

Príklady z Matematiky 3

1 Prvý týždeň

1. Nájdite modul, hlavnú hodnotu argumentu a zobrazte v komplexnej rovine nasledujúce komplexne čísla:

- (a) $1 - \sqrt{3}i, [2, -\frac{\pi}{3}.]$
- (b) $-2 + 2i, [2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}.]$
- (c) $-4, [4, \pi.]$
- (d) $i^5, [1, \frac{\pi}{2}.]$

2. Zapište nasledujúce čísla v trigonometrickom a exponenciálnom tvare:

- (a) $1 + \sqrt{3}i, [2 (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}), 2e^{i\frac{\pi}{3}}.]$
- (b) $2 + 2i, [2\sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.]$
- (c) $-2, [2 (\cos \pi + i \sin \pi), 2e^{i\pi}.]$
- (d) $-i^3, [(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}), e^{i\frac{\pi}{2}}.]$

3. Vypočítajte a napíšte v algebrickom tvare:

- (a) $(1 + \sqrt{3}i)^3, [-8.]$
- (b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}, [-1 - i.]$

4. Nájdite všetky korene rovníc a zobrazte ich v komplexnej rovine

- (a) $z^3 = i, [w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, w_3 = -i.]$
- (b) $z^4 = -1, [w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, w_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, w_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.]$
- (c) $z^4 = 1 - \sqrt{3}i, \left[\begin{array}{l} w_1 = \sqrt[4]{2} (\cos (-\frac{\pi}{12}) + i \sin (-\frac{\pi}{12})), w_2 = \sqrt[4]{2} (\cos (\frac{5\pi}{12}) + i \sin (\frac{5\pi}{12})), \\ w_3 = \sqrt[4]{2} (\cos (\frac{11\pi}{12}) + i \sin (\frac{11\pi}{12})), w_4 = \sqrt[4]{2} (\cos (-\frac{7\pi}{12}) + i \sin (-\frac{7\pi}{12})) \end{array} \right] \\ \text{alebo } w_4 = \sqrt[4]{2} (\cos (\frac{17\pi}{12}) + i \sin (\frac{17\pi}{12})).$
- (d) $z^4 = 1, [w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1, w_4 = -i.]$
- (e) $z^3 = -1, [w_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, w_2 = -1, w_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.]$

2 Druhý týždeň

Vypočítajte krivkové integrály

1. $\int_C \frac{1}{x-y} ds$, kde C je úsečka od bodu $[0, -2]$ po bod $[4, 0]$. $[\sqrt{5} \ln 2.]$
2. $\int_C x ds$, kde C je časť paraboly $y = x^2$ medzi bodmi $[2, 4]$ a $[1, 1]$. $\left[\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{12} \right]$
3. $\int_C x^2 ds$, kde C je časť grafu $y = \ln x$, kde $1 \leq x \leq 2$. $\left[\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3} \right]$
4. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kde C je kružnica $x^2 + y^2 = x$. $[2.]$
5. $\int_C x^2 y ds$, kde C je oblúk kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, s koncovými bodmi $[a, 0]$ a $[0, a]$. $\left[\frac{a^4}{3} \right]$
6. $\int_C xy ds$, kde C je obvod obdĺžnika ohraničený priamkami $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$. $[24]$
7. $\int_C \frac{x^2}{y} ds$, kde C je časť paraboly $y^2 = 2x$, $y \in \langle \sqrt{2}, 2 \rangle$. $\left[\frac{5}{6}\sqrt{5} - \frac{1}{5}\sqrt{3} \right]$
8. $\int_C -dx + \arctg \frac{y}{x} dy$, kde C sa skladá z oblúkov $\widehat{AB}$ a $\widehat{BA}$, pričom $\widehat{AB}$ je oblúk paraboly $y = x^2$, od bodu $A = (0, 0)$, po bod $B = (1, 1)$ a $\widehat{BA}$ je úsečka od bodu B do bodu A . $\left[\frac{\pi}{2} - 1 \right]$
9. $\int_C (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, kde C je časť grafu funkcie $y = 1 - |1 - x|$, $0 \leq x \leq 2$, so začiatočným bodom $[0, 0]$. $\left[\frac{4}{3} \right]$
10. $\int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, kde C je krivka $y = x^2$, z bodu $[-1, 1]$ po bod $[1, 1]$. $\left[-\frac{14}{15} \right]$
11. $\int_C y dx + x dy$, kde C je časť kružnice $x = a \cos t, y = a \sin t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, kde $[a, 0]$ je začiatočný bod. $[0.]$
12. $\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, kde C je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$, kladne orientovaná. $[-2\pi]$
13. $\int_C \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, kde C je úsečka z bodu $(1, -1)$ po bod $(4, 0)$. $[4 - \sqrt{2}]$
14. Vypočítajte integrál $\int_C \frac{x+y}{x^2+y^2} dx - \frac{x-y}{x^2+y^2} dy$, kde C je oblúk AB kružnice $x^2 + y^2 = a^2$ od bodu $A = (a, 0)$ cez bod $C = (0, a)$ po bod $B = (-a, 0)$. $[-\pi]$

Zistite, či sú nasledujúce integrály závislé od integračnej cesty:

15. $\int_C (2x + 3y) dx + (3x - 4y) dy$.
16. $\int_C (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$.

Použitím Greenovej vety vypočítajte integrály:

17. $\int_C y^2 dx + x dy$, ak C je hranica štvorca ohraničená priamkami $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, ktorá je kladne orientovaná. $[4.]$
18. $\int_C \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy$, kde C je hranica oblasti $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq y \leq \sqrt{3}x$, ktorá je kladne orientovaná. $[\frac{\pi}{12} \ln 2.]$
19. $\int_C (3x^2 \cos y - y^3, x^3 - x^3 \sin y) ds$, kde C je kladne orientovaná krivka daná vzťahom $x^2 + y^2 = 1$. $[\frac{3}{2}\pi]$

3 Tretí týždeň

1. V úlohách 1 - 5 zistite, aká množina je určená daným vzťahom. Jej obraz načrtnite v komplexnej rovine.
2. $|z - z_0| = r$, $r > 0$, z_0 je pevný bod. [Kružnica so stredom z_0 a polomerom r]
3. $|z + i| + |z - i| < 4$. [Vnútro elipsy $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$]
4. $|z + 2| > 1$. [Vonkajšok kružnice so stredom $S = (-2; 0)$ a polomerom $r = 1$]
5. $|z - 2| < |z|$. [Polrovina $\operatorname{Re} z > 1$.]
6. $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = 2$. [$z \neq 0$, kružnica so stredom $S = (0, -\frac{1}{4})$ a polomerom $r = \frac{1}{4}$]
7. Zistite, či sú nasledujúce množiny oblasti. (Načrtnite ich v komplexnej rovine):

