

ZÁKLADY TEÓRIE PRAVDEPODOBNOSTI

Definícia pravdepodobnosti

Definícia 1.

Nech Ω je ľubovoľná neprázdna množina. Systém $\mathcal{F}$ podmnožín množiny Ω sa nazýva *σ -algebra*, ak

$$(S1) \quad \emptyset \in \mathcal{F},$$

$$(S2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$(S3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup\{A_n: n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$$

Každý prvok A σ -algebry $\mathcal{F}$ sa nazýva *náhodná udalosť*.

Veta 1. (vlastnosti σ -algebry)

Nech Ω je ľubovoľná neprázdna množina a nech $\mathcal{F}$ je σ -algebra jej podmnožín. Potom

$$(S4) \quad \Omega \in \mathcal{F}$$

$$(S5) \quad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$$

$$(S6) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup\{A_i: i = 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{F}$$

$$(S7) \quad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

$$(S8) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \cap\{A_i: i = 1, 2, \dots, n\} \in \mathcal{F}$$

$$(S9) \quad \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cap\{A_n: n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$$

$$(S10) \quad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A - B \in \mathcal{F}$$

Definícia 2.

Nech Ω je ľubovoľná neprázdna množina a nech $\mathcal{F}$ je σ -algebra jej podmnožín. *Pravdepodobnosťou* nazývame reálnu funkciu $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ s vlastnosťami

$$(P1) \quad P(\Omega) = 1$$

$$(P2) \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset, A_i, A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow P(\cup\{A_n: n \in \mathbb{N}\}) = \sum\{P(A_n): n \in \mathbb{N}\}.$$

Trojica $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa nazýva *pravdepodobnostný priestor*.

Veta 2. (vlastnosti pravdepodobnosti)

Nech Ω je ľubovoľná neprázdna množina a nech $\mathcal{F}$ je σ -algebra jej podmnožín. Potom

$$(P3) \quad P(\emptyset) = 0$$

- (P4) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(P5) $\forall A \in \mathcal{F}, P(A^c) = 1 - P(A)$
(P6) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$
(P7) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
(P8) $\forall A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
(P9) $\forall i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset, A_i, A_j \in \mathcal{F} \Rightarrow P(\cup\{A_i: i = 1, 2, \dots, n\}) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$
(P10) $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow P(\cup\{A_n: n \in \mathbb{N}\}) = \lim_n P(A_n)$
(P11) $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \supseteq A_{n+1}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow P(\cap\{A_n: n \in \mathbb{N}\}) = \lim_n P(A_n)$

Podmienená pravdepodobnosť

Definícia 3.

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $A, B \in \mathcal{F}$, pričom $P(B) \neq 0$. *Podmienenou pravdepodobnosťou* udalosti A za podmienky B budeme nazývať číslo

$$P_B(A) = P(A|B) = P(A \cap B)/P(B).$$

Veta 3 (o úplnej pravdepodobnosti a Bayesov vzorec)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech E je spočítateľná indexová množina. Nech $\forall i \in E, B_i \in \mathcal{F}, P(B_i) \neq 0$ a $\forall i, j \in E, i \neq j, B_i \cap B_j = \emptyset$. Nech $A \in \mathcal{F}, P(A) \neq 0$ a $A \subseteq \cup\{B_i: i \in E\}$. Potom

- $P(A) = \sum\{P(B_i)P(A|B_i): i \in E\}$
- $\forall k \in E, P(B_k|A) = P(B_k)P(A|B_k)/P(A)$

Nezávislosť udalostí

Definícia 4

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $A, B \in \mathcal{F}$. Hovoríme, že udalosti A, B sú *nezávislé*, ak $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Veta 4 (charakterizácia nezávislosti)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor, nech $A, B \in \mathcal{F}$ a nech $P(A) \neq 0 \neq P(B)$. Potom nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- A, B sú nezávislé

$$(ii) P(A|B) = P(A)$$

$$(iii) P(B|A) = P(B)$$

Definícia 5

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech pre $i = 1, 2, \dots, n$, $A_i \in \mathcal{F}$. Hovoríme, že udalosti $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú *nezávislé*, ak pre $\forall k \leq n$ a $\forall$ injektívne zobrazenie $z: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ platí $P(A_{z(1)} \cap A_{z(2)} \cap \dots \cap A_{z(k)}) = P(A_{z(1)})P(A_{z(2)})\dots P(A_{z(k)})$.

