

Lanchasterov model bojovej činnosti armád

Marian Zajko¹

*Slovenská technická univerzita, Fakulta elektrotechniky a informatiky
Ilkovičova 3, 831 02 Bratislava, Slovenská republika*

zajkomarian@hotmail.com

Abstrakt. V práci skúmame sústavu Lanchasterových rovníc bojovej činnosti konvenčných armád. Systém rovníc sme vyriešili. Ďalším krokom bola numerická simulácia rôznych taktík bojových činností a jej zhodnotenie.

1. Úvod

Skúmame jeden z modelov bojovej činnosti konvenčných armád (Lanchaster) a vlastnosti tohto modelu. Dve vojenské sily, ktoré označíme $x(t)$ a $y(t)$ spolu bojujú. Lanchasterov model predpokladá, že ak dve armády bojujú v konvenčnej vojne, potom podiel strát v boji je úmerný počtu nepriateľských síl, čo znamená, že sú splnené rovnice:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ay & x(0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= -bx & y(0) &= y_0\end{aligned}$$

Kde a , b sú kladné konštanty reprezentujúce účinnosť armád $y(t)$ a $x(t)$. Začiatkové podmienky $x(0)$ a $y(0)$ reprezentujú začiatkovú silu armád, teda počty vojakov v každej armáde. Cieľom tejto práce je riešiť systém rovníc a simulovať bojovú činnosť dvoch konvenčných armád pomocou Lanchasterovho modelu. Overíme rôzne taktiky boja dvoch armád a preskúmame priebeh bojov pri meniacej sa účinnosti armád.

2. Úprava rovníc a ich grafické riešenie

Riešením systému diferenciálnych rovníc a postupnými úpravami som dostal tieto dve riešenia, ktoré predstavujú závislosť počtov vojakov jednotlivých armád od času, počiatkových počtov armád ako aj ich účinností:

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{\sqrt{ab}x_0 - ay_0}{2\sqrt{ab}} e^{\sqrt{ab}t} + \frac{\sqrt{ab}x_0 + ay_0}{2\sqrt{ab}} e^{-\sqrt{ab}t} \\ y(t) &= \frac{\sqrt{ab}y_0 - bx_0}{2\sqrt{ab}} e^{\sqrt{ab}t} + \frac{\sqrt{ab}y_0 + ay_0}{2\sqrt{ab}} e^{-\sqrt{ab}t}\end{aligned}$$

¹ Vedúci práce doc. RNDr. Ľubomír Marko, PhD.

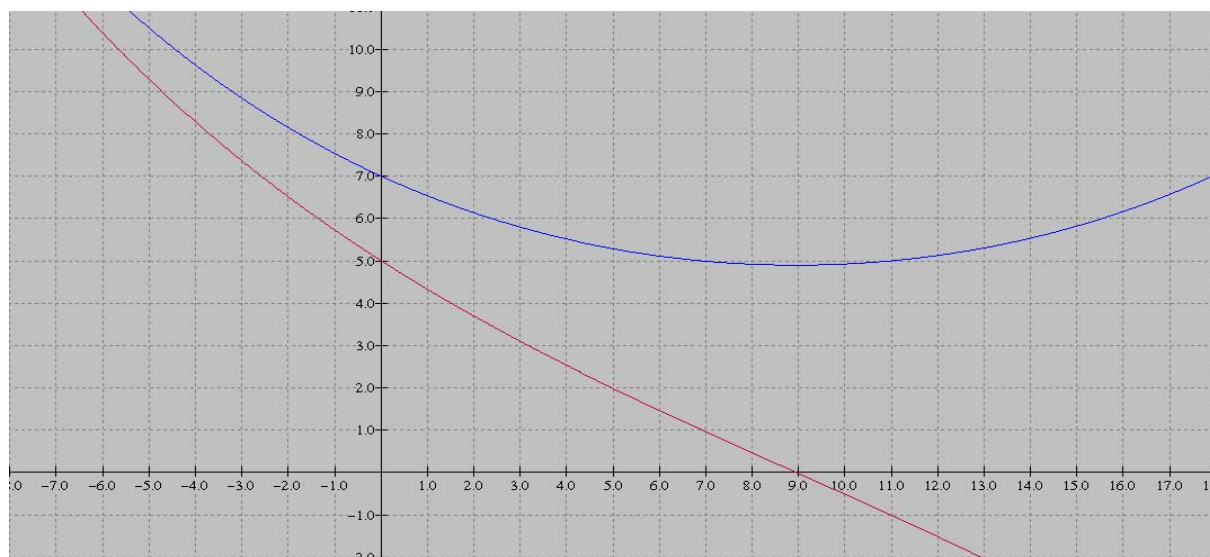
Predpokladajme, že dve armády $x(t)$ a $y(t)$ majú rovnakú účinnosť $a = b = 0.1$ a armáda $x(t)$ má 50000 mužov a armáda $y(t)$ má 70000 mužov. Po dosadení do všeobecného vyjadrenia oboch riešení dostaneme:

