

STOCHASTICKÝ PROCES

Definícia stochastického procesu

Definícia 1

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech T je podmnožina $\mathbb{R}$. Pre každé $t \in T$ nech $X(t, \omega)$ je náhodná premenná definovaná na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Systém $\{X(t, \omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ náhodných premenných nazývame *náhodný proces*. Premennú t nazývame *čas*.

Ak T je spočítateľná množina, tak $X(t)$ nazývame *proces s diskrétnym časom* alebo *časový rad* alebo *reťazec*. Ak T nie je spočítateľná, hovoríme o $X(t)$ ako o *procese so spojitým časom*.

Pre pevné $\omega \in \Omega$ je funkcia $x(t) = X(t, \omega)$ *realizáciou náhodného procesu*.

Definícia 2

Nech $n \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, nech $\mathfrak{I}$ je systém všetkých intervalov v E a nech $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathfrak{I}$. Podmnožinu

$$C(t_1, t_2, \dots, t_n) = \{x \in E^T: x(t_1) \in B_1, x(t_2) \in B_2, \dots, x(t_n) \in B_n\}$$

množiny E^T nazývame *merateľný konečnorozmerný valec* v E^T so *základňou* $B_1, B_2, \dots, B_n$ v bodoch $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Najmenšia σ -algebra $\mathcal{B}^T$ nad všetkými konečnorozmernými valcami v E^T sa nazýva *súčinová σ -algebra* v E^T .

Definícia 3

Nech $\{P_F: F \subset T, F \text{ je konečná množina}\}$ je systém pravdepodobností definovaných na konečnorozmerných priestoroch, určených množinami F . Hovoríme, že tento systém *spĺňa podmienku konzistencie*, ak pre každé dve konečné

množiny $F \subset G = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subset T$ a pre ľubovoľný valec C so základňou $B_1, B_2, \dots, B_n$ v bodoch $t_1, t_2, \dots, t_n$, takou, že pre $t \in G - F$ je $B_t = E$, platí $P_F(C) = P_G(C)$.

Veta 1.

Nech $\{P_F: F \subset T, F \text{ konečná množina}\}$ je systém pravdepodobností definovaných na konečnorozmerných priestoroch, určených množinami F a nech tento systém spĺňa podmienku konzistencie. Potom existuje jediná pravdepodobnosť P_T definovaná na súčinovej σ -algebre $\mathcal{B}^T$, ktorá sa na každom konečnorozmernom valci so základňou v bodoch množiny F zhoduje s pravdepodobnosťou P_F .

Definícia 4.

Nech $X = \{X(t): t \in T\}$ je náhodný proces definovaný na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a nech $(E^T, \mathcal{B}^T)$ je priestor funkcií, definovaných na T so súčinovou σ -algebrou. Pravdepodobnosť P_T definovaná pre každé $B \in \mathcal{B}^T$ vzťahom

$$P_T(B) = P(X^{-1}(B))$$

sa nazýva *rozdelenie pravdepodobnosti náhodného procesu* X .

Definícia 5.

Reálnu funkciu $m = m(t)$ definovanú na množine T predpisom

$$m(t) = E(X(t))$$

nazývame *stredná hodnota náhodného procesu*.

Definícia 6.

Náhodný proces $X = \{X(t): t \in T\}$ nazývame *stacionárny v strednej hodnote*, ak jeho stredná hodnota je konštantná.

Náhodný proces, ktorého stredná hodnota sa rovná nule nazývame *centrovaný*.

Definícia 7.

Nech $X = \{X(t): t \in T\}$ je náhodný proces, nech $m(t) = E(X(t))$ a nech $E(X^2(t)) < \infty$ pre všetky $t \in T$. Reálnu funkciu $R(s, t)$ definovanú na $T \times T$ vzťahom

$$R(s, t) = \text{cov}(X(s), X(t)) = E((X(s) - m(s))(X(t) - m(t)))$$

nazývame *kovariančnou funkciou náhodného procesu* X .

Definícia 8.

Náhodný proces $X = \{X(t): t \in T\}$ sa nazýva *kovariančne stacionárny*, ak jeho kovariančná funkcia R závisí len od vzdialenosti argumentov, teda ak $R(s, t) = R(|s - t|)$. Kovariančná funkcia sa niekedy nazýva aj *autokovariančná funkcia*.

Veta 2.

