

Model epidemickej choroby (SIR model)

Pavol GAŠPIERIK*

*Slovenská technická univerzita, Fakulta elektrotechniky a informatiky
Ilkovičova 3, 831 02 Bratislava, Slovenská republika
p_gaspierik@t-zones.sk*

Abstrakt. Táto práca sa zaoberá zostavením „SIR modelu“ šírenia epidémie. Základným problémom je popis šírenia epidémie v populácii ako funkcia času. Matematický popis samozrejme závisí od veľa okolností, vrátane charakteru choroby. Pri modelovaní je nevyhnutnosť formulácie niektorých závažných predpokladov.

1 Úvod

Jeden z najznámejších príkladov populačnej epidémie je prípad Veľkého moru v Londýne, ktorý vypukol v rokoch 1665 – 1666. Zo záznamov úmrtnosti obyvateľstva môžeme zostrojiť epidemickú krivku, ktorej charakteristický tvar opísali A. G. McKendrick a W. O. Kermack.

Anderson Gray McKendrick (1876 - 1943) a William Ogilvy Kermack (1898 - 1970) propagovali využitie matematických metód v epidemiológii. V rokoch 1927 a 1932 vydali dva dôležité dokumenty, týkajúce sa matematickej teórie šírenia epidémie, na ktoré sa odvolávame dodnes. Zostavili SIR model pre ľudí infikovaných nákazlivou chorobou (v konštantnej populácii v priebehu času).

Model pozostáva z systému dvoch nelineárnych štandardných diferenciálnych rovníc.

2 Všeobecná charakteristika modelu

Model populácie je rozdelený do troch skupín:

- *citliví jednotlivci* **S** (*susceptible individuals*)
- *infikovaní jednotlivci* **I** (*infected individuals*)
- *odolní (imúnni) jednotlivci* **R** (*re-infection individuals*)

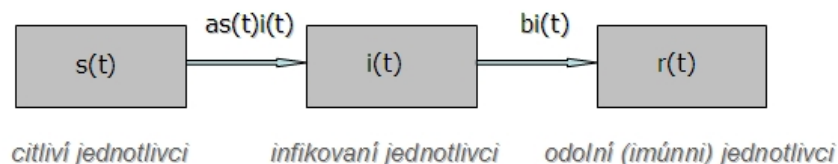
* Vedúci práce: Doc. RNDr. Lubomír Marko, PhD.

Celková populácia je rovná: $N = S + I + R$ (1)

Citliví jednotlivci S sú tí, ktorí nie sú infikovaní epidémiou a nie sú imúnni.

Infikovaní jednotlivci I sú tí, ktorí môžu šíriť chorobu.

Odolní (imúnni) jednotlivci R sú tí, ktorí boli infikovaní a požívajú imunitu (sú necitliví).



Obr.1 SIR model populácie

3 Predpoklady

- jednotlivci sú zaradení do jednej z kategórii (citliví, infikovaní, odolní)
- populácia je veľká, ale so stabilným počtom jednotlivcov, ignorujeme prírastok populácie (narodenie a smrť) v priebehu epidémie
- ignorujeme taktiež nejaké ďalšie rozdelenia obyvateľstva vekom, pohlavým, mobilitou alebo inými faktormi, aj keď tieto rozdiely by mohli v realite zohrávať dôležitú úlohu
- každý jednotlivec prichádza denne do kontaktu s takým istým pomerom ľudí z každej kategórie
- pre jednoduchosť uvažujeme, že *odolní jednotlivci R* sú permanentne imúnni

4 Diferenciálne rovnice a parametre modelu

Základné diferenciálne rovnice sú nasledujúce:

$$\frac{ds(t)}{dt} = -as(t)i(t) \quad (2)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = as(t)i(t) - bi(t) \quad (3)$$

$$r(t) = 1 - s(t) - i(t) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
s(t) - \text{podiel citlivej populácie} &= \text{počet citlivých jednotlivcov} / N \\
i(t) - \text{podiel infikovanej populácie} &= \text{počet infikovaných jednotlivcov} / N \\
r(t) - \text{podiel odolnej populácie} &= \text{počet odolných jednotlivcov} / N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a - \text{priepustnosť (počet kontaktov schopných preniesť chorobu)} & \quad [\text{deň}^{-1}] \\
b - \text{regeneračná rýchlosť (denný počet zotavených)} & \quad [\text{deň}^{-1}] \\
\frac{1}{b} - \text{priemerné trvanie infekcie} & \quad [\text{deň}] \\
c = \frac{a}{b} - \text{počet kontaktov} & \quad (5)
\end{aligned}$$

