

LANCHASTEROVE ROVNICE

modely bojovej činnosti armád

LANCHASTEROVE ROVNICE
ako
model bojovej činnosti armád



LANCHASTEROVE ROVNICE

(F.W. Lanchaster, r. 1914)

♦ model úplnej konvenčnej vojny

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, \quad y(0) = y_0$$

LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



LANCHASTEROVE ROVNICE

(F.W. Lanchaster, r. 1914)

♦ model úplnej konvenčnej vojny

- ♦ vyjadruje závislosť efektivity a použitej stratégie armád ako funkciu času

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, \quad y(0) = y_0$$

- ♦ $x(t)$, $y(t)$ sú početnosti armád v čase t

- ♦ x_0 , y_0 predstavujú počiatočnú silu (početnosť) armád v čase $t=0$

- ♦ a , b kladné konštanty, reprezentujú efektívnosť armád x a y

- ♦ námorná bitka pri Trafalgare (1805), bitka pri Alme (Mexico, 1846)



LANCHASTEROVE ROVNICE
ako
model bojovej činnosti armád



GERILOVÁ VOJNA

(najpresnejší a najrealistickejší model Lanchasterových rovníc)

- ♦ model vojny konvenčnej a partizánskej armády

$$\frac{dx}{dt} = -bxy, \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, \quad y(0) = y_0$$

LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



GERILOVÁ VOJNA

(najpresnejší a najrealistickejší model Lanchasterových rovníc)

♦ model vojny konvenčnej a partizánskej armády

- ♦ konvenčná armáda bojuje klasickými postupmi, tzv. „direct fire“

- ♦ gerilová armáda pôsobí rozdelená do útočných skupín, tzv. „area fire“

- ♦ využívajú moment prekvapenia

- ♦ partizáni pôsobia v utajení, neumožňujú súperovi identifikovať svoje postavenie a využívajú znalosť bojového priestoru

- ♦ partizánsky odboj počas II. Svetovej vojny (SNP, 1944), vojna vo Vietname (1964 – 1975).

$$\frac{dx}{dt} = -bxy, x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, y(0) = y_0$$

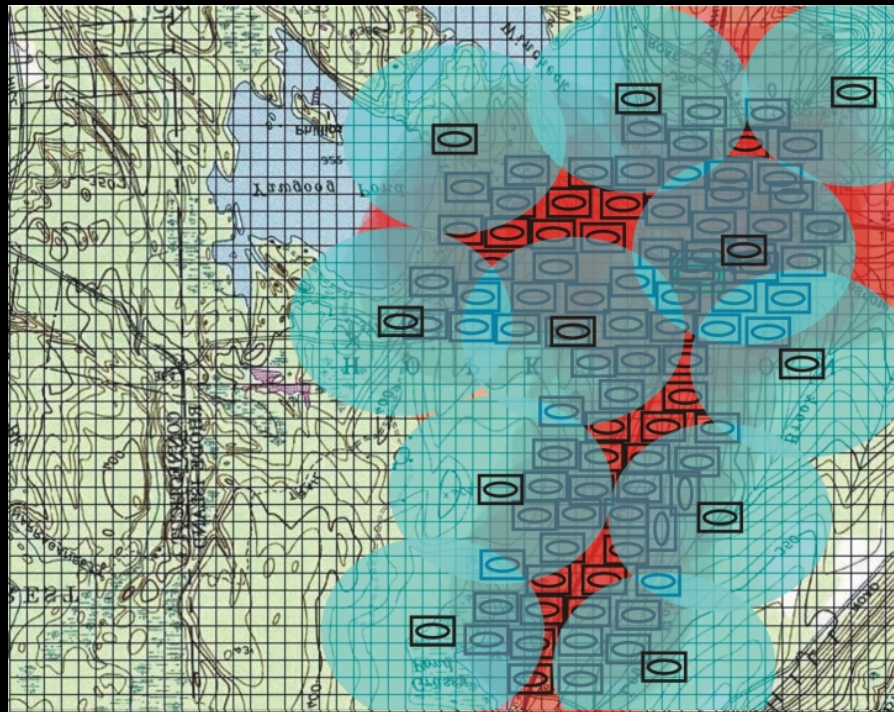


LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



ILUSTRÁCIA VÝHODY PARTIZÁNSKÝCH SÍL



- 1) rozloženie konvenčnej armády v priestore bitky
- 2) rozmiestnenie gerilových síl v geografickom priestore
- 3) palebná zóna útočných skupín partizánov.

LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



MODELOVÉ ROVNICE

pre konvenčnú vs. partizánsku vojnu

♦ model úplnej konvenčnej vojny

$$\frac{dx}{dt} = -by, \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, \quad y(0) = y_0$$

Čo sa teda zmení ak jedna z armád bojuje gerilovým spôsobom?

♦ straty konvenčnej sily sú stále úmerné počtu gerilovej sily



$$\frac{dy}{dt} = -ax$$

♦ straty gerilovej armády sú úmerné tak počtu konvenčnej sily ako aj vlastnej početnosti



$$\frac{dx}{dt} = -bxy$$

♦ šancu nepriateľa zasiahnuť partizánov zvyšuje veľkosť samotnej útočnej skupiny.

LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



MODELOVÉ ROVNICE

pre konvenčnú vs. partizánsku vojnu

♦ model vojny konvenčnej a partizánskej armády

$$\frac{dx}{dt} = -bxy, \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, \quad y(0) = y_0$$

Čo sa teda zmení ak jedna z armád bojuje gerilovým spôsobom?

♦ straty konvenčnej sily sú stále úmerné počtu gerilovej sily



$$\frac{dy}{dt} = -ax$$

♦ straty gerilovej armády sú úmerné tak počtu konvenčnej sily ako aj vlastnej početnosti



$$\frac{dx}{dt} = -bxy$$

♦ šancu nepriateľa zasiahnuť partizánov zvyšuje veľkosť samotnej útočnej skupiny

♦ dôležitý je pokles účinnosti – b konvenčnej armády, oproti „direct fire“ spôsobu vojny, spôsobený nízkou pravdepodobnosťou zásahu gerilovej sily.

LANCHASTEROVE ROVNICE
ako
model bojovej činnosti armád



URČENIE KOEFICIENTOV ÚČINNOSTI ARMÁD

(a, b – kladné konštanty, reprezentujú efektívnosť armád x a y)

♦ koeficient účinnosti konvenčnej armády $\longrightarrow b = r_y p_y$

♦ r_y je palebná efektivita $\longrightarrow r_y = \sum_{i=1}^n qtde(i).cad(i).let(i)$

- ♦ n – počet všetkých zbraní v armáde
- ♦ $qtde(i)$ – množstvo zbraní i -teho druhu
- ♦ $cad(i)$ – kadencia výstrelů zbrane i -teho druhu
- ♦ $let(i)$ – koeficient smrteľnosti po zasiahnutí zbraňou i -teho druhu

♦ p_y – pravdepodobnosť, že jediný výstrel zneškodní nepriateľa.





URČENIE KOEFICIENTOV ÚČINNOSTI ARMÁD

(a , b – kladné konštanty, reprezentujú efektívnosť armád x a y)

- ♦ koeficient účinnosti partizánskej armády $\longrightarrow$ $a = r_y \frac{A_{ry}}{A_x}$
- ♦ koeficient a sa určuje pomerne k hodnote „priestoru efektivity jediného výstrelu konvenčnej armády“ – A_{ry} a nepriamo úmerne k priestoru obsadeného gerilovými jednotkami – A_x (*area fire*)
- ♦ r_y je palebná efektivita $\longrightarrow$
$$r_y = \sum_{i=1}^n qtde(i).cad(i).let(i)$$
 - ♦ n – počet všetkých zbraní v armáde
 - ♦ $qtde(i)$ – množstvo zbraní i -teho druhu
 - ♦ $cad(i)$ – kadencia výstrelův zbrane i -teho druhu
 - ♦ $let(i)$ – koeficient smrteľnosti po zasiahnutí zbraňou i -teho druhu
- ♦ A_{ry} – je oblasť, kde jediný výstrel armády y zneškodní nepriateľa, s pravdepodobnosťou p_y .