Pre kovariančnú funkciu kovariančne stacionárneho procesu platí:

(a) $\text{var}(X(t)) = R(0)$ pre všetky $t \in T$,

(b) $R(-t) = R(t)$ pre všetky $t \in T$,

(c) $|R(t)| = |\text{cov}(X(s), X(s + t))| \leq (\text{var}(X(s))\text{var}(X(s + t)))^{1/2} \leq R(0)$ pre všetky $t \in T$.

Definícia 9

Náhodný proces sa nazýva *slabo stacionárny*, ak je stacionárny v strednej hodnote a v kovariancii.

Definícia 10

Náhodný proces sa nazýva *silno stacionárny*, ak pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ a ľubovoľné $s, t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ majú vektory

$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ a $(X(s + t_1), X(s + t_2), \dots, X(s + t_n))$ rovnaké rozdelenia pravdepodobnosti.

MARKOVOVSKÉ REŤAZCE

Homogénny markovovský proces

Definícia 1

Diskrétny stochastický proces (s diskretným časom) sa nazýva *markovovský (reťazec)*, ak pre ľubovoľnú n -tícu časových hodnôt $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ a ľubovoľnú n -tícu stavov $s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,n}$ platí

$$\begin{aligned} P(X(t_n) = s_{i,n} | X(t_1) = s_{i,1}, X(t_2) = s_{i,2}, \dots, X(t_{n-1}) = s_{i,n-1}) = \\ = P(X(t_n) = s_{i,n} | X(t_{n-1}) = s_{i,n-1}) \end{aligned}$$

Definícia 2

Diskrétny stochastický proces (s diskretným časom) sa nazýva *homogénny (reťazec)*, ak pre ľubovoľnú $(n + 1)$ -tícu časových hodnôt $t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n, h$ a ľubovoľnú n -tícu stavov $s_{k,1}, s_{k,2}, \dots, s_{k,i}, \dots, s_{k,n}$ platí

$$\begin{aligned} P(X(t_{i+1} + h) = s_{k,i+1}, X(t_{i+2} + h) = s_{k,i+2}, \dots, X(t_n + h) = s_{k,n} | \\ X(t_1 + h) = s_{k,1}, X(t_2 + h) = s_{k,2}, \dots, X(t_i + h) = s_{k,i}) = \\ = P(X(t_{i+1}) = s_{k,i+1}, X(t_{i+2}) = s_{k,i+2}, \dots, X(t_n) = s_{k,n} | \\ X(t_1) = s_{k,1}, X(t_2) = s_{k,2}, \dots, X(t_i) = s_{k,i}) \end{aligned}$$

Veta 1.

Nech X je diskretný homogénny markovovský proces s množinou stavov $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ s diskretným časom a s

rozdelením pravdepodobnosti $p_i^{(n)} = P(X(n) = s_i)$. Potom pre štvorcovú maticu $T = \{p_{i,j}\}$ stupňa k , v ktorej $p_{i,j} = P(X(1) = s_j | X(0) = s_i)$, platí

$$(1) \quad \sum_{j=1}^k p_{i,j} = 1 \quad \text{pre } i = 1, \dots, k$$

$$(2) \quad p^{(n)} = p^{(n-1)} T \quad \text{pre } n = 0, 1, \dots$$

$$(3) \quad p^{(n)} = p^{(0)} T^n \quad \text{pre } n = 0, 1, \dots$$

$$(4) \quad (T^n)_{i,j} = P(X(n) = j | X(0) = i)$$

Stacionárnosť a ergodickosť homogénneho markovovského reťazca

Veta 1

Nech X je homogénny markovovský proces s diskretným časom a nech vektor $p^{(n)}$ vyjadruje rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $X(n)$. X je v silnom zmysle stacionárny proces práve vtedy, keď $p^{(n)} = p^{(0)}$ pre $n = 1, 2, \dots$.

Veta 2 (Markov)

Pre ľubovoľný homogénny markovovský reťazec X existuje taký začiatkový vektor $p^{(0)}$, že X je stacionárny v silnom zmysle.

Definícia 4.

Homogénny markovovský reťazec X sa nazýva **ergodický**, ak pre všetky $i = 1, 2, \dots, k$ existujú limity

$$e_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_i^{(n)} \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, k$$

a sú nezávislé od začiatočného rozdelenia $p^{(0)}$. Vektor e so zložkami e_i sa nazýva *finálnym rozdelením* ergodického homogénneho markovovského reťazca X .

