

1. Nech X, Y sú náhodné premenné s rozdelením pravdepodobnosti určeným tabuľkou pravdepodobnostnej funkcie f

t_i	1	2	3	4	5
$f(t_i)$	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

a) Vo forme tabuľky určte pravdepodobnostnú funkciu náhodného vektora (X, Y) za predpokladu, že jeho zložky sú nezávislé.

b) Aká je pravdepodobnosť toho, že $X < Y$?

c) Určte (vo forme tabuľky) rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $Z = X + Y$.

d) Vypočítajte strednú hodnotu a varianciu náhodnej premennej Z .

2. Daná je realizácia náhodného výberu

```

4 3 1 3 3 0 1 3 1 3 2 2 0 1 1 0 1 0 2 0
1 2 1 4 2 0 2 1 4 2 2 1 3 1 2 3 1 0 0 0
0 1 1 0 1 1 0 4 2 2 2 0 0 1 4 0 2 2 2 1
2 0 5 2 1 0 0 0 1 2 1 2 2 3 3 4 2 3 2 1
2 1 3 2 2 3 2 1 1 1 1 2 0 0 2 1 0 2 3 3

```

Na hladine významnosti $\alpha = 0,01$ testujte hypotézu, že populácia má Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti ($f(k) = (\lambda^k/k!) \exp(-\lambda)$).

3. Daná je matica prechodu T homogénneho markovovského procesu X ,

$$T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

a) Nájdite začiatkový vektor p^0 pre ktorý je tento homogénny markovovský proces stacionárny.

b) Vypočítajte $P(X(4) = 1, X(6) = 0)$ ak viete, že $P(X(0) = 2) = 1$.

c) Zistite, či je daný reťazec ergodický, a ak áno, nájdite jeho finálne rozdelenie pravdepodobnosti.

4. Na zariadení dochádza k poruchám 2 typov. Porucha typu 1 sa vyskytuje v priemere 1-krát za hodinu a jej odstránenie trvá priemerne 30 min. K poruche druhého typu dochádza v priemere 1-krát za 2 hodiny a jej oprava trvá priemerne 45 min. Súčasný výskyt obidvoch porúch sa vylučuje. Výskyt porúch a trvanie opráv sa riadi exponenciálnym rozdelením.

a) Načrtnite stavový diagram tohto procesu.

b) Sformulujte Kolmogorovove rovnosti a vypočítajte pravdepodobnosti ustálených stavov.