- (a) $|z| < 4$, [áno]
- (b) $1 \leq |z - 1| \leq 3$, [nie]
- (c) $\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$, [nie]
- (d) $0 < |z - 2| < 3$, [áno]
- (e) $\operatorname{Re} z < 2$. [áno]

8. Nájdite limity postupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak

- (a) $z_n = \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n + \frac{n+1}{3n-1}i$, $\left[\sqrt[3]{e} + \frac{1}{3}i\right]$
- (b) $z_n = 2n \sin \frac{1}{n} + \frac{4n+1}{5n-1}i$, $\left[2 + \frac{4}{5}i\right]$
- (c) $z_n = n \operatorname{tg} \frac{1}{2n} + \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n i$, $\left[\frac{1}{2} + ie^4\right]$

9. Zistite, či rady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergujú, alebo divergujú

- (a) $z_n = \frac{\sin n + i \cos n}{n^3}$, [absolútne konverguje]
- (b) $z_n = \frac{1}{n(n+1)} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1}i$, [absolútne konverguje]
- (c) $z_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{n}{3^n}i$, [diverguje, návrh rad $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ nespĺňa nutnú podmienku konvergenzie]

10. Vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie:

- (a) $f(z) = e^{z^2}$,
 $\left[\operatorname{Re} f(z) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy, \operatorname{Im} f(z) = e^{x^2-y^2} \sin 2xy \right]$
- (b) $f(z) = z^2 \sin z$,
 $\left[\begin{array}{l} \operatorname{Re} f(z) = (x^2 - y^2) \sin x \cosh y - 2xy \cos x \sinh y, \\ \operatorname{Im} f(z) = (2xy \sin x \cosh y + (x^2 - y^2) \cos x \sinh y) . \end{array} \right]$

- (c) $f(z) = \operatorname{tg} z$,

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re} f(z) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y}, \\ \operatorname{Im} f(z) = \frac{\sinh y \cosh y}{\cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y} \end{bmatrix}$$
- (d) $f(z) = z^2 - z + 1$,
 $[\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 - x + 1, \operatorname{Im} f(z) = 2xy - y]$
- (e) $f(z) = \frac{1}{z}$,

$$\left[\operatorname{Re} f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \operatorname{Im} f(z) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \right]$$
- (f) $f(z) = |z| + \operatorname{Re} z$.

$$\left[\operatorname{Re} f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + x, \operatorname{Im} f(z) = 0 \right].$$

V úlohách 10 a 11 nájdite definičný obor funkcie f :

11. $f(z) = \frac{3iz-12z+i}{iz^2+1-i}$. $\left[D(f) = \mathbf{C} \setminus \left\{ \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt[4]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}} \right\} \right]$
12. $f(z) = \frac{\bar{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$.
 $\left[D(f) = \mathbf{C} \setminus \left(\{z \in \mathbf{C}; |z| = 3\} \cup \left\{ \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, -i\sqrt[3]{2} \right\} \right) \right]$

V úlohách 12 - 14 vypočítajte funkčnú hodnotu funkcie f v čísle z_0 :

13. $f(z) = \frac{\bar{z}}{(z^3-2i)(|z|-3)}$, $z_0 = i$. $\left[-\frac{1}{6}\right]$
14. $f(z) = z + \bar{z}^2 - \operatorname{Re}(z\bar{z}) - \operatorname{Im}(z\bar{z})$, $z_0 = 8 - 6i$. $[-64 + 90i]$
15. $f(z) = \arg z$
- (a) $z_0 = 8 - 6i$. $\left[-\arctg\left(\frac{3}{4}\right)\right]$
- (b) $z_0 = -1 + 2i$. $[\pi - \arctg 2]$
- (c) $z_0 = -1 - i$. $\left[-\frac{3\pi}{4}\right]$

V úlohách 15 - 20 vypočítajte limity:

16. $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z+3}{z^2+2iz}$. $\left[-\frac{3+2i}{8}\right]$
17. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2-iz+z-i}{3iz^2+3z}$. $\left[-\frac{1+i}{3}\right]$
18. $\lim_{z \rightarrow 2+i} \frac{3iz-6i+3}{2iz^2-4iz+2z}$. $\left[\frac{6-3i}{10}\right]$
19. $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+(2-i)z-2i}{z^2+1}$. $\left[\frac{1}{2} - i\right]$
20. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3}{|z|^2}$. $[0]$
21. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|^2}$. [Návod: vyjadrite reálnu a imaginárnu časť funkcie, potom ukážte, že limita neexistuje.]

V úlohách 21 - 23 vyšetrite spojitost funkcie f :

$$22. f(z) = \frac{1}{1-z}. \text{ [Spojitá v } \mathbf{C} \setminus \{1\}]$$

$$23. f(z) = \frac{1}{1+z^2}. \text{ [Spojitá v } \mathbf{C} \setminus \{-i, i\}]$$

$$24. f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}. \text{ [Spojitá v } \mathbf{C} \setminus \{0\}]$$

V úlohách 24 - 25 zistite, či je možné dodefinovať funkciu f v bode z_0 tak, aby bola spojitá v tomto bode:

$$25. f : \mathbf{C} \setminus \{0, 1+i\} \longrightarrow \mathbf{C}, f(z) = \frac{z^3 - z^2 - iz^2 + iz - i + 1}{z^2 - z - iz}, z_0 = 1+i. \text{ [Je možné, ak } f(1+i) = \frac{3}{2}(1+i)]$$

$$26. f : \mathbf{C} \setminus \{4+i\} \longrightarrow \mathbf{C}, f(z) = \frac{z^2 - (3+2i)z - 6+7i}{z-4-i}, z_0 = 4+i. \text{ [Nie je možné, lebo } \lim_{z \rightarrow 4+i} f(z) = \infty]$$