Veta 3

Homogénny markovovský reťazec X s prechodovou maticou T je ergodický práve vtedy, keď existuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n = T^\infty$$

a matica T^∞ je pravdepodobnostná matica s rovnakými riadkami.

Veta 4

Homogénny markovovský reťazec X s prechodovou maticou T je ergodický práve vtedy, keď existuje taká mocnina matice T , ktorá má v aspoň jednom stĺpci všetky prvky nenulové.

Veta 5

Ak existuje mocnina pravdepodobnostnej matice T stupňa k , ktorá má nenulový stĺpec, potom existuje prirodzené číslo m , $m \leq k^3 - 3k + 3$, pre ktoré T^m má nenulový stĺpec.

HOMOGENNE NÁHODNÉ PROCESY SO SPOJITÝM ČASOM

Homogénny markovovský proces so spojitým časom, Kolmogorovove rovnice

Definícia 1.

Intenzitou prechodu homogénneho markovovského procesu X so spojitým časom sa nazýva číslo

$$\lambda_{i,j} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{P(X(s+t) = j \mid X(s) = i)}{t}$$

pre všetky $i \neq j$.

Veta 1 (Kolmogorov)

Nech X je homogénny markovovský proces s množinou stavov $\{0, 1, \dots\}$ a intenzitami prechodu λ_{ij} . Ak sú funkcie p_i diferencovateľné, tak vyhovujú diferenciálnym rovniciam

$$p_i' = p_i(t) \left(- \sum_{j, j \neq i} \lambda_{i,j} \right) + \sum_{j, j \neq i} \lambda_{j,i} p_j(t)$$

pre $i = 0, 1, \dots$.

Poissonov proces

Definícia 1

Poissonovým náhodným procesom s parametrom $\lambda > 0$ budeme nazývať diskretný náhodný proces X s množinou stavov $k = 0, 1, \dots$ a so spojitým časom $T = [0, \infty)$, v ktorom $P(X(0) = 0) = 1$ a pre $\forall s, t \in T$ platí

$$P(X(s+t) - X(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp(-\lambda t)$$

Veta 1 (vlastnosti Poissonovho procesu)

Poissonov proces je

- (1) homogénny,
- (2) proces s nezávislými prírastkami,
- (3) ordinárny, t.j. pre $\forall t \in T$ platí

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{P(X(t+h) - X(t) > 1)}{h} = 0$$

Veta 2

Každý homogénny ordinárny náhodný proces s nezávislými prírastkami je Poissonov proces.

SYSTÉMY HROMADNEJ OBSLUHY

Zákazníci – nekonečná populácia

n -tý zákazník prichádza v čase τ_n

$t_n = \tau_n - \tau_{n-1}$

$t_1, t_2, \dots, t_n$ – iid náhodné premenné

$A(t) = P(t_n < t)$ – rozdelenie pravdepodobnosti času medzi príchodmi zákazníkov

Obsluha

x_n – doba obsluhy n -tého zákazníka

$B(t) = P(x_n < t)$ – rozdelenie pravdepodobnosti doby obsluhy

Spôsob obsluhy

FIFO, LIFO, náhodne, RR, rôzne druhy priorít, ...

Kendalov zápis

A/B/m/N – S

A – distribúcia príchodu zákazníkov

B – distribúcia obsluhy

m – počet kanálov

N – ohraničenie dĺžky radu

S – spôsob obsluhy

M – markovovský proces distribúcie

$A(t) = M(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
pre príchod zákazníkov

$B(t) = M(t) = 1 - \exp(-\mu t)$
pre dobu obsluhy

M/M/1/0

– systém s jedným kanálom, bez čakania

intenzity prechodu

$$\lambda_{0,1} = \lambda, \quad \lambda_{1,0} = \mu$$

Kolmogorovove rovnice

$$p_0' = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$p_1' = -\mu p_1 + \lambda p_0$$

Ustálený stav

$$p_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$$

$$p_0^* = \mu / (\lambda + \mu)$$

$$p_1^* = \lambda / (\lambda + \mu)$$

stredná hodnota počtu zákazníkov, ktorých systém obslúži za jednotku času

$$\alpha = \lambda\mu/(\lambda + \mu)$$

M/M/1 / ∞

– systém s jedným kanálom,
s neobmedzeným čakaním

intenzity prechodu

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda, \quad \lambda_{i+1,i} = \mu \quad \text{pre } i = 0, 1, 2, \dots$$

Kolmogorovove rovnice

$$p_0' = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$p_1' = -(\lambda + \mu)p_1 + \lambda p_0 + \mu p_2$$

$$p_2' = -(\lambda + \mu)p_2 + \lambda p_1 + \mu p_3$$

...

$$p_k' = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

...

