Analýza diferenčnej rovnice 1. rádu v modeli Ponuka - Dopyt

Peter Chvojka, RNDr. Boris Rudolf, CSc.*
Katedra matematiky, Fakulta aplikovanej informatiky,
Slovenská technická univerzita, Ilkovičova 3, 812 19 Bratislava, Slovenská republika
E-mail: p.chvojka@zoznam.sk

Abstrakt

Cieľom tejto práce je zovšeobecniť lineárnu závislosť v diferenčnej rovnici, ktorá vznikne z rovnosti medzi ponukou a dopytom, na rovnicu ***p(n+1) = f(p(n)),*** *v ktorej je funkcia f lineárna lomená. Budeme študovať asymptotické vlastnosti rovnice, stabilitu pevného bodu, prípadne existenciu a stabilitu cyklov. V zhode s originálnym modelom budeme predpokladať, že funkcia f je klesajúca a naviac konvexná. Nájdeme postačujúcu podmienku lineárneho lomeného modelu, pri ktorej hodnoty p(n) ostávajú nezáporné.*

1. Úvod

Štandardný model ponuka – dopyt popisuje vývoj trhovej ceny danej komodity na základe vyváženosti medzi ponukou a dopytom.
Predpokladajme, že ponuka reaguje na dopyt s oneskorením a ponuka a dopyt sú modelované lineárnymi vzťahmi:

$$\mathbf{S(n+1) = s_1 p(n) + s_2},$$
$$\mathbf{D(n) = - d_1 p(n) + d_2},$$

v ktorých s_1, s_2, d_1, d_2 sú kladné konštanty, S(n) je ponuka, D(n) je dopyt a p(n) je cena v n – tom období (iteračnom kroku).

Podľa predpokladu sa trhová cena realizuje pri rovnosti

$$\mathbf{D(n+1) = S(n+1)}$$

z čoho dostaneme diferenčnú rovnicu 1. rádu

(1) $\mathbf{p(n+1) = Ap(n) + B},$

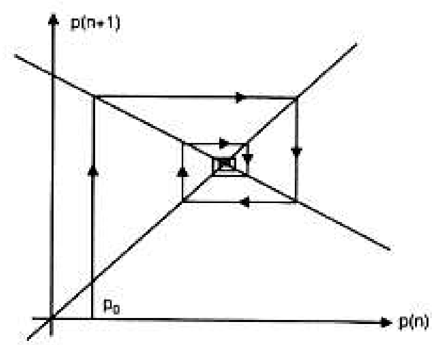
v ktorej $A = -\frac{s_1}{d_1}$, $B = \frac{d_2 - s_2}{d_1}$ sú konštanty.

Pevný bod lineárnej rovnice (1) je:

(2) $\mathbf{p^* = B/(1 – A)}.$

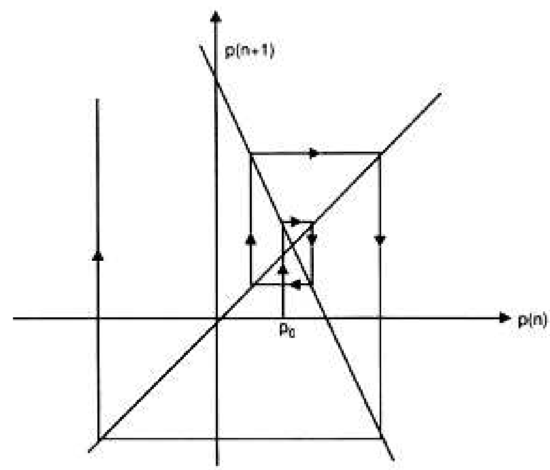
Podľa [E] je v lineárnom modeli v prípade:

a) **– 1 < A < 0,** pevný bod p* asymptoticky stabilný,



Obr. 1.