$$x(t) = -1000e^{0.1t} + 6000e^{-0.1t}$$

$$y(t) = 1000e^{0.1t} + 6000e^{-0.1t}$$

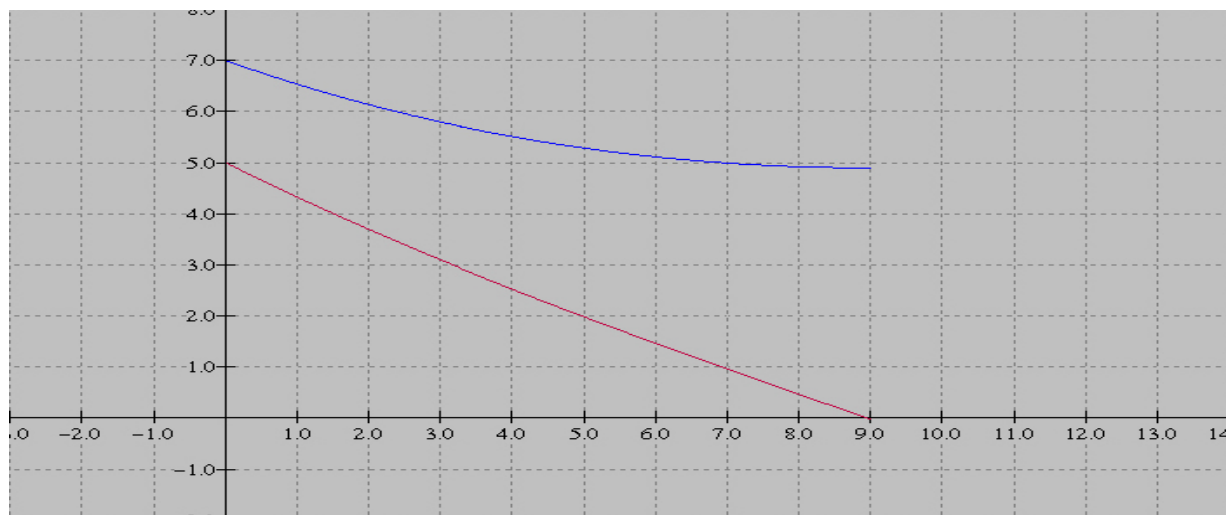
Grafmi týchto funkcií zobrazíme priebeh bojov. Na zvislej osi máme početnosti armád v desiatkach tisícov a vodorovná os nám vyjadruje dĺžku bojov v dňoch.

1.Obrázok – červená farba predstavuje priebeh $x(t)$ a modrá priebeh $y(t)$



Nás však zaujímajú len časy väčšie ako 0 a boj trvá dovtedy, kým jedna z armád je porazená, teda nemá už žiadnych vojakov, čo predstavuje priesečník jedného z grafov s vodorovnou osou. Graf funkcie po úprave :

2.Obrázok - červená farba predstavuje priebeh $x(t)$ a modrá priebeh $y(t)$



Z grafu môžeme vyčítať, že boj trval 9 dní a víťaznej armáde $y(t)$ zostalo necelých 50000 mužov.