Rovnice (2, 3, 4) vyjadrujú prechody citlivých jednotlivcov $s(t)$ ku infikovaným $i(t)$. Pre tieto rovnice existuje určitá invarianta systému. Využijeme priepustnosť a a regeneračnú rýchlosť b .

$$i(t) + s(t) - \frac{b}{a} \ln s(t) = k \quad k - \text{konštanta} \quad (6)$$

čo dokážeme

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(i(t) + s(t) - \frac{b}{a} \ln s(t) \right) &= 0 \\
\frac{di(t)}{dt} + \frac{ds(t)}{dt} - \frac{b}{a} \frac{1}{s(t)} \frac{ds(t)}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

po dosadení z (2, 3) dostávame

$$as(t)i(t) - bi(t) - as(t)i(t) - \frac{b}{a} \frac{1}{s(t)} (-as(t)i(t)) = 0$$

z čoho vyplýva, že uvedený výraz je rovný konštante.

Výraz $as(t)i(t)$ je štandardný kinetický výraz, založený na myšlienke, že počet stretnutí za jednotku času medzi $s(t)$ a $i(t)$ bude úmerný k ich počtu.

Priepustnosť a je určená frekvenciou kontaktov $s(t)$ a $i(t)$ jednotlivcov a účinnosťou, s ktorou je choroba prenášaná pri tomto stretávaní.

Uvažujeme prípad bez nových infikovaných, takže rovnica (3) sa zredukuje na tvar

$$\frac{di(t)}{dt} = -bi(t) \quad (7)$$

Potom
$$i(t) = i(0)e^{-bt} \quad (8)$$

Počet infikovaných jednotlivcov $i(t)$, ktorí sa uzdravia (trvanie infekcie) za čas $(t, t + dt)$ bude

$$|di(t)| = \left| \left(\frac{di(t)}{dt} \right) dt \right| = i(t)bdt = i(0)be^{-bt} dt \quad (9)$$

Priemerné trvanie infekcie t_{pr} je potom rovné

$$t_{pr} = \frac{\int_0^{\infty} i(0)be^{-bt} dt}{\int_0^{\infty} i(0)be^{-bt} dt} = \frac{1}{b} \quad (10)$$

5 Podmienky pre šírenie epidémie

V epidemiológii má slovo "*epidémia*" formálny význam- je to stav, v ktorom počet infikovaných jednotlivcov $i(t)$ stúpa z počiatočnej hodnoty. Podmienky pre sledovanie šírenia epidémie vyplývajú priamo z rovnice (3):

$$\frac{di(t)}{dt} \text{ musí byť vždy kladné, z čoho vyplýva } s(t) > \frac{b}{a} \quad (11)$$

Tak pre dané a a b je kritický počet citlivých jednotlivcov $s(t)$ pre epidémiu. Ak s_0 je počiatočný počet $s(t)$, potom podmienka pre šírenie epidémie je

$$s_0(t) > \frac{b}{a} \quad (12)$$

čo vyplýva z rovnice (11).

Infikovaní jednotlivci $i(t)$ budú priemerne nákazliví počas doby $\frac{1}{b}$.

Počet citlivých jednotlivcov $s(t)$ nakazených jedným infikovaným jednotlivcom $i(t)$ za jednotku času je potom $as(t)$.

Potom celkový počet ľudí, nakazených jedným infikovaným je $\frac{as(t)}{b}$. (13)

Aby mohol byť tento stav kvalifikovaný ako epidemický, toto číslo musí byť väčšie ako 1 ($s(t) > \frac{b}{a}$).