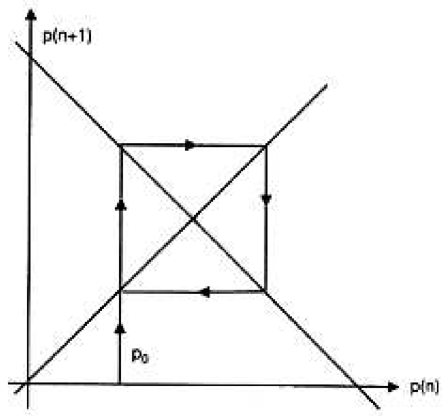
b) A< - 1, pevný bod p* nestabilný,



Obr. 2.

c) v hraničnom prípade, **A = - 1**, je p* stabilný, ale už nie asymptoticky a pre ľubovoľnú začiatočnú cenu p ≠ p* je riešením cyklus dĺžky 2 {p, Ap + B}, ktorý je tiež stabilný, ale nie asymptoticky. Pozri [E].

* Vedúci práce



Obr. 3.

2. Lineárny lomený model

Uvažujme diferenčnú rovnicu

(3) $$p(n+1)=\begin{cases} Ap(n)+B & \text{pre } p(n) \le r, \\ ap(n)+b & \text{pre } p(n) > r \end{cases}$$

s predpokladom spojitosti v bode r, t.j.

$$Ar + B = ar + b.$$

Číslo r budeme v ďalšom texte nazývať **bod zlomu.**

3. Bod zlomu na osi 1. kvadrantu

3.1 Cyklus dĺžky 2 – stabilný pevný bod

Vychádzajme z grafického riešenia problému, pričom do úvahy zoberme krajný prípad, cenu p(0) = 0 (keďže uvažovať o zápornej cene je nezmysel). Potom v nasledujúcom období bude cena p(1) = A * 0 +B = B. V období druhom bude cena p(2) = AB + B. V dôsledku toho, že A < -1 tak aj (AB + B) < 0, čiže ceny idú do záporných hodnôt. Možným riešením je použitie lineárnej lomenej funkcie s bodom zlomu v bode p* tak, aby k tomuto javu nedochádzalo. Ako je zrejmé z grafu, na osi p(n) musí existovať nejaký hraničný bod, v ktorom cena bude nulová. Týmto bodom na osi p(n) je bod (B,0). Potom pre polpriamku $y = ax + b$ prechádzajúcu týmto bodom a bodom (p*,p*) – teda $\left(\frac{B}{1-A}, \frac{B}{1-A}\right)$, musia platiť vzťahy:

$$0 = aB + b \qquad \frac{B}{1-A} = a\frac{B}{1-A} + b$$

Z nich úpravami:

$$b = -aB \qquad \frac{B}{1-A} = a\frac{B}{1-A} - aB \quad / (1-A)$$

$$B = a\,(B - B + AB).$$

A teda koeficienty sú:

$$a = \frac{1}{A},\ b = -\frac{B}{A}.$$

Rovnica polpriamky je:

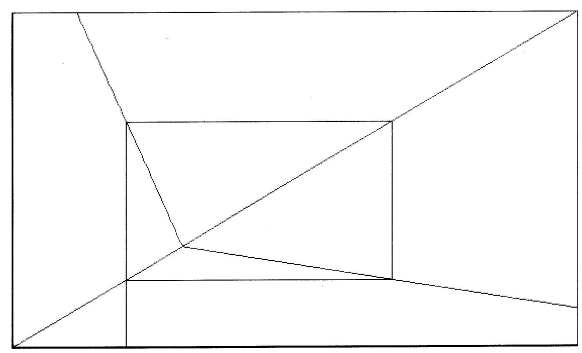
$$y = \frac{1}{A}x - \frac{B}{A}.$$

V ďalšom budeme skúmať lineárny lomený model:

(4) $$p(n+1) = \begin{cases} Ap(n) + B & \text{pre } p(n) \le p^*, \\ \frac{1}{A}p(n) - \frac{B}{A} & \text{pre } p(n) > p^*, \end{cases}$$

v ktorom je bod zlomu pevný bod p*.
Pre diferenčnú rovnicu formulujeme vetu.