Náhodná premenná

Definícia 6.

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Funkciu $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takú, že pre $\forall c \in \mathbb{R}$, $A_c = \{\omega \in \Omega: X(\omega) < c\} \in \mathcal{F}$, budeme nazývať *náhodnou premennou* (náhodnou veličinou).

Definícia 7.

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je náhodná premenná.

Funkciu $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definovanú vzťahom

$F(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) < x\})$ budeme nazývať *distribučnou funkciou* náhodnej premennej X .

Veta 5 (vlastnosti distribučnej funkcie)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F . Potom

$$(D1) \forall a, b \in \mathbb{R}, P(\{\omega \in \Omega: a \leq X(\omega) < b\}) = F(b) - F(a)$$

$$(D2) F \text{ je neklesajúca funkcia}$$

$$(D3) F \text{ je spojitá zľava}$$

$$(D4) \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

Definícia 8

Náhodná premenná X sa nazýva *diskrétna náhodná premenná*, ak množina jej hodnôt je spočítateľná.

Definícia 9

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je diskretná náhodná premenná s distribučnou funkciou F . Funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vzťahom $f(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\})$ sa nazýva *pravdepodobnostnou funkciou* diskretnej náhodnej premennej X .

Veta 6 (vlastnosti pravdepodobnostnej funkcie)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je diskretná náhodná premenná s distribučnou funkciou F a s pravdepodobnostnou funkciou f , ktorej množina hodnôt je H . Potom

$$(PF1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lim_{t \rightarrow x+} F(t) - F(x)$$

$$(PF2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum\{f(t): t \in H, t \leq x\}$$

$$(PF3) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, P(\{\omega \in \Omega: a \leq X(\omega) < b\}) = \sum\{f(t): t \in H, a \leq t < b\}$$

$$(PF4) \quad \sum\{f(x): x \in H\} = 1$$

Definícia 10

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F . Funkcia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, taká, že pre $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

sa nazýva *funkciou hustoty* náhodnej premennej x . Náhodná premenná X sa nazýva *spojitá náhodná premenná*, ak má funkciou hustoty.

Veta 7 (vlastnosti funkcie hustoty)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je spojitá náhodná premenná s distribučnou funkciou F a s funkciou hustoty f . Potom

$$(FH1) \quad \exists S \subset \mathbb{R}, S \text{ spočítateľná tak, že } \forall x \in \mathbb{R} - S, f(x) = dF(x)/dx$$

$$(FH2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, P(\{\omega \in \Omega: a \leq X(\omega) < b\})$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

$$(FH3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Číselné charakteristiky rozdelení pravdepodobnosti

Definícia 11

Nech X je diskretná resp. spojitá náhodná premenná s pravdepodobnostnou funkciou resp. funkciou hustoty f a H nech je množina hodnôt v diskretnom prípade.

Číslo

$$E(X) = \sum\{xf(x): x \in H\} \text{ resp. } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

sa nazýva **stredná hodnota** náhodnej premennej X .

Číslo

$$\text{var}(X) = \sum\{(x - E(X))^2f(x): x \in H\} \text{ resp.}$$

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2f(x)dx$$

sa nazýva **variancia** náhodnej premennej X .

Transformácia náhodnej premennej

Veta 8 (rozdelenie pravdepodobnosti transformovanej diskkrétnej náhodnej premennej)

Nech X je diskretná náhodná premenná s pravdepodobnostnou funkciou f a s množinou hodnôt H . Nech $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľná funkcia. Potom Y je diskretná náhodná premenná s množinou hodnôt $K = \{h(x): x \in H\}$ a s pravdepodobnostnou funkciou

$$g(y) = \sum\{f(x): x \in H, y = h(x)\}$$

pre $\forall y \in K, g(y) = 0$ pre $y \notin K$.