LANCHASTEROVE ROVNICE
ako
model bojovej činnosti armád



RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

(interpretácia vo fázovej rovine)

♦ využijem sústavu

$$\frac{dx}{dt} = -bxy, \quad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, \quad y(0) = y_0$$

♦ platí vzťah

$$\frac{by^2}{2} = ax + k$$

kde k je konštanta

♦ upravím

$$k = \frac{by^2}{2} - ax$$

♦ následne dokážem tvrdenie →



RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

(interpretácia vo fázovej rovine)

♦ dôkaz tvrdenia

♦ zderivujem výraz

$$k = \frac{by^2}{2} - ax$$

♦ dostávam

$$0 = by \frac{dy}{dt} - a \frac{dx}{dt}$$

♦ dosadením výrazov zo sústavy

$$0 = by(-ax) - a(-bxy)$$

♦ čím je tvrdenie dokázané

$$\frac{dx}{dt} = -bxy, x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = -ax, y(0) = y_0$$

$$0 = -abxy + abxy$$

$$0 = 0$$

LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

(interpretácia vo fázovej rovine)

♦ využijem získaný vzťah

$$k = \frac{by^2}{2} - ax$$

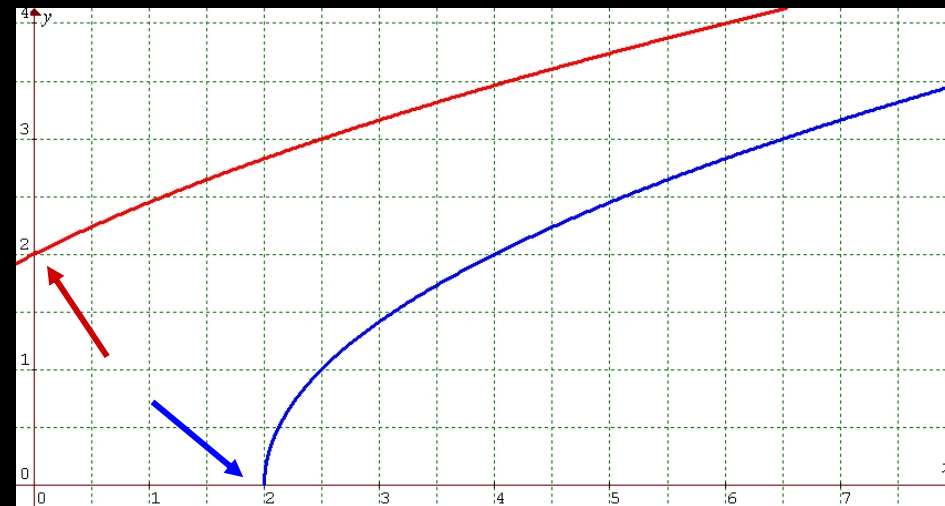
♦ dosadím počiatočné podmienky
 $x(0)=x_0, y(0)=y_0$

$$k = \frac{by_0^2}{2} - ax_0$$

♦ zobrazím vo fázovej rovine jednotlivé situácie pre k



sily.



LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



VÝVOJ POČETNOSTÍ ARMÁD

(vývoj počtov vojakov na jednotlivých znepriatelených stranách)

♦ vyjmem x a y z výrazu a dostávam

$$\frac{by^2}{2} = ax + k$$

$$y = \sqrt{\frac{2k + ax}{b}}$$

$$x = \frac{by^2}{2a} - \frac{k}{a}$$

♦ po dosadení k do rovností získam rovnice, ktoré vyjadrujú početností armád v čase

$$k = \frac{by_0^2}{2} - ax_0$$

$$x(t) = \frac{by^2(t)}{2a} - \frac{by_0^2}{2a} - x_0$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{2ax(t)}{b} - \frac{2ax_0}{b} + y_0^2}$$

LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



VOJNA VO VIETNAME

(demonštrácia výsledkov na konkrétnom príklade)

- ♦ reálny model konvenčno–partizánskej vojny
 - ♦ konvenčné sily: USA, Južný Vietnam, ďalší spojenci
 - ♦ gerilové sily: Severný Vietnam, Viet Kongovia
 - ♦ pomer účinnosti armád: $b : a = 1 : 500$
- ♦ využitím vzťahu pre počiatočné podmienky je zrejmé, že skupina $x_0 = 10$ partizánov je efektívnou bojovou silou proti 10-krát väčšiemu množstvu konvenčných vojakov



$$y_0 = \sqrt{\frac{2ax_0}{b}}$$



$$y_0 = \sqrt{1000x_0}$$

LANCHASTEROVE ROVNICE

ako
model bojovej činnosti armád



VOJNA VO VIETNAME

(demonštrácia výsledkov na konkrétnom príklade)

- ♦ porovnanie vplyvu veľkosti skupín partizánskych síl na ich efektivitu

x_0	10	20	30	50	100	1000	1010	1200
y_0	100	141	173	224	316	1000	1004	1095
pomer	10	7,1	5,8	4,5	3,2	1	<1	0,9

← veľkosť partizánskej skupiny

← počet konvenčných vojakov

- ♦ efektivita útočných partizánskych jednotiek klesá so vzrastajúcim počtom jej členov
- ♦ partizánska praktika boja bude účinná proti konvenčnej armáde, práve vtedy ak bude rozdelená do malých lokálnych útočných skupín po 8 – 12 mužov
- ♦ výsledkom existencie malých gerilových jednotiek vo vojne vo Vietname je fakt, že celá spojenecká armáda by musela byť 10násobne väčšia ako partizánska armáda na to, aby spojenci mali reálnu šancu zvíťaziť. Z historických vojenských záznamov je známe, že v roku 1968, bol pomer spojencov k partizánom len 6:1.

LANCHASTEROVE ROVNICE
ako
model bojovej činnosti armád



VOJNA VO VIETNAME

(simulácia historickej udalosti)

♦ počty spojeneckých a partizánskych síl okolo roku 1968

konvenčné sily		partizánske sily	
Američania	510 000	Severní Vietnamci	50 000
Južní Vietnamci	1 100 000	Viet Kongovia	230 000
ostatní spojenci	70 000		
SPOLU:	1 680 000		280 000

♦ generál spojeneckých síl, Westmoreland, požiadal v roku 1968 prezidenta o posilu 206 000 mužov

♦ vyhrali by spojenci bitku, keby prezident vyhovel žiadosti generála Westmorelanda?

LANCHASTEROVE ROVNICE
ako
model bojovej činnosti armád



VOJNA VO VIETNAME

(simulácia historickej udalosti)

♦ pomer síl pred žiadosťou



$$\frac{1680000}{280000} \approx \frac{6}{1}$$

♦ pomer síl po príchode posíl



$$\frac{1680000 + 206000}{280000} \approx \frac{6,7}{1}$$

→ spojenecká posila by nestačila na zvrat vo vojne

♦ pomer postačujúci na výhru spojeneckej armády



$$\frac{10}{1} \approx \frac{2800000}{280000}$$

→ nutná posila spojeneckej armády postačujúca na výhru

510 000 mužov



VOJNA VO VIETNAME KONVENČNE

(simulácia modelu úplnej konvenčnej vojny)

- ♦ ako rýchlo by spojenecká armáda vo Vietname zničila partizánsku armádu Viet Kongov a severných Vietnamcov, keby títo bojovali ako konvenčná armáda ?