Veta 1. Diferenčná rovnica (4) má stabilný pevný bod p* (nie asymptoticky). Pre k ≠ p* je riešením cyklus dĺžky 2 a to {k, Ak + B}.



Obr. 4.

3.2 Asymptoticky stabilný pevný bod

Uvažujme lineárny lomený model, v ktorom polpriamka $y = ax + b$ pretína x – ovú os za bodom (B,0). To znamená, že bude určená bodmi (B + c,0), c > 0 a $\left(\frac{B}{1-A}, \frac{B}{1-A}\right)$. Teda pre jej koeficienty platí:

$$0 = a(B+c) + b$$

$$b = -a(B+c)$$

Výpočtami dostávame:

$$\frac{B}{1-A} = a\left(\frac{B}{1-A}\right) + b$$

$$\frac{B}{1-A} = a\left(\frac{B}{1-A}\right) - a(B+c)$$

$$\frac{B}{1-A} = a\left(\frac{B - B + AB - c + Ac}{1-A}\right)$$

A teda $a = \dfrac{B}{AB - c + cA}$, $b = \dfrac{-B^2 - cB}{AB - c + cA}$.

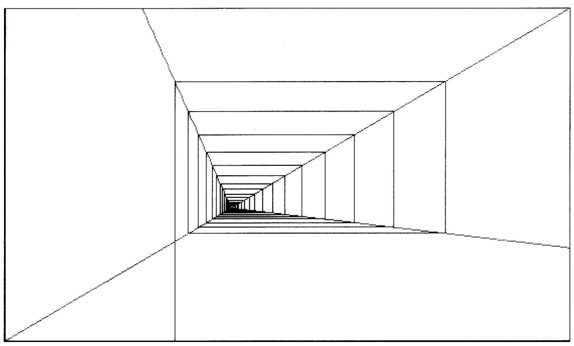
Diferenčná rovnica má tvar:

$$(5)\quad p(n+1) = \begin{cases} Ap(n) + B & \text{pre } p(n) \le p^*, \\ \dfrac{B}{AB-c+cA}p(n) + \dfrac{-B^2 - cB}{AB-c+cA} & \end{cases}$$

pre p(n) > p*.

Môžeme formulovať tvrdenie:

Veta 2. Diferenčná rovnica (5) má asymptoticky stabilný pevný bod p*.



Obr. 5.

3.3 Nestabilný pevný bod

V ďalšom kroku, uvažujeme lineárny lomený model, v ktorom polpriamka $y = ax + b$ pretína x – ovú os pred bodom (B,0), čiže prechádza bodmi (B – c,0), c > 0 a $\left(\dfrac{B}{1-A}, \dfrac{B}{1-A}\right)$. Pre jej koeficienty môžeme písať:

$$0 = a(B - c) + b$$

$$b = -a(B - c)$$

$$\frac{B}{1-A} = a\left(\frac{B}{1-A}\right) + b$$

$$\frac{B}{1-A} = a\left(\frac{B}{1-A}\right) - a(B - c)$$

$$\frac{B}{1-A} = a\left(\frac{B - B + AB + c - Ac}{1-A}\right)$$

Teda platí, že $a = \dfrac{B}{AB + c - cA}$,

$$b = \frac{-B^2 + cB}{AB + c - cA}.$$

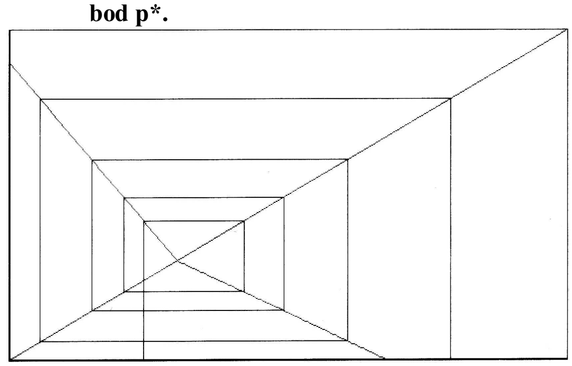
Predpis diferenčnej rovnice je nasledovný:

$$(6)\quad p(n+1) = \begin{cases} Ap(n) + B & \text{pre } p(n) \le p^*, \\ \dfrac{B}{AB+c-cA}p(n) + \dfrac{-B^2 + cB}{AB+c-cA} & \end{cases}$$

pre p(n) > p*.