4 Štvrtý týždeň

1. Nájdite obor konvergenencie mocninového radu:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$. $[K(0, 1) = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}]$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. [konverguje len v strede $a = 0$]
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$. $[K(0, e) = \{z \in \mathbf{C}; |z| < e\}]$
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n-1}}{1+in} z^n$. $[K(0, 1) = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}]$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$. $[K(0, 2) = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 2\}]$
- (f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2n}$. $[K(0, \sqrt{2}) = \{z \in \mathbf{C}; |z| < \sqrt{2}\}]$
- (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$. $[K(0, \frac{1}{e}) = \{z \in \mathbf{C}; |z| < \frac{1}{e}\}]$
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2n}} (z - 1 + i)^n$.
 $[K(1 - i, \frac{1}{3}) = \{z \in \mathbf{C}; |z - 1 + i| < \frac{1}{3}\}]$
- (i) $\sum_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{2}{n})^{n^2} (z - 2i)^n$.
 $[K(2i, e^2) = \{z \in \mathbf{C}; |z - 2i| < e^2\}]$
- (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+in}{2^n} (z + i)^n$. $[K(-i, 2) = \{z \in \mathbf{C}; |z + i| < 2\}]$
- (k) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-1}{5})^n$ $[K(1, 5) = \{z \in \mathbf{C}; |z - 1| < 5\}]$
- (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2i)^n}{(n+1)(n+3)} (z + 3i)^n$,
 $[K(-3i, \frac{1}{\sqrt{5}}) = \{z \in \mathbf{C}; |z + 3i| < \frac{1}{\sqrt{5}}\}]$
- (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \left(\frac{z-1+i}{1-3i}\right)^n$,
 $[K(1 - i, \sqrt{10}) = \{z \in \mathbf{C}; |z - 1 + i| < \sqrt{10}\}]$
- (n) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z-1}{5})^n$ $[K(1, 5) = \{z \in \mathbf{C}; |z - 1| < 5\}]$

2. Vypočítajte funkčné hodnoty:

- (a) $\ln(-1)$, $[i\pi]$
- (b) $\ln(-i)$, $[-\frac{1}{2}i\pi]$
- (c) $\ln(1 - \sqrt{3}i)$. $[\frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{3}i\pi]$
- (d) $\ln(-3)$ $[\ln 3 + i\pi]$
- (e) $\ln(5i)$ $[\ln 5 + i\frac{\pi}{2}]$
- (f) $\ln(2)$ $[\ln 2]$
- (g) $\ln(e)$ $[1]$
- (h) $\ln(2 + 2i)$ $[\ln(\sqrt{8}) + i\frac{\pi}{4}]$
- (i) $\ln(-2 + 2i)$ $[\ln(\sqrt{8}) + i\frac{3\pi}{4}]$
- (j) $\ln(-2 - 2i)$ $[\ln(\sqrt{8}) + i(-\frac{3\pi}{4})]$

- (k) $\ln(2 - 2i)$ $[\ln(\sqrt{8}) - i\frac{\pi}{4}]$
- (l) $\ln(3 + 4i)$ $[\ln 5 + i \operatorname{arctg}(\frac{4}{3})]$
- (m) $\ln(-3 - 4i)$ $[\ln 5 + i(\operatorname{arctg}(\frac{4}{3}) - \pi)]$
- (n) $\ln(3 - 4i)$ $[\ln 5 - i \operatorname{arctg}(\frac{4}{3})]$
- (o) $\ln(1 - i)$ $[\frac{1}{2} \ln 2 - i\frac{\pi}{4}]$
- (p) $\ln(-\sqrt{3} - i)$ $[\ln 2 - i\frac{5\pi}{6}]$
- (q) $\ln(1 - i\sqrt{3})$ $[\ln 2 - i\frac{\pi}{3}]$
- (r) $\ln(-8 + 15i)$ $[\ln 17 + i(\pi - \operatorname{arctg} \frac{15}{8})]$
- (s) $\ln(e^{i\frac{\pi}{4}})$ $[i\frac{\pi}{4}]$
- (t) $\ln(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})$ $[\ln \sqrt{3} + i\frac{\pi}{6}]$

3. Nájdite všetky riešenia z rovníc:

- (a) $e^z = -1$, $[\{i\pi(1 + 2k), k \in \mathbf{Z}\}]$
- (b) $e^z = -i$, $[\{i\pi(-\frac{1}{2} + 2k), k \in \mathbf{Z}\}]$
- (c) $e^z = 1 - \sqrt{3}i$. $[\{\frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{3}i\pi + 2k\pi i, k \in \mathbf{Z}\}]$

4. Vypočítajte hodnoty:

- (a) $e^{2+i\frac{\pi}{2}}$, $[ie^2]$
- (b) e^{2+i} , $[e^2 \cos 1 + ie^2 \sin 1]$
- (c) i^i . $[e^{-\frac{1}{2}\pi}]$
- (d) $(-3i)^{2i}$ $[e^\pi [\cos(\ln 9) + i \sin(\ln 9)]]$
- (e) i^{1+i} $[ie^{-\frac{\pi}{2}}]$
- (f) $i^{\frac{3}{4}}$ $[\cos(\frac{3\pi}{8}) + i \sin(\frac{3\pi}{8})]$
- (g) $(1 - i)^{2+i}$ $[2e^{\frac{\pi}{4}} \sin(\ln(\sqrt{2})) - i \cos(\ln(\sqrt{2}))]$
- (h) $(1 + i)^{\frac{1}{2}}$ $[\sqrt[4]{2}(\cos(\frac{\pi}{8}) + i \sin(\frac{\pi}{8}))]$
- (i) $(1 + i\sqrt{3})^{2-i}$ $[4e^{\frac{\pi}{3}}(\cos(\frac{2\pi}{3} - \ln 2) + i \sin(\frac{2\pi}{3} - \ln 2))]$

5. Vypočítajte hodnoty:

- (a) $\sin i$, $[i \sinh 1]$
- (b) $\cos(1 - i)$. $[\cos 1 \cosh 1 + i \sin 1 \sinh 1]$
- (c) $\sin(2 - 3i)$

$$\left[\frac{\sin 2(e^3 + e^{-3})}{2} - i \frac{\cos 2(e^3 - e^{-3})}{2} = \sin 2 \cosh 3 - i \cos 2 \sinh 3 \right]$$
- (d) $\cos i$ $\left[\frac{e^{-1} + e}{2} = \cosh 1 \right]$

$$(e) \quad \cos(4+i) \quad [\cos 4 \cosh 1 - i \sin 4 \sinh 1]$$

$$(f) \quad \operatorname{tg}(2-i) \quad \left[\frac{e^2 \sin 4 + i(1 - e^2 \cos 4)}{e^2 \cos 4 + 1 + i e^2 \sin 4} \right]$$

$$(g) \quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right) \quad \left[\frac{8+15i}{17} \right]$$

5 Piaty týždeň

1. Daná je funkcia $f(z) = \frac{iz-1}{iz^2+1+i}$. Nájdite:

(a) definičný obor; $\left[\mathbf{C} \setminus \left\{ \sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i}, \sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}i} \right\} \right]$

(b) $f', f'(i)$ $\left[f'(z) = \frac{z^2+2iz-1+i}{(iz^2+1+i)^2}, f'(i) = -4+i \right]$

2. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(z) = \frac{3i}{2i-z}$. $\left[D(f) = \mathbf{C} \setminus \{2i\} = D(f'), f'(z) = \frac{3i}{(2i-z)^2} \right]$

V úlohách 3 - 8. pre funkciu f

(a) zistite, kde existuje derivácia,

(b) nájdite f' v bodoch, kde existuje,

(c) vyšetrite, kde je f analytická (holomorfná)

3. $f(z) = x^2 + iy^2$. $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a.} f' \text{ existuje na } M = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z\}, \\ \mathbf{b.} f'(z) = f'(x+iy) = 2x, \\ \mathbf{C.} \text{ nie je analytická v žiadnom bode} \end{array} \right]$

4. $f(z) = |z|$. $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a.} f' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \mathbf{b.} f'(z) \nexists, \\ \mathbf{C.} \text{ nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array} \right]$

5. $f(z) = z^3 + z$. $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a.} f' \text{ existuje na } \mathbf{C}, \\ \mathbf{b.} f'(z) = 3z^2 + 1, \\ \mathbf{C.} \text{ je analytická na } \mathbf{C}. \end{array} \right]$

6. $f(z) = z \operatorname{Re} z$. $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a.} f' \text{ existuje len v bode } z = 0, \\ \mathbf{b.} f'(0) = 0, \\ \mathbf{C.} \text{ nie je analytická v žiadnom bode} \end{array} \right]$

7. $f(z) = f(x+iy) = (2xy+2x-1)+i(y^2-x^2+2y)$. $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a.} f' \text{ existuje na } \mathbf{C}, \\ \mathbf{b.} f'(z) = f'(x+iy) = (2y+2) - i(2x), \\ \mathbf{C.} \text{ je analytická na } \mathbf{C}. \end{array} \right]$

8. $f(z) = (e^x \cos y) - i(e^x \sin y)$. $\left[\begin{array}{l} \mathbf{a.} f' \text{ neexistuje v žiadnom bode,} \\ \mathbf{b.} f'(z) \nexists, \\ \mathbf{C.} \text{ nie je analytická v žiadnom bode.} \end{array} \right]$

V úlohách 9 - 22 nájdite na $A \subset \mathbf{C}$ analytickú (holomorfnú) funkciu $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, ak je daná jej jedna zložka a prípadne funkčná hodnota v jednom bode:

9. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2, f(i) = 0$.

$\left[f(z) = f(x+iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + 1) \right]$

10. $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$.

$$\left[f(z) = f(x + iy) = (x^2 - y^2 + xy) + i \left(2xy + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) \right]$$
11. $v(x, y) = x^2 - y^2 - 3x + 2xy$, $u(2, 1) = 0$.

$$[u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy + 3y - 2]$$
12. $v(x, y) = 2e^x \sin y$, $f(0) = 1$.

$$[f(z) = f(x + iy) = (2e^x \cos y - 1) + i(2e^x \sin y)]$$
13. $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

$$\left[\begin{array}{l} u(x, y) = -2 \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) - y - 2x + k, \text{ alebo } \\ u(x, y) = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) - y - 2x + K \end{array} \right]$$
14. $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$, pričom $f(0) = 0$. $[f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}, f(z) = ze^z]$
15. Ukážte, že $u(x, y) = xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu.

$$[f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, v(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C]$$
16. Ukážte, že $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $[f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, v(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C]$
17. Ukážte, že $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $[f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, v(x, y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + C.]$
18. Ukážte, že $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - x$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $[f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 - y + C]$
19. Ukážte, že $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $[f : \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbf{R}, v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + C]$
20. Ukážte, že $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ je harmonická funkcia a nájdite harmonicky združenú funkciu. $[f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, v(x, y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y + C]$

6 Šiesty týždeň

1. Vypočítajte integrály: ($\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C .)
 2. $\int_C z \sin z dz$, C je úsečka od bodu 0 po bod i . $[-ie^{-1}]$
 3. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, C je úsečka
 - (a) od bodu 0 po bod $1 + i$. $[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}]$
 - (b) od bodu -1 po bod $1 + i$. $[0]$
 4. $\int_C (\bar{z})^2 dz$, $C : z(t) = t + i\frac{t}{3}$, $t \in \langle 0, 3 \rangle$ orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením. $[\frac{10(3-i)}{3}]$
 5. $\int_C \frac{1}{z} dz$, C je úsečka od bodu 1 po bod $1 + i$. $[\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}]$
 6. $\int_C e^{\bar{z}} dz$, C je lomená krivka, ktorá sa skladá z dvoch úsečiek: prvá so začiatočným bodom 0 a koncovým bodom i , druhá so začiatočným bodom i a koncovým bodom $1 + i$. $[1 + (e - 2)(\cos 1 - i \sin 1)]$
 7. $\int_C \frac{1}{z} dz$, $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$ od bodu -2 po bod 2. $[i\pi]$
 8. $\int_C |z| dz$, kde
 - (a) $C : |z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1. $[2]$
 - (b) $C : |z| = 2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$ od bodu $-2i$ po bod $2i$. $[8i]$
 9. $\int_C \bar{z} |z| dz$, kde $C : |z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ od bodu i po bod $-i$ a úsečka od bodu $-i$ po bod i . $[-i\pi]$
 10. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-i\pi]$
 11. $\int_C z \operatorname{Im} z dz$, kde $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -2 po bod 2. $[\frac{16i}{3}]$
 12. $\int_C \frac{z}{z^2+5} dz$, kde $C : |z| = 2$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu 2 po bod -2 a úsečka od bodu -2 po bod -1 a $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ od bodu -1 po bod 1 a úsečka od bodu 1 po bod 2. $[\frac{4}{3}]$
- V príkladoch 13 - 17 pomocou Cauchyho integrálnej vety vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:
13. $\int_C \frac{1}{z^2+1} dz$, $C = \{z \in \mathbf{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + 4(\operatorname{Im} z)^2 = 1\}$. $[0]$
 14. $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5} dz$, $C : |z| = 1$. $[0]$
 15. $\int_C \frac{z^2+5}{z^2+1} dz$, $C = \{z \in \mathbf{C} : 4(\operatorname{Re} z)^2 + 16(\operatorname{Im} z)^2 = 1\}$. $[0]$
 16. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. $[0]$
 17. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$, $C : |z+1| = 1$. $[0]$