- ♦ model úplnej konvenčnej vojny

- ♦ účinnosť armád: $a = b = 0,005$

- ♦ počiatočná sila armád v čase $t=0$
 $x_0 = 1\,680\,000$ $y_0 = 280\,000$

$$\frac{dx}{dt} = -0,005 y, x(0) = 1680000$$
$$\frac{dy}{dt} = -0,005 x, y(0) = 280000$$

- ♦ spojenecká armáda by porazila armádu Viet Kongov a severných Vietnamcov, keby títo bojovali tiež konvenčne za

$t = 34$ dní

LANCHASTEROVE ROVNICE

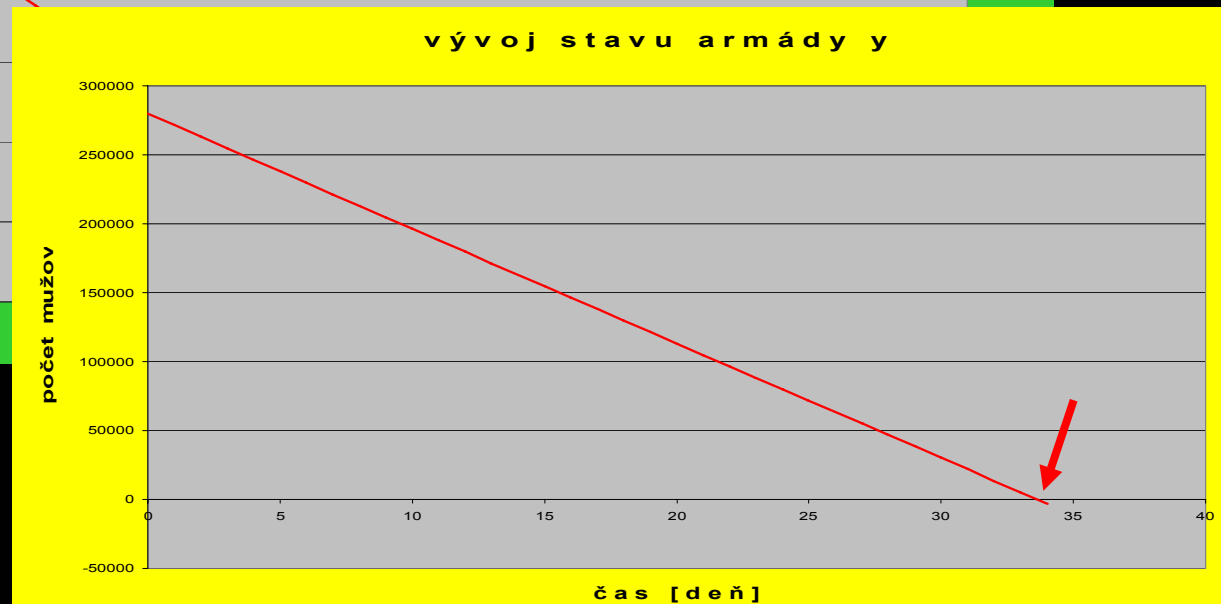
ako
model bojovej činnosti armád



VOJNA VO VIETNAME KONVENČNE

(simulácia modelu úplnej konvenčnej vojny)

♦ vývoj početností armád v čase



LANCHASTEROVE ROVNICE
ako
model bojovej činnosti armád



POUŽITÁ LITERATÚRA



- [1] S. J. Deitchman, A lanchester model of guerrilla warfare. *Operational Research*, 1962.
- [2] Bonder, Seth, "Mathematical Modeling of Military Conflict Situations". *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Volume 25, Operations Research, Mathematics and Models*, American Mathematical Society, Providence, 1981.
- [3] Braun, Martin, *Differential Equations and Their Applications*, 3rd ed.", Springer-Verlag, NY, 1983.
- [4] Coleman, Courtney S. *Models in Applied Mathematics*, William Lucas, Editor, Springer-Verlag, NY, 1983.
- [5] N. K. Jaiswal. *Military Operations Research Quantitative Decision Making*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

The background is a dark green space filled with numerous small, distant stars. Several bright green, glowing orbits or paths of light swirl and intersect in a complex, three-dimensional pattern. A very bright, intense green light source is located at the center of these orbits, creating a strong lens flare effect that illuminates the surrounding paths and the text.

ĎAKUJEM ZA POZORNOST