Pre diferenčnú rovnicu formulujeme vetu.

Veta 3. Diferenčná rovnica (6) má nestabilný pevný bod p*.



Obr. 6.

Zaoberajme sa vzťahom medzi koeficientami A, a polpriamok a stabilitou bodu p*.

V 1. prípade je súčin týchto koeficientov rovný 1 - $A\dfrac{1}{A} = 1$.

V 2. prípade pre súčin koeficientov platí:

$$0 < \frac{AB}{AB - c + cA} < 1,$$

pretože AB < 0, - c < 0, cA < 0.

V 3. prípade je súčin koeficientov:

$$\frac{AB}{AB + c - cA} > 1,$$

lebo AB < 0, c > 0, - cA > 0.

Pokúsme sa formulovať **tvrdenie o stabilite pevného bodu p* pre rovnicu p(n+1) = f(p(n)),** v ktorej

$$f = \begin{cases} f_1 & p < p^*, \\ f_2 & p > p^*, \end{cases}$$

pričom funkcie f_1 a f_2 sú klesajúce a platí pre ne $f_1(p^*) = f_2(p^*) = p^*$. Preto keď vstupná cena je p(n) < p* platí $p(n+1) = f_1(p(n))$, čo je viac ako p* - vyplýva z toho, že f_1 je klesajúca funkcia. Potom $p(n+2) = f_2(p(n+1)) = f_2(f_1(p(n))$ a to je menej ako p*, čo vyplýva z klesajúcosti funkcie f_2. Tento cyklus sa opakuje a nastáva aj vtedy, keď zoberieme vstupnú cenu p(n) > p*, lebo po prvom kroku sa dostávame do predchádzajúcej situácie. Označme si prvé derivácie funkcií v bode p* nasledovne: $f_1'(p^*) = d_1$ a $f_2'(p^*) = d_2$.

.

Zloženú funkciu označme $F = f_2 < f_1$. Pre túto funkciu platí:
$F(p^*) = f_2(f_1(p^*)) = f_2(p^*) = p^*$ (teda p* je jej pevný bod)
a pre jej deriváciu:
$F'(p^*) = f_2'(f_1(p^*))\, f_1'(p^*) = f_2'(p^*) f_1'(p^*) = d_2\, d_1$.
Podľa [E] pre funkciu F platí, že ak
1) $|F'| < 1$ tak bod p* je asymptoticky stabilný pevný bod F,
2) $|F'| > 1$ tak bod p* je nestabilný.

Avšak $|F'| = |d_2\, d_1|$.
Taktiež si môžeme zobrať zloženú funkciu $G = f_1 < f_2$, $G(p^*) = p^*$, pri ktorej rovnakým postupom dostávame $G'(p^*) = d_1\, d_2$.
Tým sme dokázali nasledujúci výsledok.

Veta 4. Nech
a) $f = \begin{cases} f_1 & p < p^* \\ f_2 & p > p^* \end{cases}$
b) $f_1(p^*) = f_2(p^*) = p^*$
c) funkcie f_1 a f_2 sú klesajúce
Potom ak 1. $|f_1'(p^*) f_2'(p^*)| < 1$ **tak bod p* je asymptoticky st abilný,**
2. $|f_1'(p^*) f_2'(p^*)| > 1$ **tak bod p* je nestabilný.**

Poznámka: Z vety 4. vyplýva spätne tvrdenie viet 2. a 3.

4. Bod zlomu nad osou 1. kvadrantu

V prípade zlomu nad osou 1. kvadrantu, keďže x-ová súradnica bodu zlomu je r, tak y-ová súradnica bodu zlomu je Ar + B, čo vyplýva z rovnice polpriamky y = Ax + B. V tomto prípade má diferenčná rovnica jediný pevný bod p* = b/(1 – a).