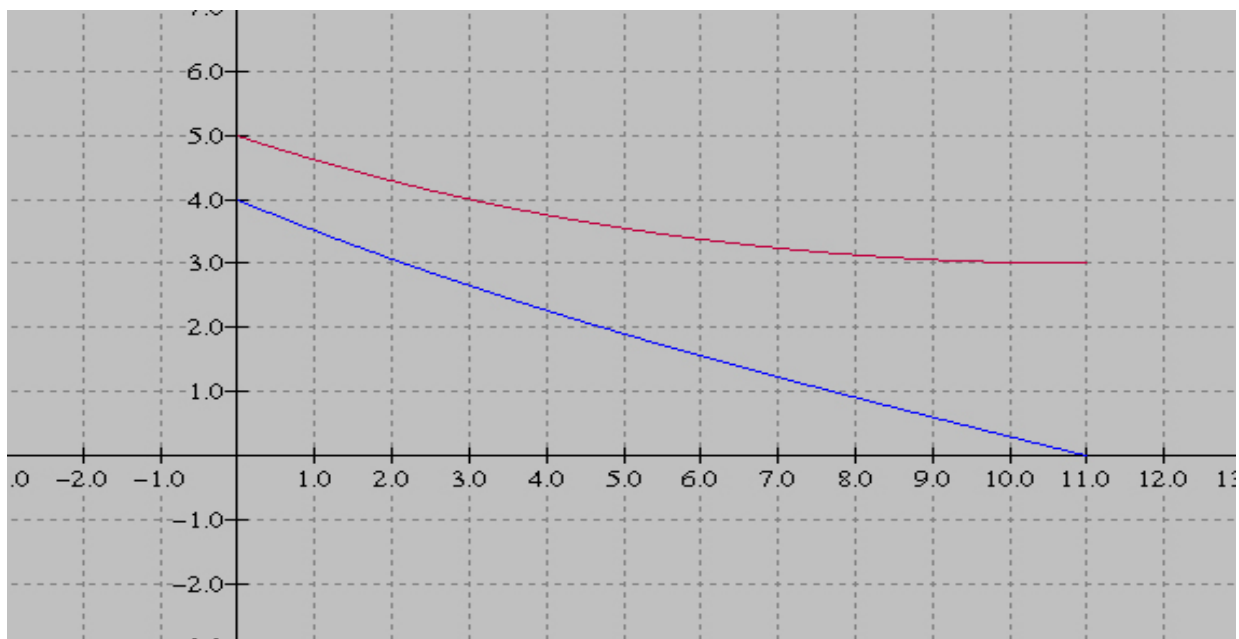
Princíp koncentrácie:

Ak jedna sila (armáda) koncentruje svoju celú silu na časť súperovej armády a zničí ju, potom môže byť schopná zaútočiť na zvyšnú časť nepriateľskej armády so svojou zvyšnou silou a poraziť ju.

Nech je situácia ako v prvom prípade, teraz však predpokladajme, že armáda $x(t)$ sa bude koncentrovať s celou svojou silou na 40000 vojakov armády $y(t)$ a potom v druhej bitke sa sústreďí na zvyšných 30000. Po dosadení do všeobecného vyjadrenia rovníc dostaneme pre prvú bitku:

$$x(t) = 5000e^{0.1t} + 45000e^{-0.1t} \quad y(t) = -5000e^{0.1t} + 45000e^{-0.1t}$$

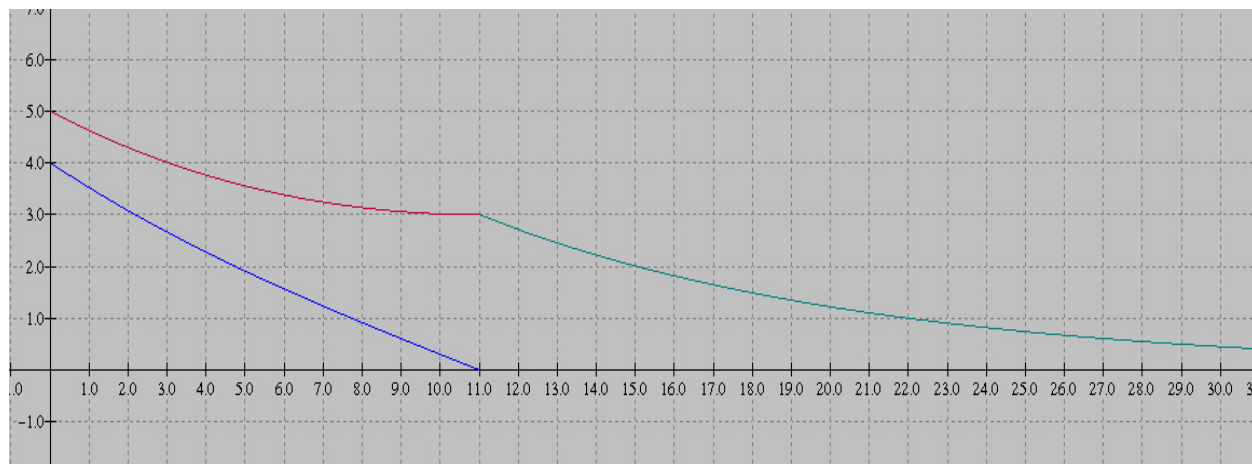
3.Obrázok – červená farba predstavuje priebeh $x(t)$ a modrá priebeh $y(t)$