7 Siedmy týždeň

1. V príkladoch 1 - 14 pomocou Cauchyho integrálnej vety, alebo Cauchyho integrálnej formuly vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých, kladne orientovaných krivkách:
2. $\int_C \frac{e^z \cos z}{(1+z^2) \sin z} dz$, $C : |z - 2 - i| = \sqrt{2}$. $[0]$
3. $\int_C \frac{\sin z}{z+i} dz$, $C : |z - i| = 1$. $[0]$
4. $\int_C \frac{1}{(z-2)(z+2i)} dz$, $C : |z| = 1$. $[0]$
5. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z| = \frac{1}{2}$. $[0]$
6. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z| = \frac{3}{2}$. $[18\pi i]$
7. $\int_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$, $C : |z - 2i| = \frac{3}{2}$. $[\frac{\pi}{e}]$
8. $\int_C \frac{z}{z^4-1} dz$, $C : |z - a| = a$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$. $[i\frac{\pi}{2}]$
9. $\int_C \frac{2z^2-3z+4}{z+1} dz$, $C : |z + 1| = 1$. $[18\pi i]$
10. $\int_C \frac{e^z+1}{z+i} dz$, $C : |z + i| = 2$. $[2\pi \sin 1 + 2i\pi (1 + \cos 1)]$
11. $\int_C \frac{z^2}{(z-4)(z^2+4)} dz$, $C : |z - 1 + i| = 2$. $[-\frac{2\pi}{5} + i\frac{\pi}{5}]$
12. $\int_C \frac{\sin z}{z^2+1} dz$, $C : |z + i| = 1$. $[i\pi \sinh 1]$
13. $\int_C \frac{z+2}{z^2-2z+2} dz$,
 - (a) $C : |z - 1 - 2i| = 2$. $[\pi (3 + i)]$
 - (b) $C : |z - 1 + 2i| = 2$. $[\pi (-3 + i)]$
14. $\int_C \frac{1}{z^4-1} dz$, $C : |z - 1 - i| = \sqrt{2}$. $[\frac{\pi(-1+i)}{2}]$
15. Vypočítajte $\int_C \frac{1}{z^2-i} dz$, ak C je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka, na ktorej neležia korene menovateľa. Vypočítajte všetky možnosti.

jte všetky možnosti.	[	korene menovateľa: $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
		a. $z_0 \in \text{Int}C$, $z_1 \notin \text{Int}C$ $[\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)]$
		b. $z_0 \notin \text{Int}C$, $z_1 \in \text{Int}C$ $[-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}(1+i)]$
		c. $z_0, z_1 \in \text{Int}C$ $[0]$
		d. $z_0, z_1 \notin \text{Int}C$ $[0]$

8 Ôsmy týždeň

V úlohách 1 - 2 pomocou definície nájdite Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

1. $f(z) = \sin^2 z$, $a = 0$.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \text{ konverguje na } M = \mathbf{C} \right]$$

2. $f(z) = \ln(iz + 2)$, $a = 1 + 2i$.

$$\left[i\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (z - 1 - 2i)^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \mathbf{C} : |z - 1 - 2i| < 1\} \right]$$

V úlohách 3 - 9 vypočítajte Taylorov rad funkcie f so stredom v bode a a vyšetrite jeho konvergenciu:

3. $f(z) = \frac{z}{z+2}$, $a = 1$.

$$\left[\frac{1}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} (z - 1)^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \mathbf{C} : |z - 1| < 3\} \right]$$

4. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $a = 0$.

$$\left[-1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^n, \text{ konverguje na } M = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\} \right]$$

5. $f(z) = \frac{z+2}{z^2+5z+4}$, $a = 1$.

$$\left[\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2 \cdot 5^{-n-1} + 2^{-n-1}) (z - 1)^n, \right. \\ \left. \text{konverguje na } M = \{z \in \mathbf{C} : |z - 1| < 2\} \right]$$

6. $f(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$, $a = 2$.

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} (3 \cdot 5^{-n-1} - 3^{-n-1}) (z - 2)^n, \right. \\ \left. \text{konverguje na } M = \{z \in \mathbf{C} : |z - 2| < 3\} \right]$$

7. $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z+5}$, $a = i$.

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2-3i}{4} (1+i)^{-n-1} - \frac{2+3i}{4} (1-3i)^{-n-1} \right) (z-i)^n, \right. \\ \left. \text{konverguje na } M = \{z \in \mathbf{C} : |z-i| < \sqrt{2}\} \right]$$

8. $f(z) = \frac{z^2+i}{z^2+iz+2}$, $a = 1$.

$$\left[\frac{2+i}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3} \left[\frac{(1+i)}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1+4i}{(1+2i)^{n+1}} \right] (z-1)^n, \right. \\ \left. \text{konverguje na } M = \{z \in \mathbf{C} : |z-1| < \sqrt{2}\} \right]$$

9. $f(z) = e^{3z-2}$, $a = 1$. $\left[e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} (z-1)^n, \text{ konverguje na } M = \mathbf{C} \right]$

V úlohách 10 - 29 nájdite Laurentov rad funkcie f so stredom v bode a pre medzikružie $P(a, r, R) = \{z \in \mathbf{C} : r < |z - a| < R\}$.

10. $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z}}$, $a = 0$, $P(0, 0, \infty)$. $\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{5-n} \right]$

11. $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}, a = i, P(i, \sqrt{5}, \infty) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2-i)^n}{(z-i)^{n+2}} \right]$
12. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}, a = 0, P(0, 0, 1) \cdot \left[\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} \right]$
13. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}, a = i, P(i, 0, 1) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-2^{n+1}}{2(2i)^n} (z-i)^{n-1} \right]$
14. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}, a = 0, P(0, 1, \infty) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-3} \right]$
15. $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, a = 0, P(0, 0, 1) \cdot \left[\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right]$
16. $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}, a = 1, P(1, 0, 1) \cdot \left[2(z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n \right]$
17. $f(z) = \frac{1}{z^2+iz+2}, a = -2i, P(-2i, 3, \infty) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} (3i)^{-n-1} (z+2i)^{n-1} \right]$
18. $f(z) = \frac{1}{z^2-3iz-2}, a = 2i, P(2i, 1, \infty) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{-n-1} i^{-n-1} (z-2i)^{n-1} \right]$
19. $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}, a = 1, P(1, 0, 1) \cdot \left[(-1) \sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n \right]$
20. $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}, a = 1, P(1, 1, \infty) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{-2} (z-1)^n \right]$
21. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3}, a = -1, P(-1, 0, 2) \cdot \left[3(z+1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{-n} (z+1)^n \right]$
22. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3}, a = -1, P(-1, 2, \infty) \cdot \left[5(z+1)^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-1)^{n+1} 2^{-n} (z+1)^n \right]$
23. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3}, a = -3, P(-3, 0, 2) \cdot \left[2(z+3)^{-1} - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (z+3)^n \right]$
24. $f(z) = \frac{5z+11}{z^2+4z+3}, a = -3, P(-3, 2, \infty) \cdot \left[2(z+3)^{-1} + 3 \sum_{n=-\infty}^0 2^{-n} (z+3)^n \right]$
25. $f(z) = \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}, a = 0, P(0, 1, 2) \cdot \left[\left(-\frac{1}{12}\right) \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} z^{2n+1} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-1} \right]$
26. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}, a = 2, P(2, 0, \sqrt{5}) \cdot \left[(z-2)^{-1} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2+i)^{n+1} - (2-i)^{n+1}}{5^{n+1}} (z-2)^n \right]$
27. $f(z) = \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}, a = 0, P(0, 1, 2) \cdot \left[2 \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} z^n \right]$
28. $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{\pi z+1}{z}\right), a = 0, P(0, 0, \infty) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{1-n}}{(1-2n)!} z^{2n+1} - z \right]$
29. $f(z) = 2^z + 2^{\frac{1}{z}} - 1, a = 0, P(0, 0, \infty) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\ln 2)^n (-n)!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} z^n \right]$