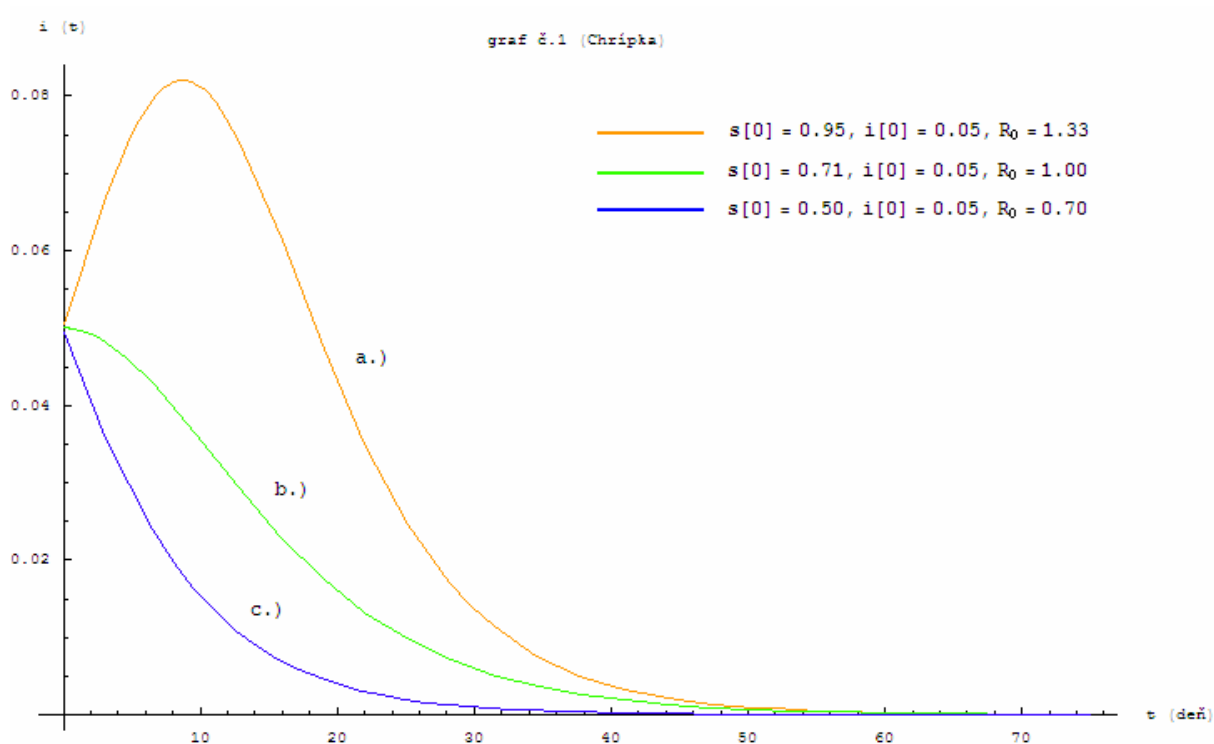
Parameter označovaný ako

$$R_0 = \frac{as_0(t)}{b} \quad (14)$$

sa nazýva miera reprodukcie epidémie.