Z grafu môžeme vyčítať, že armáde $x(t)$ zostane po prvom boji, ktorý trval 11 dní, 30000 vojakov, ktorými v druhom boji zaútočí na zvyšných 30000 vojakov armády $y(t)$. V druhom boji sa teda stretnú dve rovnako veľké armády $x(t)$ a $y(t)$, ktoré budú bojovať s rovnakou účinnosťou.

$$x_2(t) = y_2(t) = 3000e^{-0.1t}$$

4.Obrázok – červená farba predstavuje priebeh $x(t)$, modrá priebeh $y(t)$, zelená druhý súboj armád.



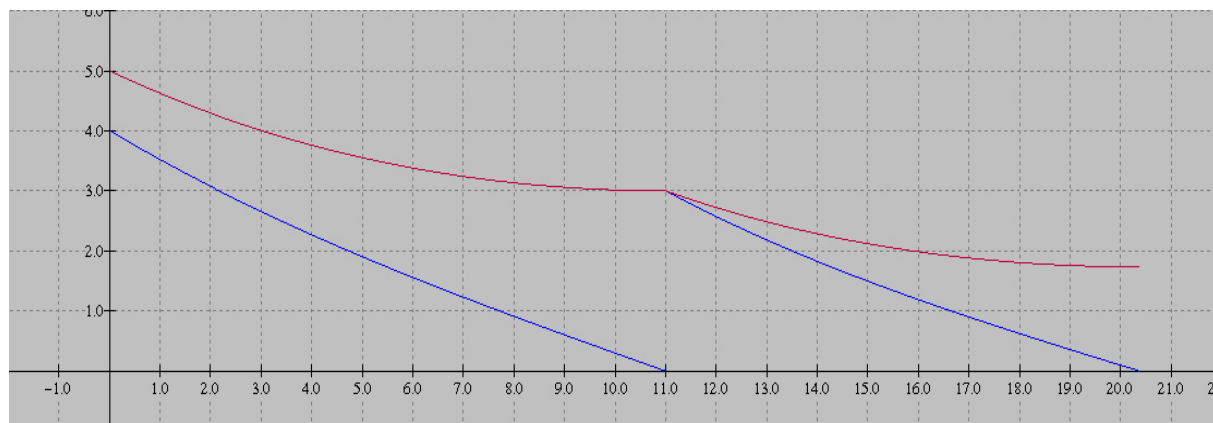
Druhý boj by teoreticky mohol trvať do nekonečna, ale pre náš prípad môžeme predpokladať, že boja skončia keď obe armády nebudú mať ani jedného vojaka, čo nastane približne po 115 dňoch. Po týchto dvoch bojoch však nebude ani jedna z armád víťazná.

Ak by sme však uvažovali, že armáda $x(t)$ po víťaznej prvej bitke s armádou $y(t)$ bude mať viac bojových skúseností a tak aj väčšiu účinnosť, napríklad $b=0.15$, potom armáda $x(t)$ zvíťazí nad armádou $y(t)$.

$$x(t) = 2752e^{\sqrt{0.015}t} + 27448e^{-\sqrt{0.015}t}$$

$$y(t) = -3371e^{\sqrt{0.015}t} + 33371e^{-\sqrt{0.015}t}$$

5.Obrázok – červená farba predstavuje priebeh $x(t)$, modrá priebeh $y(t)$



Z grafu môžeme vyčítať, že po oboch bojoch, ktoré trvali skoro 21 dní sa podarilo zvíťaziť armáde $x(t)$ a zostalo jej necelých 17000 mužov.