9 Deviaty týždeň

1. V príkladoch 1 - 13 zistite druh izolovaných singulárnych bodov funkcie f a určte rezíduum funkcie f v týchto bodoch:
2. $f(z) = \frac{z^2}{z+3}$. $[z = -3, \text{ pól 1. stupňa } \text{res}_{z=-3}[f(z)] = 9]$
3. $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}$.
$$\left[\begin{array}{l} z = 2i, \text{ pól 1. stupňa } \text{res}_{z=2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2+i \cos 2}{16} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } \text{res}_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-\sin 2-i \cos 2}{16} \\ z = 0, \text{ pól 2. stupňa } \text{res}_{z=0}[f(z)] = \frac{1}{4} \end{array} \right]$$
4. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$.
$$\left[\begin{array}{l} z = i, \text{ pól 3. stupňa } \text{res}_{z=i}[f(z)] = -\frac{3i}{16} \\ z = -i, \text{ pól 3. stupňa } \text{res}_{z=-i}[f(z)] = \frac{3i}{16} \end{array} \right]$$
5. $f(z) = \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}$.
$$\left[\begin{array}{l} z = 1, \text{ pól 2. stupňa } \text{res}_{z=1}[f(z)] = -\frac{3}{4} \\ z = -1, \text{ pól 2. stupňa } \text{res}_{z=-1}[f(z)] = -\frac{5}{4} \\ z = 0, \text{ pól 1. stupňa } \text{res}_{z=0}[f(z)] = 2 \end{array} \right]$$
6. $f(z) = \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)}$.
$$\left[\begin{array}{l} z = 2, \text{ pól 2. stupňa } \text{res}_{z=2}[f(z)] = \frac{2+3i}{8} \\ z = -2i, \text{ pól 1. stupňa } \text{res}_{z=-2i}[f(z)] = \frac{-2-3i}{8} \end{array} \right]$$
7. $f(z) = \frac{4+z^2-2z \sin z}{z^3}$. $[z = 0, \text{ pól 3. stupňa } \text{res}_{z=0}[f(z)] = -1]$
8. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$. $[z = 0, \text{ pól 1. stupňa } \text{res}_{z=0}[f(z)] = 1]$
9. $f(z) = z^3 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. $[z = 0, \text{ podstatne singulárny bod } \text{res}_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = 0]$
10. $f(z) = z \sin\left(\frac{1}{z+1}\right)$. $[z = -1, \text{ podstatne singulárny bod } \text{res}_{z=-1}[f(z)] = a_{-1} = -1]$
11. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. $[z = 0, \text{ odstrániteľný singulárny bod } \text{res}_{z=0}[f(z)] = 0]$
12. $f(z) = z^2 \left(e^{\frac{1}{z}} - 2\right)$. $[z = 0, \text{ podstatne singulárny bod } \text{res}_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6}]$
13. $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{z+1}{z}\right)$. $[z = 0, \text{ podstatne singulárny bod } \text{res}_{z=0}[f(z)] = a_{-1} = \frac{1}{6} \sin 1]$
14. $f(z) = \text{tg } z$. $[z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ pól 1. stupňa } \text{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}[f(z)] = -1]$
V príkladoch 15 - 28 pomocou Cauchyho vety o rezíduách vypočítajte integrály po jednoduchých, po častiach hladkých, uzavretých orientovaných krivkách C , kde $\oplus$ je kladná orientácia, $\ominus$ je záporná orientácia krivky C .
15. $\int_C \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} dz$, kde $C : |z-1-i| = 2, \oplus$. $\left[-\frac{\pi i}{2}\right]$
16. $\int_C \frac{z+3}{(z-2)^2(z+2i)} dz$, kde $C : |z| = 3, \ominus$. $[0]$
17. $\int_C \frac{z^2}{(z^2+4)^2} dz$, kde $C : \oplus$, ktorá sa skladá z polkružnice $|z| = 3, \text{Im } z \geq 0$ a úsečky spájajúcej body -3 a 3 . $\left[\frac{\pi}{4}\right]$
18. $\int_C \frac{z^3+1}{z(z-1)^3} dz$, kde $C : |z| = 2, \oplus$. $[2\pi i]$

19. $\int_C \frac{1}{z^4+1} dz$, kde $C : \{z(t) = (1 + \cos t) + i \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$, $\ominus$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}i\pi\right]$
20. $\int_C \frac{1-\cos z}{z^3} dz$, kde $C : |z| = 1$, $\oplus$. $[\pi i]$
21. $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$, kde $C : |z| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $\left[\frac{\pi i}{3}\right]$
22. $\int_C \frac{\cos z}{z} dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[-2\pi i]$
23. $\int_C z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z-2| = 3$, $\oplus$. $\left[2\pi i \left(\frac{1}{4!} - 6\right)\right]$
24. $\int_C \sin^2\left(\frac{1}{z}\right) dz$, kde $C : |z| = 1$, $\ominus$. $[2\pi i]$
25. $\int_C (z-1)^2 \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) dz$, kde $C : |z| = 3$, $\ominus$. $\left[-\frac{5\pi i}{3}\right]$
26. $\int_C \cos\left(\frac{z}{z+i}\right) dz$, kde $C : |z+i| = \frac{1}{2}$, $\oplus$. $[-2\pi \sin 1]$
27. $\int_C \operatorname{tg} z dz$, kde $C : \left|z - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $\ominus$. $[2\pi i]$
28. $\int_C \left(\frac{1}{z^2-9} - \cos\left(\frac{z}{z-3}\right)\right) dz$, kde $C : |z-3| = 1$, $\oplus$. $\left[2\pi i \left(\frac{1}{6} + 3 \sin 1\right)\right]$