4.1 Uvažujme, že danú lomenú čiaru zalomíme tak, že na osi p(n) prechádza bodom (B,0). Potom pre koeficienty polpriamky $y = ax + b$ dostávame sústavu rovníc:

$$0 = aB + b$$
$$b = -aB$$
$$Ar + B = ar + b$$
$$Ar + B = ar - aB$$

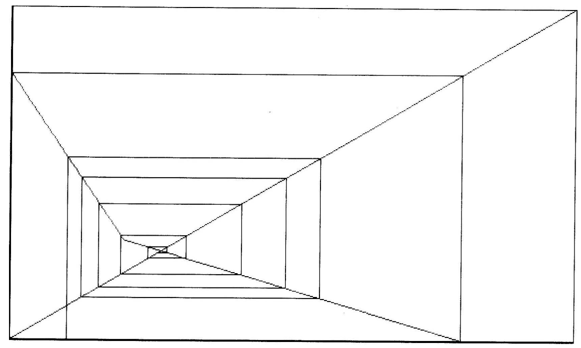
A teda $a = \dfrac{Ar + B}{r - B}, b = \dfrac{-ABr - B^2}{r - B}$.

Diferenčná rovnica je určená vzťahom:

$$(7)\quad p(n+1) = \begin{cases} Ap(n) + B & \text{pre } p(n) \le r, \\ \dfrac{Ar + B}{r - B} p(n) + \dfrac{-ABr - B^2}{r - B} & \end{cases}$$

pre p(n) > r.
Pre diferenčnú rovnicu formulujeme vetu.

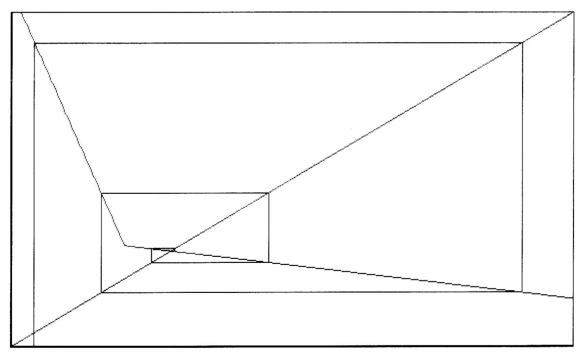
Veta 5. Diferenčná rovnica (7) má asymptoticky stabilný pevný bod p* a nestabilný cyklus {0,B} dĺžky 2.



Obr. 7.

4.2 Nech lomená čiara je zalomená tak, že pretína os x-ovú za bodom (0,B). Z predchádzajúcich úvah je zrejmé, že zanikne cyklus dĺžky dva pre p(0) = k a $\lim_{n\to\infty} p(n) = p^*$.

Veta 6. Nech A < - 1, $a \in \left(\dfrac{Ar - B}{r - B}, 0\right)$ **a r < p*.**
Potom diferenčná rovnica má pevný bod p* asymptoticky stabilný.



Obr. 8.

4.3 V ďalšom prípade uvažujme polpriamku $y = ax + b$ s koeficientom $a = -1$. Tejto polpriamke taktiež patrí bod (r,Ar + B), preto môžeme písať:

$$y = -x + b$$
$$Ar + B = -r + b$$

Teda : $b = Ar + B + r$.

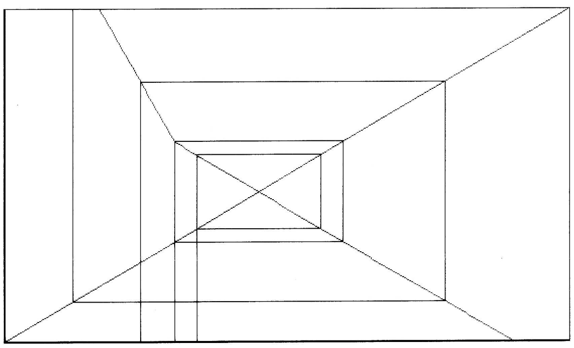
Diferenčná rovnica má tvar:

$$(8)\quad p(n+1) = \begin{cases} Ap(n) + B & \text{pre } p(n) \le r, \\ -p(n) + Ar + B + r & \end{cases}$$

pre p(n) >r.

