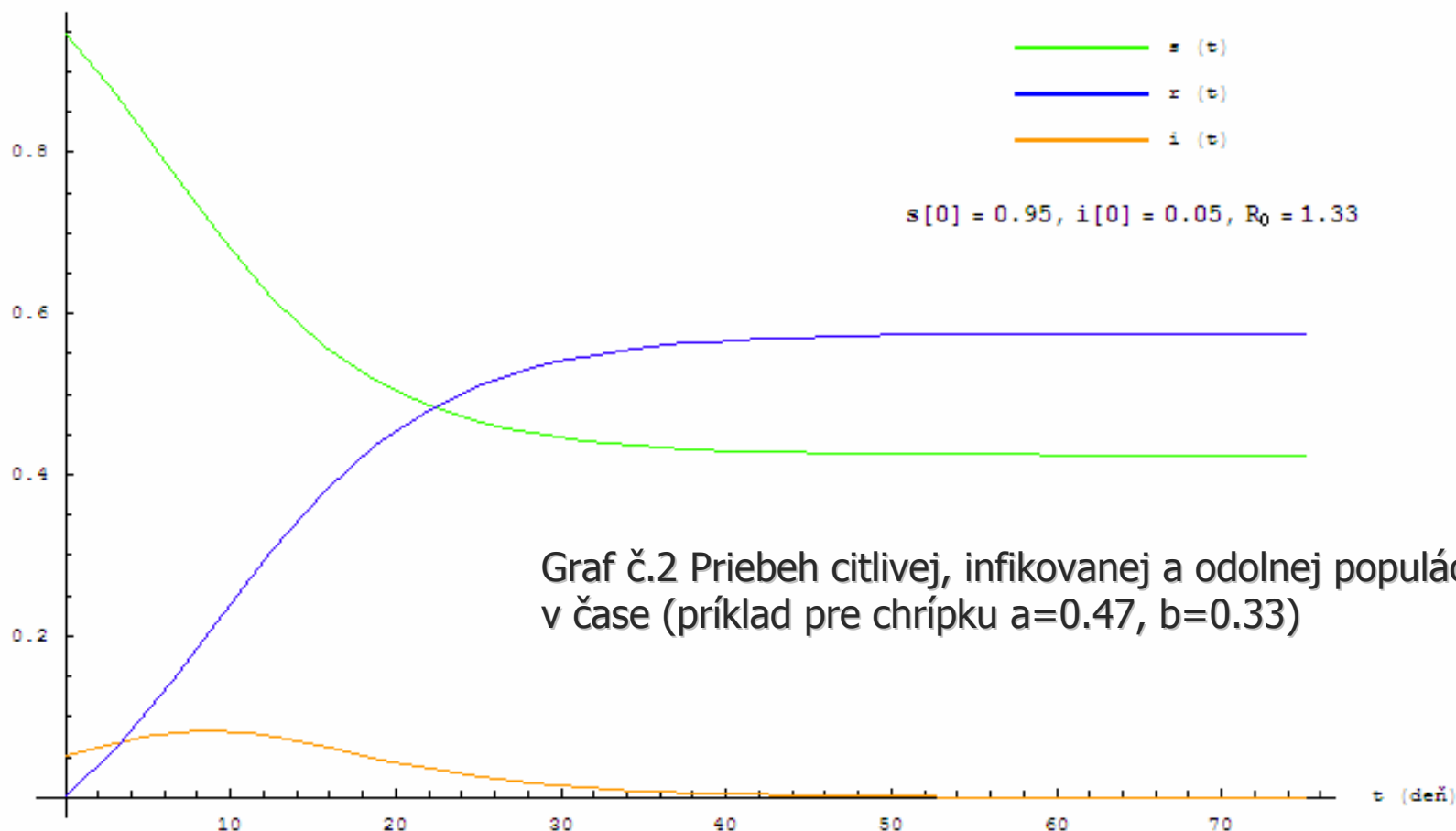
Podmienky pre šírenie epidémie

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



$s(t), i(t), r(t)$

graf č.2 (Chrípka)