Veta 9 (rozdelenie pravdepodobnosti transformovanej spojitej náhodnej premennej)

Nech X je spojitá náhodná premenná s funkciou hustoty f a s množinou hodnôt H . Nech $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je rýdzomonotónna diferencovateľná funkcia. Potom $Y = h(X)$ je spojitá náhodná premenná a $\exists$ spočítateľná množina S tak, že pre jej funkciu hustoty g platí

$$\forall y \in \mathbb{R} - S$$

$$g(y) = f(h^{-1}(y)) |dh^{-1}(y)/dy|$$

Veta 10

Nech X je diskrétna resp. spojitá náhodná premenná s pravdepodobnostnou funkciou resp. funkciou hustoty f a H nech je množina hodnôt v diskrétnom prípade.

Nech $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je taká funkcia, že $Y = h(X)$ je diskrétna resp. spojitá náhodná premenná.

Potom

$$E(Y) = \sum \{h(x)f(x): x \in H\} \text{ resp.}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

Dôsledok

$$\text{var}(X) = E((X - E(X))^2)$$

Náhodný vektor

Definícia 12.

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor. Funkciu $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ so zložkami $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_i$, ktoré sú náhodnými premennými, budeme nazývať *náhodným vektorom*.

Definícia 13.

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je náhodná premenná.

Funkciu $F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ definovanú vzťahom

$F(x) = P(\{\omega \in \Omega: X_i(\omega) < x_i, \text{ pre } i = 1, 2, \dots, n\})$ budeme nazývať *distribučnou funkciou* náhodného vektora X .

Veta 11 (vlastnosti distribučnej funkcie náhodného vektora)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je náhodný vektor s distribučnou funkciou F . Nech I, J je ľubovoľný rozklad indexovej množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, $y, Y, a_i \leq b_i$, resp. $z, Z, c \leq d$, sú subvektory vektorov $x, X, u, v \in \mathbb{R}^n$ so zložkami určenými indexovou množinou I , resp. indexovou množinou J , Potom

$$(D1) P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in [a, b] \times [c, d]\}) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c)$$

(D2) F je v každej zložke neklesajúca funkcia,

(D3) F je v každej zložke spojitá zľava,

$$(D4) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = 0$$

(D5) ak G je distribučná funkcia subvektora Y , tak $\lim_{z \rightarrow -\infty} F(z) = G(y)$,

Definícia 14

Náhodný vektor X sa nazýva *diskrétne náhodný vektor*, ak všetky jej zložky sú diskkrétne náhodné premenné.

Definícia 15

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je diskrétne náhodný vektor. Funkcia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná vzťahom $f(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\})$ sa nazýva *pravdepodobnostnou funkciou* diskrétného náhodného vektora X .

Veta 12 (vlastnosti pravdepodobnostnej funkcie náhodného vektora)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je diskrétne náhodný vektor s množinou hodnôt H , s distribučnou funkciou F a s pravdepodobnostnou funkciou f . Potom

$$(PF1) \forall x \in \mathbb{R}^n, F(x) = \sum\{f(t): t \in H, t \leq x\}$$

$$(PF2) \forall a, b \in \mathbb{R}^n, P(\{\omega \in \Omega: a \leq X(\omega) \leq b\}) = \sum\{f(t): t \in H, a \leq t \leq b\}$$

$$(PF3) \sum\{f(x): x \in H\} = 1$$

(PF4) ak I, J je ľubovoľný rozklad indexovej množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, y resp. z sú subvektory vektora x so zložkami určenými indexovou množinou I resp. J , H_z je množina všetkých subvektorov vektorov $z \in H$, určených indexovou množinou J a g je pravdepodobnostná funkcia subvektora Y , tak $\sum\{f(y, z): z \in H_z\} = g(y)$.