Pre diferenčnú rovnicu formulujeme vetu.

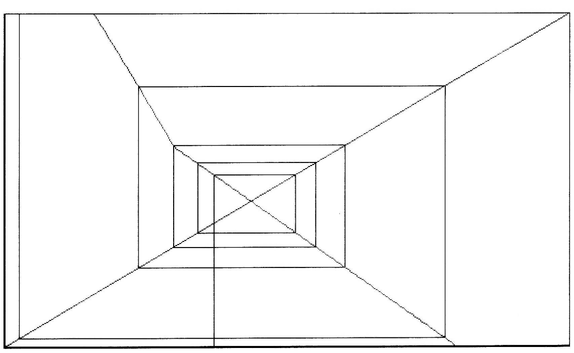
Veta 7. Nech A < - 1, a = - 1 a r < p*. Potom diferenčná rovnica (8) má
1. **pevný bod p* stabilný**
2. **nekonečne veľa stabilných cyklov dĺžky dva typu {k, - k + Ar + B + r}, kde r < k < p***
3. **cyklus dĺžky dva {r, Ar + B} je nestabilný.**



Obr. 9.

4.4 Uvažujme polpriamku ktorej smernica je menšia ako – 1. Tento prípad je identický s prípadom b) v časti 1., kedy bod p* je nestabilný.

Veta 8. Nech A < - 1, a < - 1 a r < p*. Potom diferenčná rovnica má nestabilný pevný bod p*.



Obr. 10.

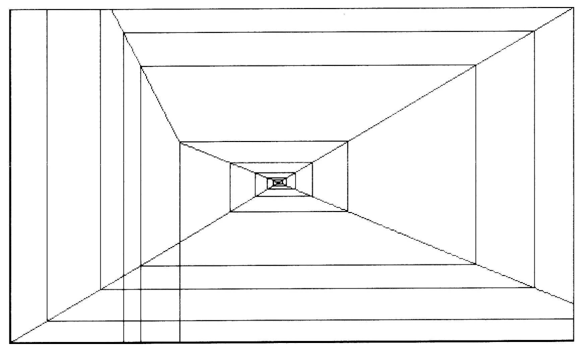
4.5 Ďalšou možnosťou je polpriamka $y = ax + b$ so smernicou $a \in \left(-1, \dfrac{Ar+B}{r-B}\right)$. Z toho pre diferenčnú rovnicu dostávame nasledovný vzťah, kedže polpriamke patrí aj bod (r,Ar + B).

$$(9)\quad p(n+1) = \begin{cases} Ap(n) + B & \text{pre } p(n) \le r, \\ ap(n) + Ar + B - ar & \end{cases}$$

pre p(n) > r.
Pre diferenčnú rovnicu formulujeme vetu.

Veta 9. Nech A< - 1, $a \in \left(-1, \dfrac{Ar+B}{r-B}\right)$ a r < p*.

Potom diferenčná rovnica (9) má asymptoticky stabilný pevný bod p* a nestabilný 2 cyklus.



Obr. 11.

5. Bod zlomu pod osou 1. kvadrantu

V prípade zlomu pod osou 1. kvadrantu, keďže x-ová súradnica bodu zlomu je r, tak y-ová súradnica bodu zlomu je Ar + B, čo vyplýva z rovnice polpriamky y = Ax + B.