Rovnováha a stabilita

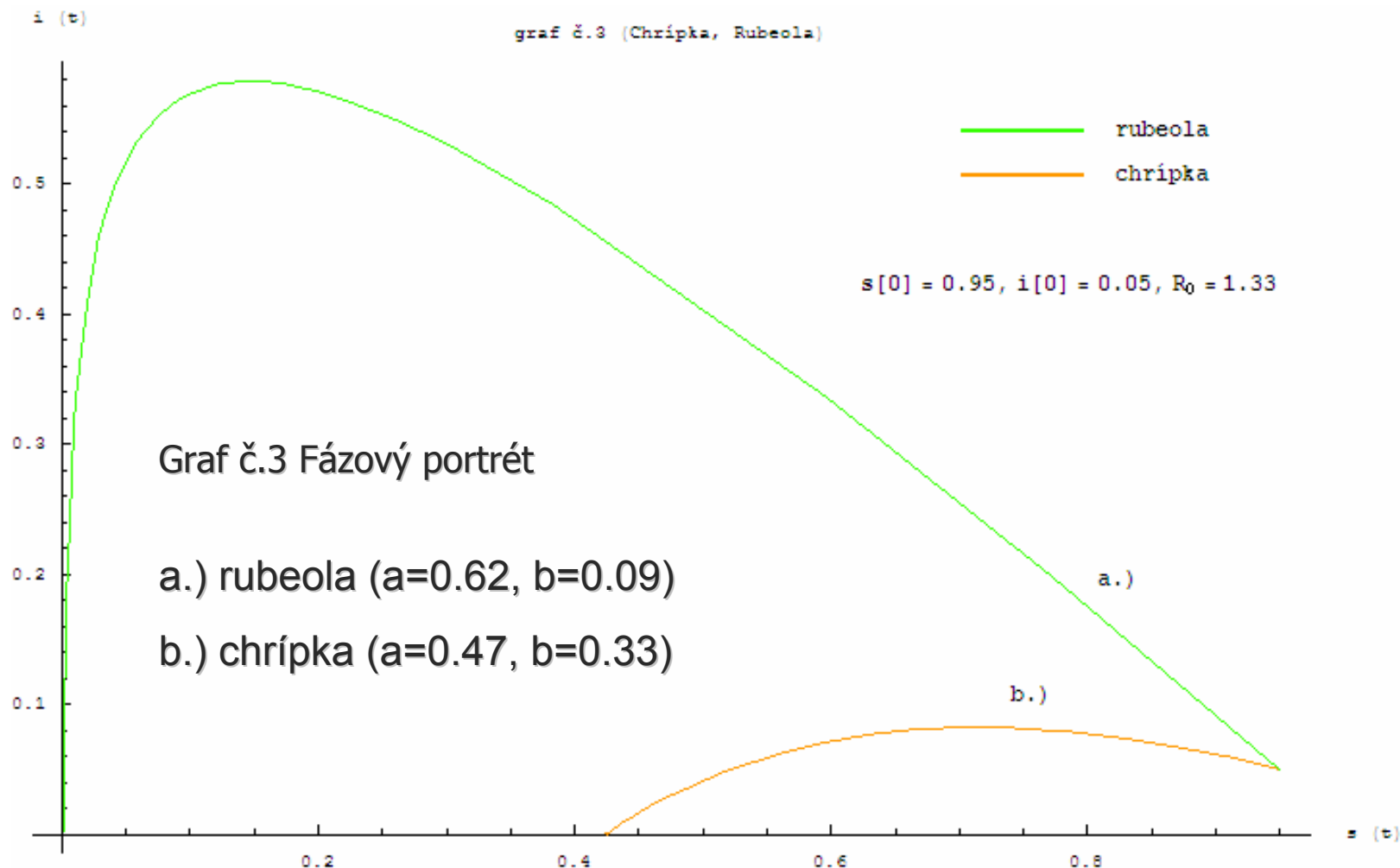
Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



- rovnovážne stavy z rovníc (2, 3, 4) sú tie, v ktorých $i(t)=0$ a $s(t)=c$, kde c je ľubovoľná kladná konštanta
- formálnou analýzou stability dostávame dve charakteristické čísla 0 a $ac - b$
- pri vhodných podmienkach pre šírenie epidémie, nadobúda charakteristické číslo $ac - b$ kladnú hodnotu a bod rovnováhy je nestabilný
- ak charakteristické číslo $ac - b$ má zápornú hodnotu, nedá sa vyvodiť záver stability