10 Desiaty týždeň

1. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

- (a) $y'' + 3y' - 4y = 0$. $[y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}]$
 (b) $y'' - 2y' + 2y = 0$. $[y(x) = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)]$
 (c) $y'' + 6y' + 9y = 0$. $[y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}]$

2. Vyriešte začiatočné úlohy:

- (a) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. $[y(x) = 5e^{-2x} - 4e^{-3x}]$
 (b) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$. $[y(x) = e^{-x} (3 \cos x + 4 \sin x)]$
 (c) $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$. $[y(x) = -\frac{6}{5}e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}]$

3. Vypočítajte všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice:

- (a) $y'' + 2y' - 3y = 4 + x + 4e^{2x}$.
 $[y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}e^{2x} - \frac{14}{9}]$
 (b) $y'' + 4y' + 4y = 2 - \sin 3x$.
 $[y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{12}{169} \cos 3x + \frac{5}{169} \sin 3x + \frac{1}{2}]$
 (c) $y'' + 2y' - 8y = 3x \cos 4x$.
 $[y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{3}{200} \cos 4x + \frac{57}{1600} \sin 4x - \frac{9}{80} x \cos 4x + \frac{3}{80} x \sin 4x]$

4. Vyriešte začiatočné úlohy:

- (a) $y'' + 2y' + 5y = 2 \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 $\left[\begin{array}{l} \text{Všeobecné riešenie D.R.: } y(x) = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + C_1 (\cos 2x) e^{-x} + C_2 (\sin 2x) e^{-x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{6}{5} (\cos 2x) e^{-x} + \frac{2}{5} (\sin 2x) e^{-x} \end{array} \right]$
 (b) $y'' + 2y' + y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 $\left[\begin{array}{l} \text{Všeobecné riešenie D.R.: } y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x + C_2 x e^{-x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{3}{2} e^{-x} + \frac{3}{2} x e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x \end{array} \right]$
 (c) $y'' + 3y' + 2y = \sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. $\frac{d}{dx} (C_1 e^{-x} - \frac{7}{130} \sin 3x - \frac{9}{130} \cos 3x + C_2 e^{-2x})$
 $: \frac{27}{130} \sin 3x - \frac{21}{130} \cos 3x - C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$
 $\left[\begin{array}{l} \text{Všeobecné riešenie D.R.: } y(x) = C_1 e^{-x} - \frac{7}{130} \sin 3x - \frac{9}{130} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \\ \text{Riešenie ZÚ: } y(x) = \frac{3}{10} e^{-x} + \frac{3}{13} e^{-2x} - \frac{7}{130} \sin 3x - \frac{9}{130} \cos 3x \end{array} \right]$

11

Jedenásty týždeň

1. V úlohách 1 - 18 nájdite Laplaceov obraz funkcie f , ak f je originálom
2. $f(t) = 2e^{3t} + e^{it} + 6t^3 - 7t + 5$.

$$\left[F(p) = \frac{2}{p-3} + \frac{1}{p-i} + \frac{6 \cdot 3!}{p^4} - \frac{7}{p^2} + \frac{5}{p} \right]$$
3. $f(t) = \sin(5t) + 2 \cos(3t) - \sinh t + \cosh(2t)$.

$$\left[F(p) = \frac{5}{p^2+25} + \frac{2p}{p^2+9} - \frac{1}{p^2-1} + \frac{p}{p^2-4} \right]$$
4. $f(t) = \sin^2(at)$, $a \in \mathbf{R}$. $\left[F(p) = \frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)} \right]$
5. $f(t) = \sin(at) \cdot \cos(at)$, $a \in \mathbf{R}$. $\left[F(p) = \frac{a}{p^2+4a^2} \right]$
6. $f(t) = \sin(at) \cdot \cos(bt)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$.

$$\left[F(p) = \frac{a(p^2+a^2-b^2)}{[p^2+(a+b)^2] \cdot [p^2+(a-b)^2]} \right]$$
7. $f(t) = a^t + \sin(\omega t + \varphi)$.

$$\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a} + \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)} \cos \varphi + \frac{p}{p^2+\omega^2} \sin \varphi \right]$$
8. $f(t) = \sinh(3t)$. $\left[F(p) = \frac{3}{p^2-9} \right]$
9. $f(t) = e^{(1+i)t} \cdot \sinh(3t)$. $\left[F(p) = \frac{3}{[p-(1+i)]^2-9} \right]$
10. $f(t) = a^t$, $a > 0$. $\left[F(p) = \frac{1}{p-\ln a} \right]$
11. $f(t) = ta^t$, $a > 0$. $\left[F(p) = \frac{1}{(p-\ln a)^2} \right]$
12. $f(t) = e^{2t} \cdot \cos(3t) \cdot \cos(4t)$.

$$\left[F(p) = \frac{1}{2} \frac{p-2}{(p-2)^2+7^2} + \frac{1}{2} \frac{p-2}{(p-2)^2+1} \right]$$
13. $f(t) = e^{-t} + e^t \cdot \sin(2t)$. $\left[F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{(p-1)^2+2^2} \right]$
14. $f(t) = t^2 \cos(3t)$. $\left[F(p) = \frac{2p^3-54p}{(p^2+9)^3} \right]$
15. $f(t) = t^2 + 2t + 3 + te^{-5t}$. $\left[F(p) = \frac{2+2p+3p^2}{p^3} + \frac{1}{(p+5)^2} \right]$
16. $f(t) = t(\cos(2t) + e^{-t} \cdot \sin(2t))$.

$$\left[F(p) = \frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + \frac{4(p+1)}{[(p+1)^2+4]^2} \right]$$

$$17. f(t) = t^2 (e^{-3t} + \sin(2t)) \cdot \left[F(p) = \frac{2}{(p+3)^3} + \frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3} \right]$$

$$18. f(t) = \int_0^t \sin(\omega\tau) d\tau \cdot \left[F(p) = \frac{\omega}{p(p^2+\omega^2)} \right]$$