5.1 Uvažujme, že danú lomenú čiaru zalomíme tak, že na osi p(n) prechádza bodom (B,0). Potom pre koeficienty polpriamky $y = ax + b$ dostávame sústavu rovníc:

$$0 = aB + b$$
$$b = -aB$$
$$Ar + B = ar + b$$
$$Ar + B = ar - aB$$

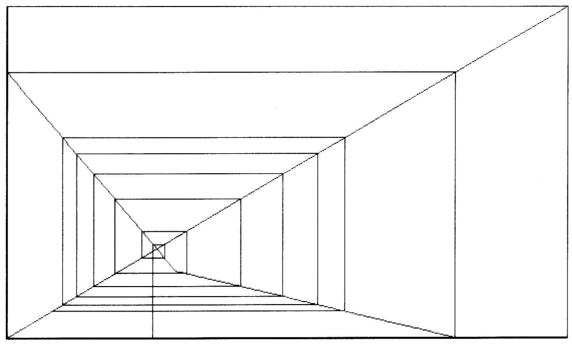
Teda $a = \dfrac{Ar+B}{r-B}, b = \dfrac{-ABr - B^2}{r-B}$.

Diferenčná rovnica má tvar:

$$(10)\quad p(n+1) = \begin{cases} Ap(n) + B & \text{pre } p(n) \le r, \\ \dfrac{Ar+B}{r-B}\,p(n) + \dfrac{-ABr - B^2}{r-B} & \end{cases}$$

pre p(n) > r.
Pre diferenčnú rovnicu formulujeme vetu.

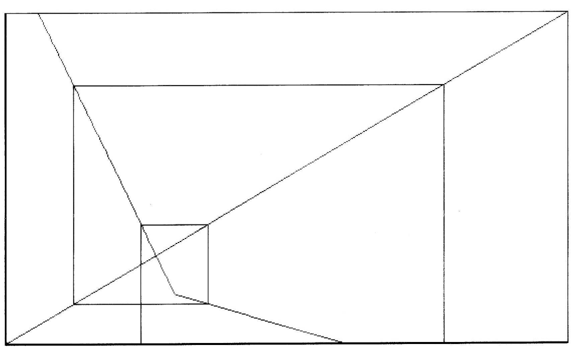
Veta 10. Diferenčná rovnica (10) má asymptoticky stabilný 2 cyklus {0,B} a nestabilný pevný bod p*.



Obr. 12.

5.2 V prípade smernice $a < -1$ sa dostaneme k prípadu b) časti 1., kedy je bod p* nestabilný.

Veta 11. Nech A < - 1, a < - 1 a r > p*. Potom diferenčná rovnica má nestabilný pevný bod p*.



Obr. 13.

5.3 Nech pre smernicu polpriamky $y = ax + b$ platí, že $a \in \left(\dfrac{Ar + B}{r - B}, 0 \right)$.

Potom diferenčná rovnica má tvar:

$$(11)\quad p(n+1) = \begin{cases} Ap(n) + B & \text{pre } p(n) \le r, \\ ap(n) + Ar + B - ar & \end{cases}$$

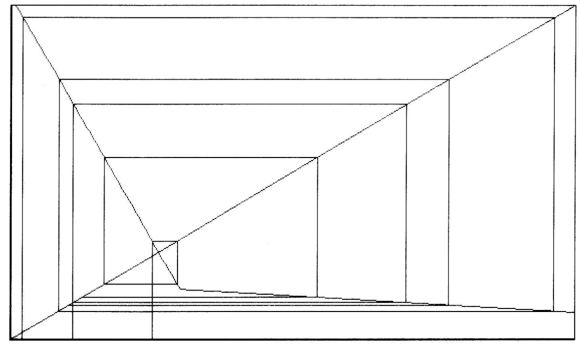
pre p(n) >r.

Pre diferenčnú rovnicu formulujeme vetu.

Veta 12. Nech A < - 1, a r > p*. Potom diferenčná rovnica (11) má asymptoticky stabilný 2 cyklus {k, Ak + B}, kde

$$k = \frac{aB + Ar + B - ar}{1 - aA} \quad \textbf{a}$$

nestabilný pevný bod p*.



Obr. 14.

Poznámka: Všetky dôkazy nájdete v rozšírenej verzii tejto práce.

Literatúra:

[E] Saber N. Elaydi, An Introduction to Difference Equation, Springer, 1995