Definícia 16

X je náhodný vektor s distribučnou funkciou F . Funkcia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, taká, že pre $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

sa nazýva **funkciou hustoty** náhodného vektora X . Náhodný vektor X sa nazýva **spojitý náhodný vektor**, ak má funkciou hustoty.

Veta 13 (vlastnosti funkcie hustoty)

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech X je spojitý náhodný vektor s distribučnou funkciou F a s funkciou hustoty f . Potom

(FH1) $\exists S \subset \mathbb{R}^n$, S spočítateľná tak, že $\forall x \in \mathbb{R}^n - S$, $f(x) = d^n F(x)/dx^n$

(FH2) $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, $P\{\omega \in \Omega: a \leq X(\omega) < b\}$

$$= \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$(FH3) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

(FH4) ak I, J je ľubovoľný rozklad indexovej množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, y resp. z sú subvektory vektora x so zložkami určenými indexovou množinou I resp. J , a g je funkcia hustoty subvektora Y , tak

$$(FH5) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z) dz = g(y)$$

Nezávislosť zložiek náhodného vektora

Definícia 17.

Nech X je náhodný vektor s distribučnou funkciou $F(x)$ a nech $F_i(x_i)$ je distribučná funkcia i -tej zložky X_i náhodného vektora X . Hovoríme, že **zložky vektora X sú nezávislé**, ak pre všetky vektory $x \in \mathbb{R}^n$ platí

$$F(x) = \prod \{F_i(x_i): i = 1, 2, \dots, n\}$$

Veta 14. (podmienky nezávislosti náhodných premenných)

Nech X je diskretný resp. spojitý náhodný vektor s distribučnou funkciou $F(x)$ a s pravdepodobnostnou funkciou, resp. funkciou hustoty f . Nech $F_i(x_i)$ je distribučná funkcia a $f_i(x_i)$ pravdepodobnostná funkcia, resp. funkcia hustoty i -tej zložky X_i náhodného vektora X . Zložky vektora X sú nezávislé práve vtedy, ak pre všetky vektory $x \in \mathbb{R}^n$, resp. v spojitom prípade okrem spočítateľne veľa prvkov $\mathbb{R}^n$ platí

$$f(x) = \prod \{f_i(x_i): i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Číselné charakteristiky rozdelení pravdepodobnosti náhodného vektora

Definícia 18.

Nech X je diskretný resp. spojitý náhodný vektor. Vektor $E(X)$, ktorého i -tou zložkou je stredná hodnota $E(X_i)$ i -tej zložky X_i náhodného vektora X , sa nazýva *strednou hodnotou náhodného vektora* X .

Definícia 19.

Nech X je diskretný resp. spojitý náhodný vektor so strednou hodnotou $E(X)$. Číslo

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \sum \sum \{(x_i - E(X_i))(x_j - E(X_j))f_{ij}(x_i, x_j): x_i \in H_i, x_j \in H_j\}$$

resp.

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \int \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E(X_i))(x_j - E(X_j))f_{ij}(x_i, x_j)dx_i dx_j$$

kde f_{ij} je pravdepodobnostná funkcia, resp. funkcia hustoty subvektora (X_i, X_j) a H_k pre $k = i, j$, je v diskretnom prípade množina hodnôt k -tej zložky X_k , sa nazýva *kovariancia* zložiek X_i, X_j náhodného vektora X .

Matica

$$\text{cov}(X) = [\text{cov}(X_i, X_j)]_{i,j=1,2,\dots,n}$$

sa nazýva *kovariančná matica* náhodného vektora X .

Číslo

$$\rho(X_i, X_j) = \text{cov}(X_i, X_j) / \sqrt{(\text{var}(X_i)\text{var}(X_j))}$$

sa nazýva *korelačný koeficient* zložiek X_i, X_j náhodného vektora X .

Rozdelenie pravdepodobnosti súčtu náhodných premenných

Veta 15.