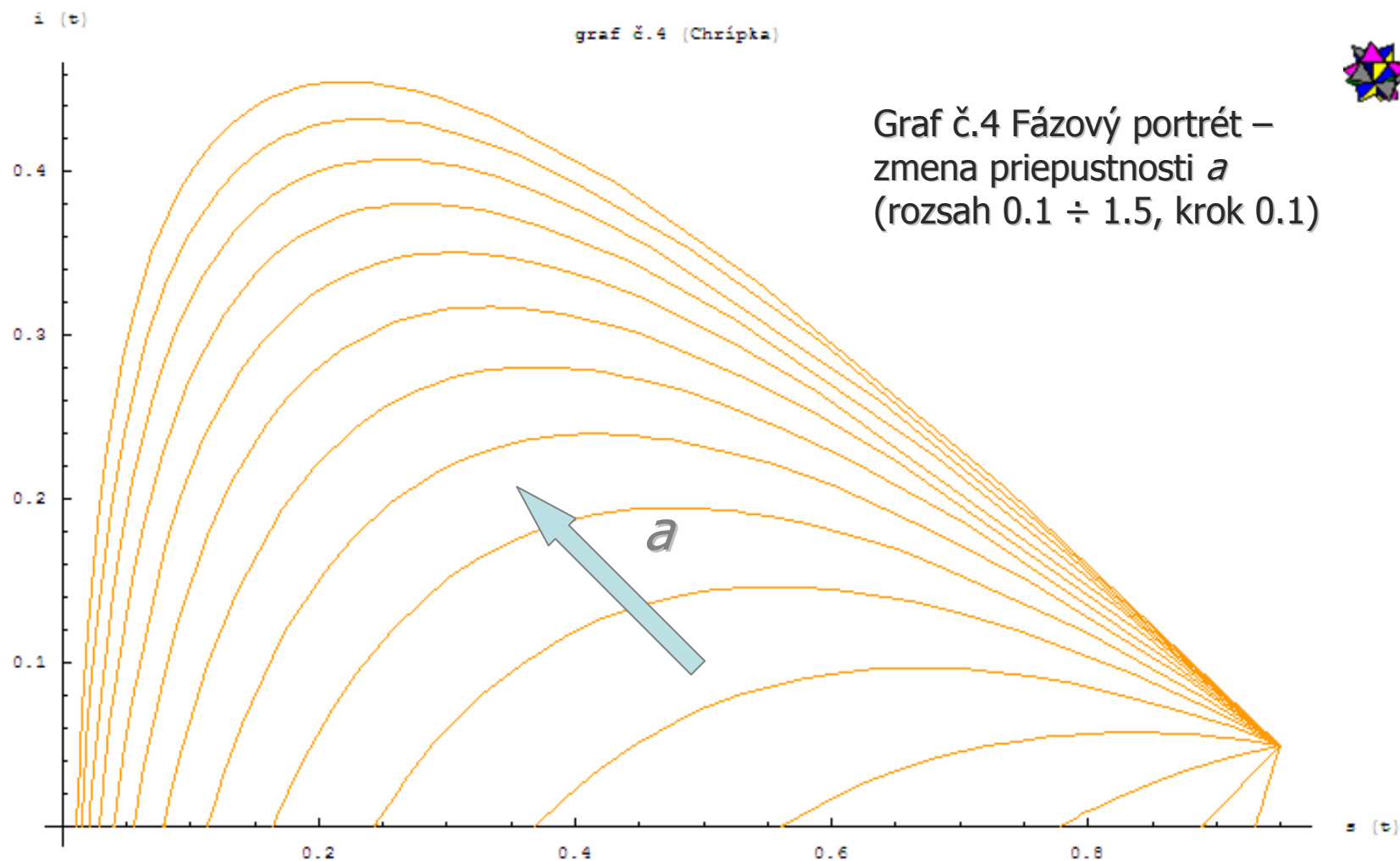
Rovnováha a stabilita

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



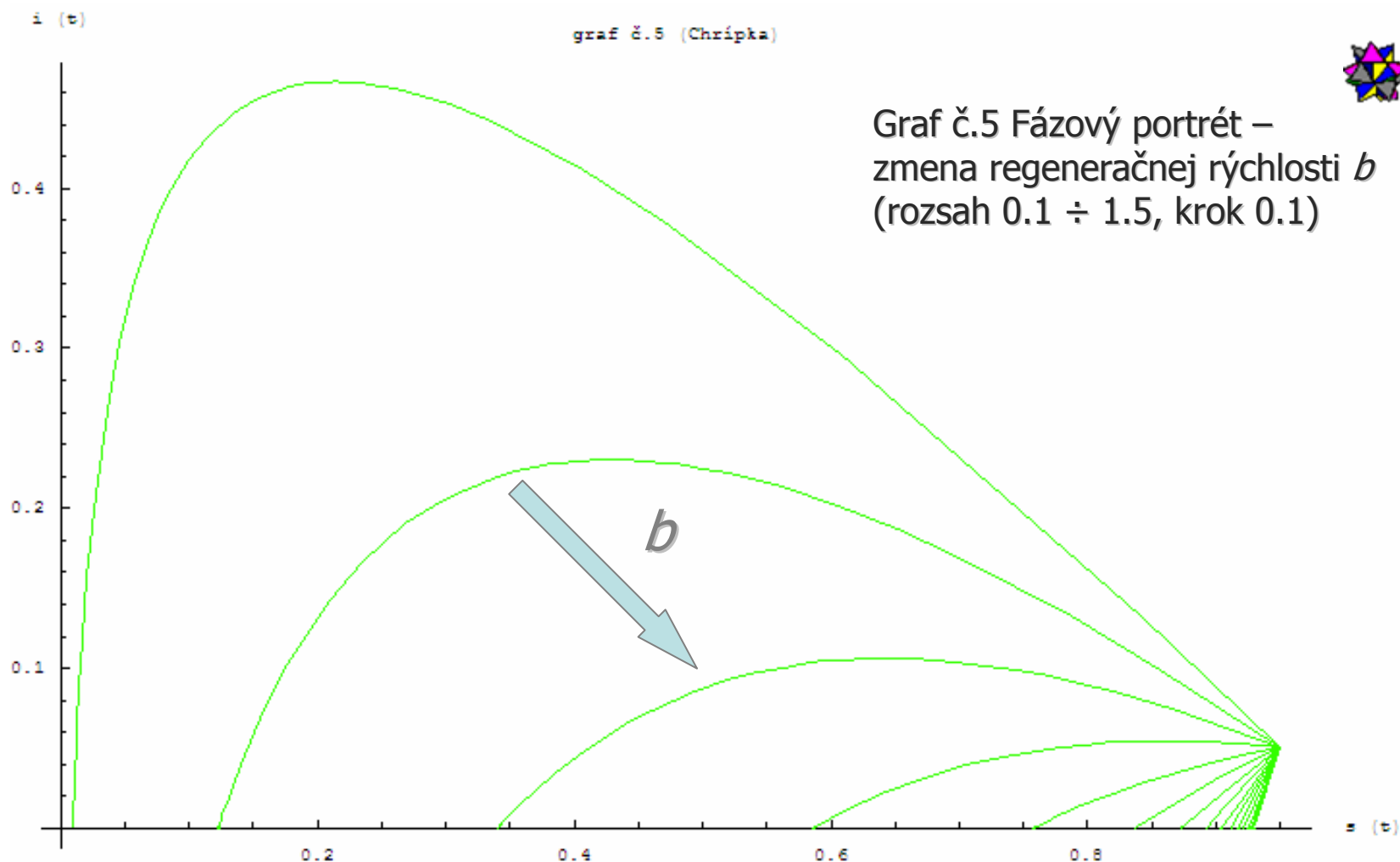
Rovnováha a stabilita

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Rovnováha a stabilita

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Pod'akovanie

Katedra matematiky
FEI STU v Bratislave



Ďakujem Vám za pozornosť...



Historické zobrazenie lekára moru