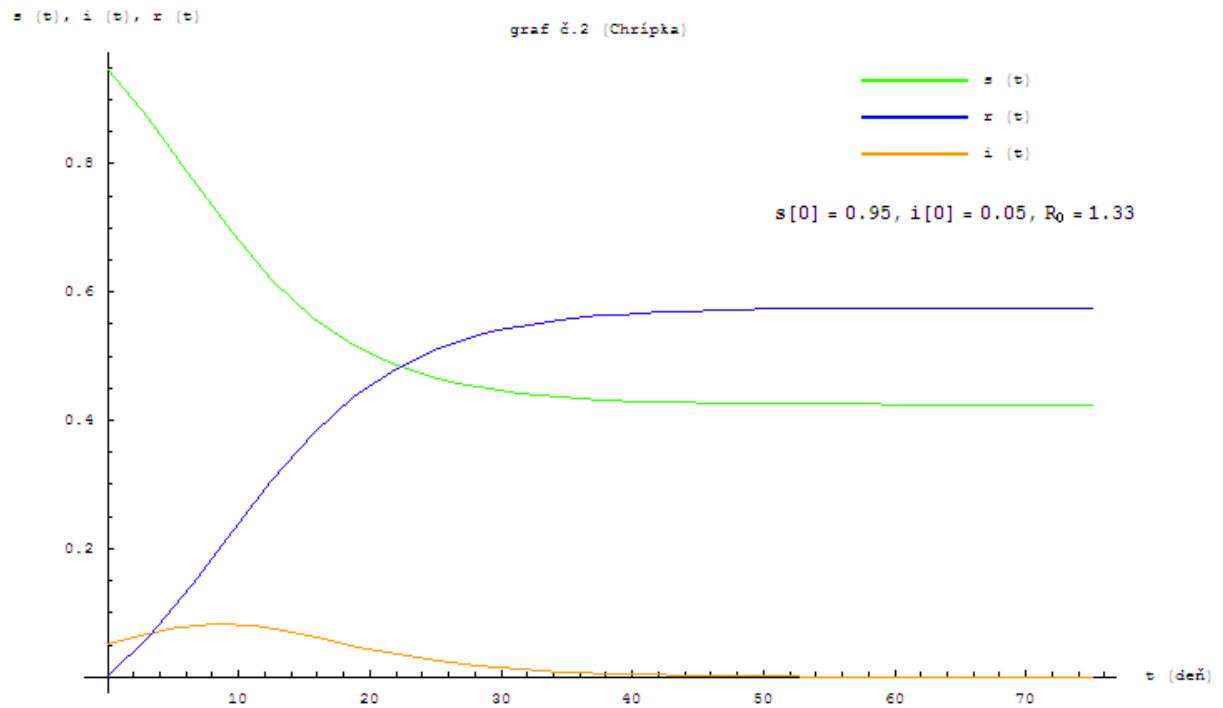
Možno je trochu prekvapujúce, že začiatočný počet infikovaných jednotlivcov $i(t)$ nehrá úlohu v určovaní, či nastala epidémia. Samozrejme, od počiatočného počtu infikovaných jednotlivcov $i(t)$ budú závislé iné aspekty epidémie - obzvlášť čas vrcholu (maxima) epidémie. Čas vrcholu epidémie je čas maximálneho počtu infikovaných jednotlivcov $i(t)$.

Z rovnice (3) vidieť, že vrchol (maximum) epidémie nastane, keď $s(t) = \frac{b}{a}$. To je vtedy, keď miera reprodukcie R_0 je rovná 1 (Graf č.1 b.).



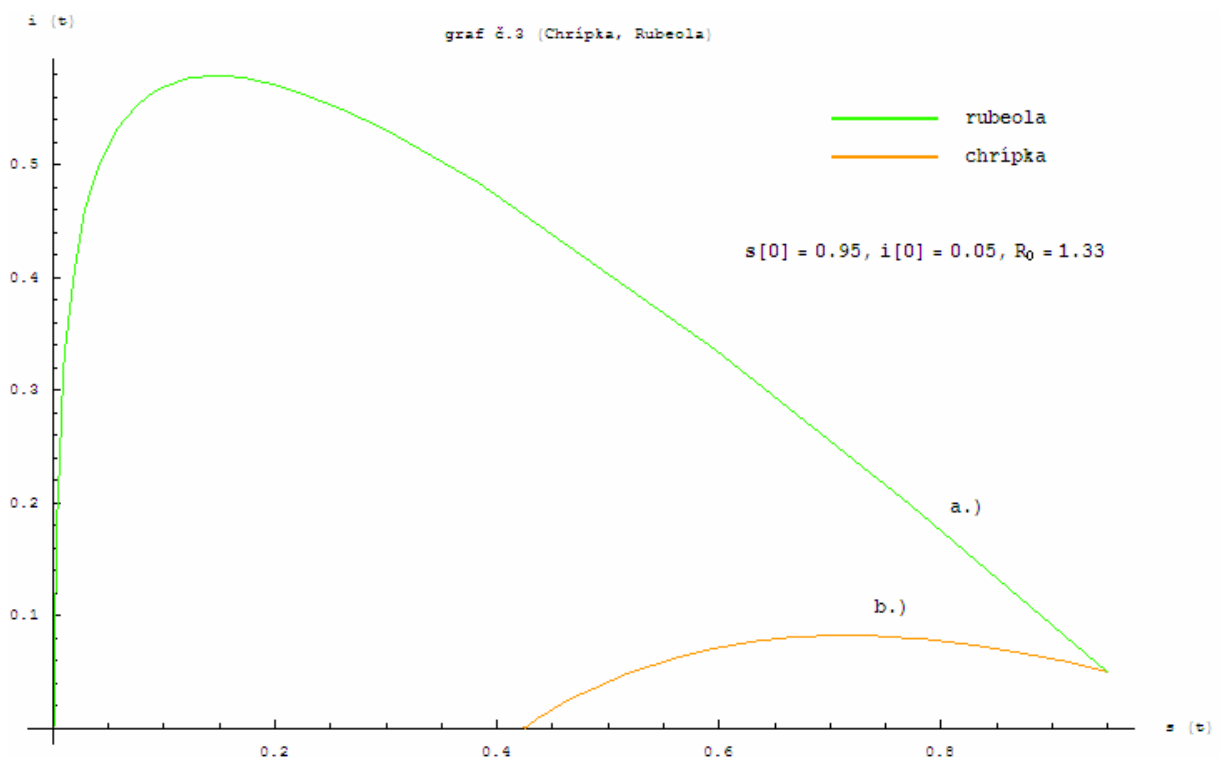
Graf č.1 Priebeh infikovanej populácie v čase (príklad pre chrípku $a=0.47$, $b=0.33$)