Nech $Z = (X, Y)$ je diskretný, resp. spojitý náhodný vektor s pravdepodobnostnou funkciou, resp. funkciou hustoty $f(x, y)$ a nech v diskretnom prípade H_X a H_Y sú množiny hodnôt, ktoré nadobúdajú zložky X , resp. Y náhodného vektora Z . Potom náhodná premenná $Z = X + Y$ je diskretná, resp. spojitá a pre jej pravdepodobnostnú funkciu, resp. funkciu hustoty g platí

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum \{f(x, z - x) : x \in H_X\} \\ &= \sum \{f(z - y, y) : y \in H_Y\} \end{aligned}$$

ak $z \in H_Z = \{x + y : x \in H_X, y \in H_Y\}$,

$g(z) = 0$ inak, resp.

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy$$

Definícia 20.

Nech $Z = (X, Y)$ je diskretný, resp. spojitý náhodný vektor s nezávislými zložkami, ktorých pravdepodobnostné funkcie, resp. funkcie hustoty sú $f_1(x)$ a $f_2(y)$ a nech v diskretnom prípade H_X a H_Y sú množiny hodnôt, ktoré nadobúdajú zložky X a Y náhodného vektora Z . Potom pravdepodobnostná funkcia, resp. funkcia hustoty $g(z)$ náhodnej premennej $Z = X + Y$ sa nazýva *konvolúcia* funkcií $f_1(x)$ a $f_2(y)$, t.j. pre konvolúciu $f_1 * f_2$ platí

$$f_1 * f_2(z) = \sum \{f_1(x) f_2(z - x) : x \in H_X\}$$

$$= \sum \{f_1(z - y) f_2(y) : y \in H_Y\}$$

ak $z \in H_Z = \{x + y : x \in H_X, y \in H_Y\}$,

$f_1 * f_2(z) = 0$ inak, resp.

$$f_1 * f_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z - x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z - y) f_2(y) dy$$

Veta 16.

Nech X je diskretný resp. spojitý náhodný vektor s pravdepodobnostnou funkciou resp. funkciou hustoty f a H nech je množina vektorových hodnôt v diskretnom prípade.

Nech $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je také zobrazenie, že $Y = h(X)$ je diskretná resp. spojitá náhodná premenná.

Potom

$$E(Y) = \sum \{h(x)f(x) : x \in H\} \text{ resp.}$$

$$E(Y) = \int \int \dots \int h(x) f(x) dx$$

Vlastnosti číselných charakteristík náhodných premenných a vektorov

Veta 17. (vlastnosti strednej hodnoty)

Nech X, Y sú náhodné premenné a $a, b \in \mathbb{R}$. Potom

$$(E1) E(a) = a$$

$$(E2) X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$$

$$(E3) E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$(E4) X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$

$$(E5) X, Y \text{ nezávislé} \Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$$

$$(E6) E(X^2) = 0 \Rightarrow P(X = 0) = 1$$

$$(E7) |E(X)| \leq E(|X|)$$

$$(E8) E^2(X) \leq E(X^2)$$

Veta 18. (Cauchy – Schwarzova nerovnosť)

$$E^2(XY) \leq E(X^2)E(Y^2)$$

Veta 19. (vlastnosti variancie)

$$(V1) \text{ var}(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$(V2) \text{ var}(aX) = a^2 \text{ var}(X)$$

$$(V3) \text{ var}(X \pm Y) = \\ = \text{ var}(X) + \text{ var}(Y) \pm 2\text{ cov}(X, Y)$$

$$(V4) \text{ var}(X) = 0 \Leftrightarrow P(X = E(X)) = 1$$

Veta 20. (vlastnosti kovariancie)

$$(C1) \text{ cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$(C2) \text{ cov}(X, Y) = \text{ cov}(Y, X)$$

$$(C3) \text{ cov}(aX + b, Y) = a \text{ cov}(X, Y)$$

$$(C4) \text{ cov}(X + Y, Z) = \text{ cov}(X, Z) + \text{ cov}(Y, Z)$$

$$(C5) X, Y \text{ nezávislé} \Rightarrow \text{ cov}(X, Y) = 0$$

$$(C6) \text{ cov}^2(X, Y) \leq \text{ var}(X) \text{ var}(Y)$$

Veta 21. (vlastnosti korelačného koeficientu)

$$(K1) X, Y \text{ nezávislé} \Rightarrow \rho(X, Y) = 0$$

$$(K2) |\rho(X, Y)| \leq 1$$

$$(K3) |\rho(X, Y)| = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \\ P(Y = aX + b) = 1$$

$$(K4) Y = aX + b \Rightarrow \rho(X, Y) = 1 \text{ ak } a > 0 \\ \rho(X, Y) = -1 \text{ ak } a < 0$$

Veta 22.