Ustálený stav

$$p_1^* = (\lambda/\mu)(1 - \lambda/\mu)$$

$$p_2^* = (\lambda/\mu)^2(1 - \lambda/\mu)$$

...

$$p_k^* = (\lambda/\mu)^k(1 - \lambda/\mu)$$

...

stredná hodnota počtu zákazníkov v rade

$$\bar{r} = \lambda^2/(\mu(\mu - \lambda))$$

stredná hodnota doby čakania v rade

$$\bar{t} = \lambda / (\mu(\mu - \lambda))$$

M/M/n/0

– systém s n kanálmi,
bez čakania

intenzity prechodu

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda, \quad \lambda_{i+1,i} = (i + 1)\mu$$

pre $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Kolmogorovove rovnice

$$p_0' = -\lambda p_0 + \mu p_1$$

$$p_1' = -(\lambda + \mu)p_1 + \lambda p_0 + 2\mu p_2$$

$$p_2' = -(\lambda + 2\mu)p_2 + \lambda p_1 + 3\mu p_3$$

...

$$p_k' = -(\lambda + k\mu)p_k + \lambda p_{k-1} + (k + 1)\mu p_{k+1}$$

...

$$p_{n-1}' = -(\lambda + (n-1)\mu)p_{n-1} + \lambda p_{n-2} + n\mu p_n$$

$$p_n' = -n\mu p_n + \lambda p_{n-1}$$

Ustálený stav (Erlangov vzorec)

$$p_k^* = (\lambda/\mu)^k / (k!(1 + (\lambda/\mu)/1! + (\lambda/\mu)^2/2! + \dots + (\lambda/\mu)^k/k!))$$

stredná hodnota počtu zákazníkov, ktorých systém obslúži za jednotku času

$$\alpha = \lambda / (1 - p_n^*)$$

stredná hodnota počtu obsadených kanálov $\bar{k} = (\lambda/\mu)(1 - p_n^*)$

M/M/n/ ∞

- systém s n kanálmi,
s neobmedzeným čakaním

intenzity prechodu

$$\begin{aligned}\lambda_{i,i+1} &= \lambda, & \lambda_{i+1,i} &= (i + 1)\mu \\ & & \text{pre } i &= 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ \lambda_{i,i+1} &= \lambda, & \lambda_{i+1,i} &= n\mu \\ & & \text{pre } i &= n, n+1, \dots\end{aligned}$$

Kolmogorovove rovnice

$$\begin{aligned}p_0' &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \\ p_1' &= -(\lambda + \mu)p_1 + \lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ p_2' &= -(\lambda + 2\mu)p_2 + \lambda p_1 + 3\mu p_3 \\ &\dots \\ p_n' &= -(\lambda + n\mu)p_n + \lambda p_{n-1} + n\mu p_{n+1} \\ p_{n+1}' &= -(\lambda + n\mu)p_{n+1} + \lambda p_n + n\mu p_{n+2} \\ &\dots\end{aligned}$$

Ustálený stav

$$\begin{aligned}p_0^* &= (1 + (\lambda/\mu)/1! + (\lambda/\mu)^2/2! + \dots + (\lambda/\mu)^n/n!) + (\lambda/\mu)^{n+1} \\ &\quad /((n!(n - \lambda/\mu)))^{-1} \\ p_k^* &= p_0^* (\lambda/\mu)^k/k! \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots, n \\ p_k^* &= p_0^* (\lambda/\mu)^k/(n!n^{k-n}) \\ &\quad \text{pre } k = n+1, n+2, \dots\end{aligned}$$

stredná hodnota počtu zákazníkov v rade

$$\bar{r} = p_0^* (\lambda/\mu)^{n+1} / ((n-1)!(n-\lambda/\mu)^2)$$

stredná hodnota doby čakania v rade

$$\bar{t} = \bar{r} / \lambda$$

stredná hodnota počtu obsadených kanálov

$$\bar{k} = \lambda / \mu$$