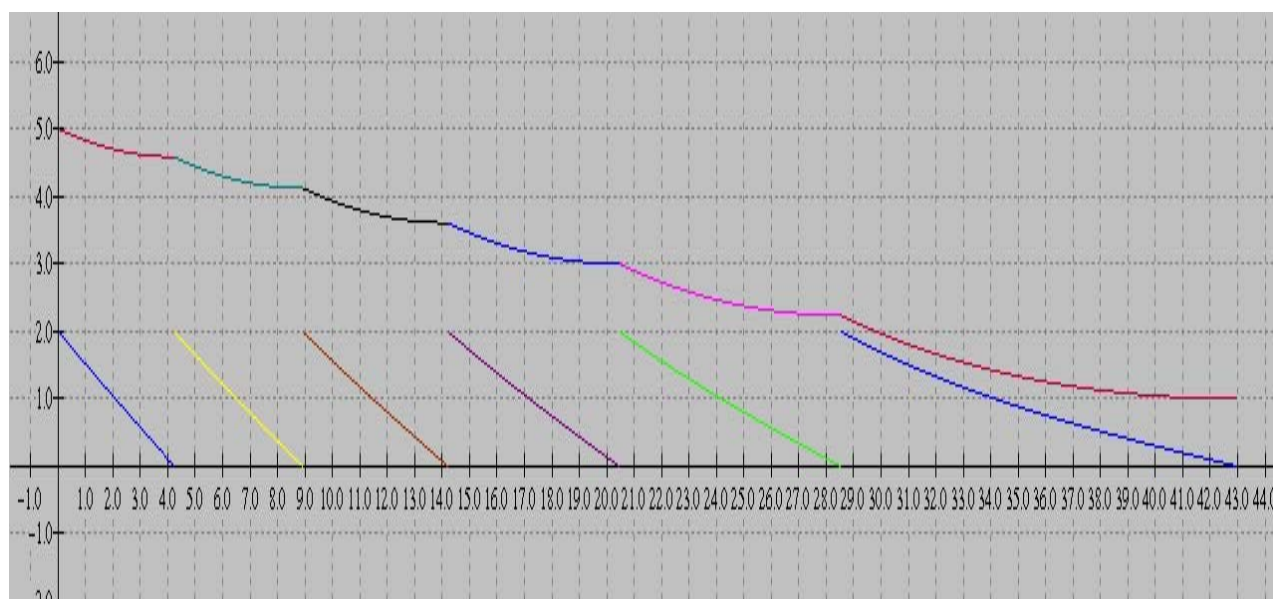
Ako tretí prípad budeme predpokladať, že armáda $x(t)$ s 50000 mužmi je prečíslená 120000 mužmi armády $y(t)$. Armáda $x(t)$ musí teda zvoliť takú taktiku, aby postupne napádala plnou silou malé časti armády $y(t)$ aby ju mohla poraziť. V našom prípade budeme postupne napádať armádou $x(t)$ vždy 20000 vojakov armády $y(t)$. Priebeh bojov zapíšeme do tabuľky:

1. Tabuľka

Početnosti armád	Priebeh pre $x(t)$ a $y(t)$
$x_1 = 50000, y_1 = 20000$	$x_1(t) = 15000e^{0.1t} + 35000e^{-0.1t}$
	$y_1(t) = -15000e^{0.1t} + 35000e^{-0.1t}$
$x_2 = 45825, y_2 = 20000$	$x_2(t) = 12913e^{0.1t} + 32913e^{-0.1t}$
	$y_2(t) = -12913e^{0.1t} + 32913e^{-0.1t}$
$x_3 = 41231, y_3 = 20000$	$x_3(t) = 106153e^{0.1t} + 30615e^{-0.1t}$
	$y_3(t) = -106153e^{0.1t} + 30615e^{-0.1t}$
$x_4 = 36055, y_4 = 20000$	$x_4(t) = 8027e^{0.1t} + 28027e^{-0.1t}$
	$y_4(t) = -8027e^{0.1t} + 28027e^{-0.1t}$
$x_5 = 30000, y_5 = 20000$	$x_5(t) = 5000e^{0.1t} + 25000e^{-0.1t}$
	$y_5(t) = -5000e^{0.1t} + 25000e^{-0.1t}$
$x_6 = 22360, y_6 = 20000$	$x_6(t) = 11803e^{0.1t} + 21180e^{-0.1t}$
	$y_6(t) = -11803e^{0.1t} + 21180e^{-0.1t}$