Nech X je náhodný vektor, $b \in \mathbb{R}^m$ a A je matica typu $m \times n$. Potom pre strednú hodnotu $E(Y)$ a kovariančnú maticu $\text{ var}(Y)$ náhodného vektora $Y = AX + b$ platí

$$E(Y) = A E(X) + b$$

$$\text{ var}(Y) = A \text{ var}(X) A^T$$

Veta 23.

Kovariančná matica $\text{ var}(X)$ ľubovoľného náhodného vektora X je
 – symetrická
 – nezáporne definitná

Postupnosti náhodných premenných

Definícia 21.

Nech X je náhodná premenná a nech $\{X_n | n = 1, 2, \dots\}$ je postupnosť náhodných premenných definovaných na tom istom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako náhodná premenná X . Hovoríme, že postupnosť X_n *konverguje* k X *podľa pravdepodobnosti* a píšeme

$$X_n \xrightarrow{pp} X,$$

ak pre $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Veta 24(zákon veľkých čísel)

Ak $\{X_n | n = 1, 2, \dots\}$ je postupnosť nekorelovaných náhodných premenných a existujú čísla $b, c \in \mathbb{R}$ tak, že pre $\forall n \in \mathbb{N}$ $E(X_n) = c$ a $\text{var}(X_n) \leq b$, tak

$$(1/n) \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{pp} c$$

Definícia 22.

Budeme hovoriť, že postupnosť X_n *konverguje* k X *v kvadratickom strede* a píšeme

$$X_n \xrightarrow{L_2} X,$$

ak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E((X_n - X)^2) = 0.$$

Veta 25.(vzťah medzi konvergenciou "pp" a L^2)

$$X_n \xrightarrow{L_2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{pp} X$$

Veta 26.(ekvivalentná podmienka L_2 konverencie)

Postupnosť X_n konverguje k X v kvadratickom strede práve vtedy, keď

$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} E((X_m - X_n)^2) = 0$$

Veta 27. (Dôsledky L_2 konverencie)

L_2

Nech $X_n \rightarrow X$ a $E(X^2) < \infty$ alebo $E(X_n^2) < \infty$. Potom

a) $E(|X_n - X|) \rightarrow 0$

b) $E(X_n) \rightarrow E(X)$

c) $E(X_n^2) \rightarrow E(X^2)$

d) $E(ZX_n) \rightarrow E(ZX)$

e) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ak X_n konverguje v kvadratickom strede k X a Y_n konverguje v kvadratickom strede k Y , potom aj $aX_n + bY_n$ konverguje v kvadratickom strede k $aX + bY$.

Definícia 23.

Nech X je náhodná premenná s distribučnou funkciou F a nech $\{X_n | n = 1, 2, \dots\}$ je postupnosť náhodných premenných s distribučnými funkciami F_n . Hovoríme, že postupnosť X_n *konverguje* k X (resp. k rozdeleniu určenému distribučnou funkciou F) *podľa distribúcie*

F

(zápis: $X_n \rightarrow X$), ak postupnosť F_n bodovo konverguje k F , t.j. pre $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

Veta 28. (Centrálna limitná veta)

Nech $\{X_n | n = 1, 2, \dots\}$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných s tým istým rozdelením, ktorého stredná hodnota je m a variancia b^2 . Potom postupnosť

$$Y_n = (S_n - nm)/(b\sqrt{n})$$

kde $S_n = \sum\{X_i | i = 1, 2, \dots, n\}$, konverguje podľa distribúcie k rozdeleniu $N(0, 1)$.