V úlohách 18 - 20 použitím vety o posune v originále nájdite Laplaceov obraz funkcie f :

$$19. f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < b \\ e^{at} & t \geq b \end{cases} \cdot \left[\frac{e^{-(p-a)b}}{p-a} \right]$$

$$20. (a) f(t) = \eta(t)(t-2)^2 \cdot \left[\frac{2!}{p^3} - \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} \right]$$

$$(b) f(t) = \eta(t-2)(t-2)^2 \cdot \left[e^{-2p} \frac{2!}{p^3} \right]$$

$$(c) f(t) = \eta(t-2)t^2 \cdot \left[e^{-2p} \frac{2!}{p^3} + e^{-2p} \frac{4}{p^2} + e^{-2p} \frac{4}{p} \right]$$

$$21. f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin t & t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 1 & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \cdot \left[\frac{p+e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p^3+p} \right]$$

V úlohách 21 - 22 nájdite Laplaceove obrazy konečných impulzov

$$22. f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 1, 4 \rangle \\ t-1 & t \in \langle 1, 2 \rangle \\ -\frac{t}{2}+2 & t \in \langle 2, 4 \rangle \end{cases} \cdot \left[\left(e^{-p} - \frac{3e^{-2p}}{2} + \frac{e^{-4p}}{2} \right) \frac{1}{p^2} \right]$$

$$23. f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 1, 5 \rangle \\ t-1 & t \in \langle 1, 2 \rangle \\ 1 & t \in \langle 2, 4 \rangle \\ 5-t & t \in \langle 4, 5 \rangle \end{cases} \cdot \left[\left(e^{-p} - e^{-2p} - e^{-4p} + e^{-5p} \right) \frac{1}{p^2} \right]$$

V úlohách 23 - 24 nájdite Laplaceov obraz periodickej funkcie

$$24. f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 2k\pi, (2k+1)\pi \rangle \\ -1 & t \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \rangle \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots \cdot \left[\frac{1-e^{-p\pi}}{p(1+e^{-p\pi})} \right]$$

$$25. f(t) = |\sin(\omega t)|, \omega \in \mathbf{R}^+ \cdot \left[\frac{\omega(1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}})}{(p^2+\omega^2)(1-e^{-\frac{p\pi}{\omega}})} \right]$$

V úlohách 25 - 27 nájdite konvolučný súčin funkcií f, g :

$$26. f(t) = t, g(t) = \cos t. [1 - \cos t]$$

$$27. f(t) = t^2, g(t) = t^3. \left[\frac{t^6}{60} \right]$$

$$28. f(t) = e^{at}, g(t) = 1 - at. [t]$$

V úlohách 28 - 36 nájdite originál k funkcii F :

$$29. F(p) = \frac{p^2+1}{p^3-p^2-2p} \cdot [f(t) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{2t}]$$

30. $F(p) = \frac{p^2-4p-3}{(p-1)^2(p+2)} \cdot [f(t) = -2te^t + e^{-2t}]$
31. $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)} \cdot [f(t) = e^t - e^{-t} \cos(2t) + \frac{3}{2}e^{-t} \sin(2t)]$
32. $F(p) = \frac{-2p^3+2p+5}{5(p^2+2p+2)(p+1)(p-1)} \cdot [f(t) = \frac{1}{5}e^{-t} \sin t - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{10}e^t]$
33. $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+5p+6} \cdot [f(t) = \eta(t-\pi)e^{-2(t-\pi)} - \eta(t-\pi)e^{-3(t-\pi)}]$
34. $F(p) = \frac{1-e^{-p}-pe^{-p}}{p^2(1-e^{-p})} \cdot \left[f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t-k & t \in \langle k, k+1 \rangle, k=0,1,\dots \end{cases} \right]$
35. $F(p) = \frac{1}{p(1+e^{-ap})}, a \in \mathbf{R}^+ \cdot \left[f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \in \langle 2ka, (2k+1)a \rangle \\ 0 & t \in \langle (2k+1)a, (2k+2)a \rangle, k=0,1,\dots \end{cases} \right]$
36. $F(p) = \frac{1}{p^3-2p^2+9p-18} \cdot [f(t) = \frac{1}{39}(-2\sin(3t) - 3\cos(3t) + 3e^{2t})]$
37. $F(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p(p^2+1)}(1 + e^{-\pi p}) \cdot \left[f(t) = \begin{cases} 1 & t \in \langle 0, \pi \rangle \\ 2 - \cos(t-\pi) & t > \pi \end{cases} \right]$

12 Dvanásty týždeň

V úlohách 1 - 11 vypočítajte pomocou Laplaceovej transformácie riešenie začiatkovej úlohy:

$$1. \quad x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) = 0, \quad x(0+) = -1, \quad x'(0+) = 2, \quad x''(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = -\frac{1}{5} - \frac{4}{5}e^{-t} \cos(2t) + \frac{3}{5}e^{-t} \sin(2t) \right]$$

$$2. \quad x^{(4)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 1, \quad x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = x'''(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = 1 - \cos t - \frac{t}{2} \sin t \right]$$

$$3. \quad x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = e^{3t}, \quad x(0+) = x'(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = \frac{1}{2}e^t - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \right]$$

$$4. \quad x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 2e^{3t}, \quad x(0+) = x'(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = e^t - 2e^{2t} + e^{3t} \right]$$

$$5. \quad x''(t) - x'(t) = te^t, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = e^t \left(\frac{t^2}{2} - t + 1 \right) \right]$$

$$6. \quad x'(t) + x(t) = t^2 e^{-t}, \quad x(0+) = a.$$

$$\left[x(t) = ae^{-t} + \frac{t^3}{3}e^{-t} \right]$$

$$7. \quad x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = t^3 e^{-2t}, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 2.$$

$$\left[x(t) = e^{-2t} \left(1 + 4t + \frac{t^5}{20} \right) \right]$$

$$8. \quad x'''(t) - x''(t) = \sin t, \quad x(0+) = x'(0+) = x''(0+) = 0.$$

$$\left[x(t) = -1 - t + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) \right]$$

$$9. \quad x'(t) + x(t) = f(t), \quad x(0+) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t \notin \langle 0, 2 \rangle \\ 1 & t \in \langle 0, 2 \rangle \end{cases}.$$

$$\left[x(t) = 1 - e^{-t} - \eta(t-2)(1 - e^{-(t-2)}) \right]$$

$$10. \quad x''(t) + 2x'(t) + x(t) = f(t), \quad x(0+) = x'(0+) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}.$$

$$\left[x(t) = -2 + t + 2e^{-t} + te^{-t} - \eta(t-1)[-2 + (t-1) + 2e^{-(t-1)} + (t-1)e^{-(t-1)}] \right]$$

$$11. \quad x''(t) + x(t) = f(t), \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ b & t \in \langle 0, a \rangle \\ 2b & t \geq a \end{cases}.$$

$$\left[x(t) = \eta(t)[b - (1-b)\cos t] - \eta(t-a)[b - b\cos(t-a)] \right]$$