A grafy týchto funkcií:

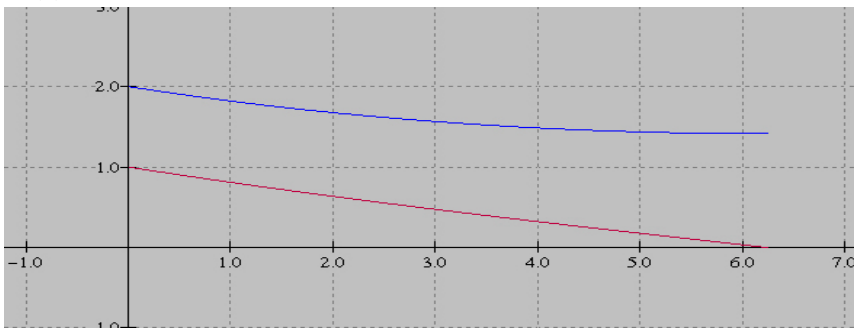
6.Obrázok – vrchné grafy: červená farba predstavuje $x_1(t)$, zelená farba predstavuje $x_2(t)$, čierna farba predstavuje $x_3(t)$, modrá farba predstavuje $x_4(t)$, ružová farba predstavuje $x_5(t)$ a hnedá farba predstavuje $x_6(t)$; spodné grafy predstavujú $y_1(t)$ až $y_6(t)$

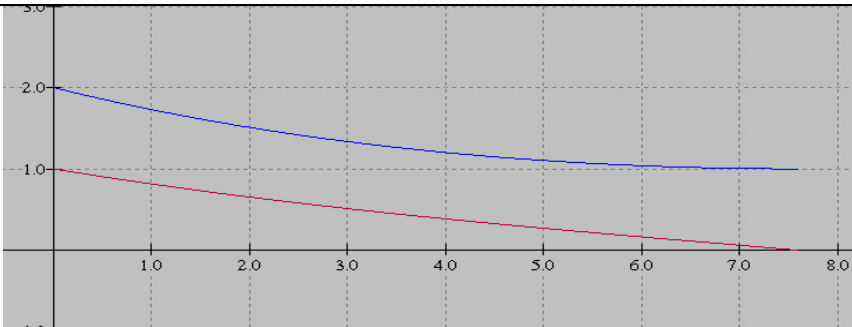
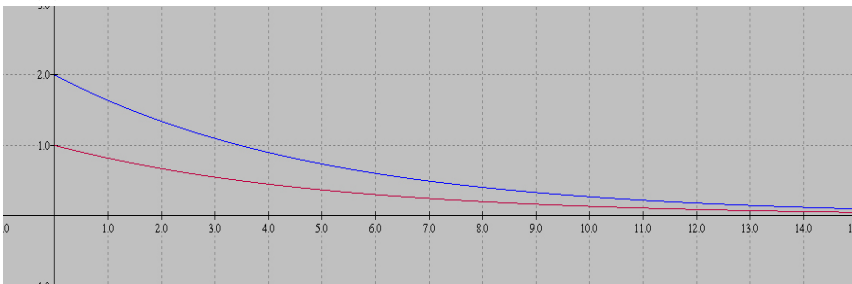
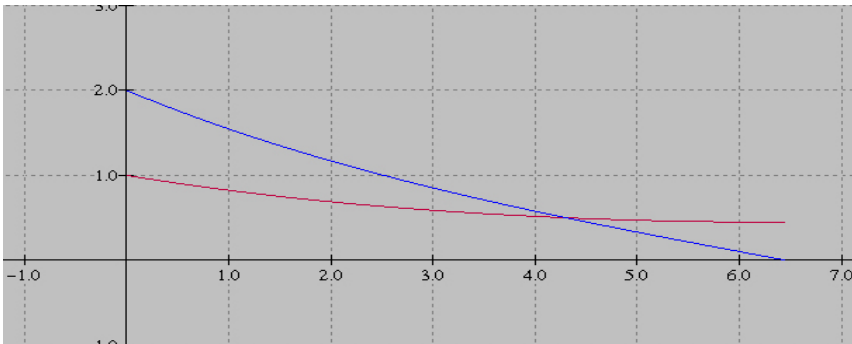