- a.) nastáva šírenie epidémie ($R_0=1.33$)
- b.) špička epidémie ($R_0=1.00$)
- c.) nenastáva šírenie epidémie ($R_0=0.7$)



Graf č.2 Priebeh citlivej, infikovanej a odolnej populácie v čase (příklad pre chrípku $a=0.47, b=0.33$)

6 Rovnováha a stabilita



Graf č.3 Fázový portrét: a.) rubeola ($a=0.62, b=0.09$); b.) chrípka ($a=0.47, b=0.33$)

Môžeme ukázať, že rovnovážne stavy z rovníc (2, 3, 4) sú tie, v ktorých $i(t)=0$ a $s(t)=c$, kde c je ľubovoľná kladná konštanta.

Formálnou analýzou stability dostávame dve charakteristické čísla 0 a $ac - b$.

Ak sú vhodné podmienky pre šírenie epidémie, charakteristické číslo $ac - b$ nadobúda kladnú hodnotu a bod rovnováhy je nestabilný.

Ak toto charakteristické číslo má zápornú hodnotu, nedá sa vyvodiť záver stability.

Je zrejmé, že rovnováha nie je striktnie stabilná ani v tomto prípade, pretože každé riešenie s nenulovým $i(t)$ bude smerovať do stavu, v ktorom $s(t)$ klesá a preto sa nevráti do stavu c .

7 Zhodnotenie

Cieľom mojej práce bolo na základe teoretického modelu populácie, ako modelu zloženého z troch skupín jednotlivcov, popísať za uvedených predpokladov šírenie epidémie v populácii ako funkciu času, čo sa mi aj podarilo.

Matematický popis závisí od charakteru choroby. Pri simulácii jednotlivých priebehov som používal konštanty, ktoré zodpovedajú reálnym hodnotám konštánt pri chrípke a rubeole.

Na tvorbu grafických závislostí som využíval výpočtový systém Mathematica. Celý projekt je vypracovaný ako prezentácia v programe Microsoft PowerPoint s aplikáciou softvéru Mathematica.

Použitá literatúra a informačné zdroje

- [1] Komorníková M. – Mikula K.: Výpočtový systém Mathematica, Bratislava STU, 1998
- [2] <http://www.abdn.ac.uk/curly-arrows/org/history.htm>
- [3] <http://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/people/mckendrick.gif>
- [4] <http://www.pims.math.ca/pi/issue8/page14-17.pdf>
- [5] <http://referaty.atlas.sk/ostatne/informatika/8958>
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/Kermack-McKendrickModel.html>
- [7] <http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffcalc/sir/contents.html>
- [8] <http://www.me.rochester.edu/courses/ME406/webexamp/sir1.pdf>