Z grafu možno odčítať, že takýmto spôsobom by sa armáde $x(t)$ podarilo poraziť armádu $y(t)$ po šiestich bitkách trvajúcich 43 dní a armáde $x(t)$ stále ostalo približne 10000 vojakov.

Ako posledný príklad si vezmeme vplyv veľkosti účinnosti na priebeh bojov. Máme opäť dve armády, $x(t)$ s počtom 10000 vojakov a $y(t)$ s počtom 20000 vojakov. Uvažujme, že účinnosť armády $y(t)$ je rovná (si zadáme ako) $a = 0.1$ a budeme hľadať takú účinnosť armády $x(t)$, aby armáda $x(t)$ porazila armádu $y(t)$. Na grafoch je $x(t)$ znázornená červenou farbou a $y(t)$ modrou farbou.

2.Tabuľka

Počet vojakov a účinnosť	Priebeh bojov medzi $x(t)$ a $y(t)$
$x_0 = 10000$ $y_0 = 20000$ $a = 0.1$ $b = 0.2$	$x(t) = -2071e^{\sqrt{0.02}t} + 12071e^{-\sqrt{0.02}t}$ $y(t) = 2929e^{\sqrt{0.02}t} + 17071e^{-\sqrt{0.02}t}$  Z grafu vyplýva, že armáda $x(t)$ prehrala boj s dvojnásobným počtom vojakov armády $y(t)$ aj keď mala dvojnásobnú účinnosť.
$x_0 = 10000$ $y_0 = 20000$	$x(t) = -733e^{\sqrt{0.03}t} + 10733e^{-\sqrt{0.03}t}$ $y(t) = 1340e^{\sqrt{0.03}t} + 18660e^{-\sqrt{0.03}t}$

$a = 0.1$ $b = 0.3$	 Z grafu vyplýva, že armáda $x(t)$ prehrala boj s dvojnásobným počtom vojakov armády $y(t)$ aj keď mala trojnásobnú účinnosť.
$x_0 = 10000$ $y_0 = 20000$ $a = 0.1$ $b = 0.4$	$x(t) = 10000e^{-\sqrt{0.04}t}$ $y(t) = 20000e^{-\sqrt{0.04}t}$  Z grafu vyplýva, že armáde $x(t)$ sa nepodarilo poraziť armádu $y(t)$ aj keď mala štvornásobnú účinnosť.
$x_0 = 10000$ $y_0 = 20000$ $a = 0.1$ $b = 0.5$	$x(t) = 528e^{\sqrt{0.05}t} + 9472e^{-\sqrt{0.05}t}$ $y(t) = -1180e^{\sqrt{0.05}t} + 21180e^{-\sqrt{0.05}t}$  Z grafu vyplýva, že armáda $x(t)$ vyhrala boj s dvojnásobným počtom vojakov armády $y(t)$ až keď mala päťnásobnú účinnosť.

3. Záver:

Po vyriešení Lanchasterovho modelu bojovej činnosti dvoch konvenčných armád a preskúmaní rôznych spôsobov taktiky sa ako najúčinnnejšia taktika ukazuje taktika popísaná ako princíp koncentrácie – t.j. rozdeliť väčšiu nepriateľskú armádu na menšie časti a postupne zničiť tieto menšie časti. Taktika založená na zvyšovaní bojovej účinnosti armády by nemala taký úspech, pretože zvýšiť bojovú účinnosť armády vyžaduje veľké finančné, materiálne, ale aj hlavne ľudské náklady...